

Из анализа выражения (10) следует, что при обработке каждого шага требуется выполнить четыре операции умножения на Δx_{ij} и Δy_{ij} , четыре операции сложения, одну операцию вычитания, одну операцию определения абсолютного значения, одну операцию сравнения. Это примерно такой же объем вычислительных операций, который требуется на каждый элементарный шаг при кусочно-линейной аппроксимации шаговых траекторий методами, приведенными в [5]. Следует отметить, что операции умножения допускают простую реализацию, так как Δx_{ij} и Δy_{ij} принимают значения $-1, 0, +1$. При таком малом объеме вычислительных операций будет довольно проста и техническая реализация метода аппроксимации (аппаратная или программная).

К достоинствам метода, кроме простоты его реализации, следует отнести также то, что в цикле аппроксимации не требуется запоминания точек, задающих аппроксимируемый участок кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ольховский Ю. Б., Мановцев А. П., Новоселов О. Н. Сжатие данных при телеизмерениях.— М.: Сов. радио, 1971.
2. Чеголин П. М., Леонович Э. Н., Савенков В. П. Автоматизация преобразования сложных форм графической информации.— Минск: Наука и техника, 1973.
3. Авдеев Б. Я. и др. Адаптивные телеизмерительные системы.— Л.: Энергоиздат, 1981, с. 37.
4. Виттих В. А. Сжатие данных при экспериментальных исследованиях.— В кн.: Вопросы кибернетики. Сжатие данных. М.: Сов. радио, 1974, с. 20.
5. Федоренко М. П., Тормышев Ю. И. Методы линеаризации сложных форм траекторий.— Электрон. моделирование, 1980, № 2.
6. Тормышев Ю. И., Федоренко М. П. Методы и средства формирования шаговых траекторий.— Минск: Наука и техника, 1980, с. 118—119.

Поступила в редакцию 25 мая 1984 г.

УДК 53.088.6

В. В. ШЕВЧУК

(Москва)

СИНТЕЗ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДАВЛЕНИЯ АДДИТИВНЫХ ПОМЕХ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ

В настоящее время в измерительной технике все чаще выдвигаются требования обеспечения высокой точности измерения при значительном быстродействии и большом уровне влияющих факторов. Требования по быстродействию определяются как необходимостью исследования быстропротекающих процессов, так и появлением информационно-измерительных систем с широкой сетью входной коммутации, для чего нужны измерительные устройства с малым временем отклика на входное ступенчатое воздействие. При проведении измерений в тяжелых эксплуатационных условиях большую неприятность доставляют аддитивные помехи, не позволяя получить требуемую точность измерений. Наиболее остро данная проблема стоит в тензометрии, где приходится измерять малые полезные сигналы при постоянно возрастающем уровне воздействия помех, являющихся в основном низкочастотными наводками промышленных частот и их гармоник. Решение проблемы с помощью известных способов фильтрации не позволяет одновременно удовлетворять указанным требованиям.

В области низкочастотных аддитивных помех при возможности независимого воздействия на измеряемый сигнал или помеху следует использовать способ измерения, заключающийся в весовом суммировании

результатов нескольких наблюдений, в процессе которого проводят изменения размера измеряемой величины или помехи [1—3]. Результаты R_{ni} n наблюдений при соответствующих изменениях в α_{ni} и в $1/\beta_{ni}$ раз измеряемой величины $X(t_i)$ и аддитивной помехи $\xi(t_i)$ равны $R_{ni} = \alpha_{ni}X(t_i) + \xi(t_i)/\beta_{ni}$. Результат измерения $M_n = \sum_{i=1}^n W_{ni}R_{ni}$; $M_n = X + \delta\xi_n$ (для $X = \text{const}$), где W_{ni} — весовые коэффициенты суммирования результатов наблюдений; $\delta\xi_n$ — остаточная погрешность от действия помехи. Время измерения $T_{изм}(n, \Delta t)$ (при $\Delta t_i, i-1 = \Delta t$) является фактически временем отклика на входное ступенчатое воздействие. Быстродействие измерений определяется выражением $f_{изм}(n, f_R) = f_R/n$, где $f_R = 1/\Delta t$ — частота проведения наблюдений. Реализацию способа в тензометрии удобно осуществлять, изменяя величину тока через тензорезистор, например, изменением от наблюдения к наблюдению направления этого тока. Частота таких изменений — частота проведения наблюдений и для ИИС, как правило, порядка 10 кГц. Следовательно, $f_{изм}(4; 10 \text{ кГц}) = 2,5 \text{ кГц}$; $f_{изм}(8; 10 \text{ кГц}) = 1,25 \text{ кГц}$, что для многих задач является достаточно высоким быстродействием.

Способ позволяет эффективно подавлять помеху с частотой, близкой к нулю [3]. На практике часто спектр частот помехи содержит в себе составляющие и других сосредоточенных частот, мощность которых во много раз превосходит мощность остальных. Это, как правило, помехи промышленных частот и их гармоники. Амплитудно-частотная характеристика подавления помех (при ограниченном количестве используемых наблюдений) в данном способе будет оптимальной (в смысле минимума мощности спектра остаточной помехи), если с помощью весовых коэффициентов получить (синтезировать) такую характеристику, при которой имеющиеся помехи сосредоточенных частот полностью устранятся. Задача синтеза амплитудно-частотной характеристики подавления помехи здесь сводится к тому, чтобы по заданным частотам, помехи которых необходимо подавить максимальным образом, определить требуемое количество наблюдений и весовые коэффициенты суммирования их результатов.

Для полного подавления синусоидальной помехи

$$\xi(t) = \xi_m \sin 2\pi f_\xi t$$

достаточно иметь результаты трех наблюдений. Сумма с весовыми коэффициентами $W_{31}(f)$, $W_{32}(f)$, $W_{33}(f)$ результатов трех равноотстоящих на Δt наблюдений помехи имеет вид

$$\begin{aligned} \delta\xi = & W_{31}(f) \xi_m \sin 2\pi f_\xi t + W_{32}(f) \xi_m \sin 2\pi f_\xi (t + \Delta t) + \\ & + W_{33}(f) \xi_m \sin 2\pi f_\xi (t + 2\Delta t). \end{aligned}$$

Относительная остаточная погрешность

$$\begin{aligned} \delta\xi/\xi_m = & \sin 2\pi f_\xi t [W_{31}(f) + W_{32}(f) \cos 2\pi f_\xi \Delta t + W_{33}(f) \cos 4\pi f_\xi \Delta t] + \\ & + \cos 2\pi f_\xi t [W_{32}(f) \sin 2\pi f_\xi \Delta t + W_{33}(f) \sin 4\pi f_\xi \Delta t]. \end{aligned}$$

Потребовав для заданной частоты помехи $f_{q\xi}$ равенства нулю этого выражения и сохранения масштаба измеряемой величины

$$\left(\sum_{i=1}^n W_{ni} \alpha_{ni} = 1 \right),$$

имеем

$$W_{31}(f_q) = W_{33}(f_q) = \frac{0,5}{1 + \cos 2\pi f_{q\xi}/f_R};$$

$$W_{32}(f_q) = 2W_{31} - 1 = \frac{-\cos 2\pi f_{q\xi}/f_R}{1 + \cos 2\pi f_{q\xi}/f_R} \quad (\alpha_{ni} = (-1)^{i+1}; \beta_{ni} = 1).$$

Значения W_{3i} для некоторых $f_{q\xi}/f_R$ приведены в таблице. Коэффициент

$f_{q\xi}/f_R$	$W_{31}(f_q)=W_{33}(f_q)$	$W_{32}(f_q)$	$f_{q\xi}/f_R$	$W_{31}(f_q)=W_{33}(f_q)$	$W_{32}(f_q)$
0,00	+0,25	-0,5	0,25	+0,5	-0
0,05	+0,2562714	-0,4874572	0,30	+0,7236068	+0,4472136
0,10	+0,2763932	-0,4472136	1/3	+1	+1
0,15	+0,3149040	-0,3701919	0,35	+1,2129600	+1,4259200
1/6	+1/3	-1/3	0,40	+2,6180340	+4,2360680
0,20	+0,3819660	-0,2360680	0,45	+10,2158645	+19,4317291

подавления амплитуды помехи будет

$$K_{mq\xi} \left(\frac{f_\xi}{f_R} \right) = \frac{1 + \cos 2\pi f_{q\xi}/f_R}{|\cos 2\pi f_\xi/f_R - \cos 2\pi f_{q\xi}/f_R|}$$

Остаточная помеха

$$\delta \xi_q(t) = (\xi_m/K_{mq\xi}) \sin 2\pi f_\xi(t + \Delta t) = \xi_{mq} \sin 2\pi f_\xi(t + \Delta t),$$

как и сама помеха, является синусоидальной функцией времени (с другими амплитудой ξ_{mq} и начальной фазой). Для полученной остаточной помехи также применим описанный алгоритм (необходимо взять отстоящие на Δt три ее значения). В результате получится другая аналогичная синусоидальная остаточная помеха. Этот алгоритм можно повторять многократно. При этом на каждом этапе можно требовать обнуления помех различных частот, используя различные весовые коэффициенты. Следовательно, по заданным частотам, которые требуется подавить максимальным образом, возможен синтез частотной характеристики подавления помех. Общий суммарный коэффициент подавления представляет собой произведение частных коэффициентов подавления. Чтобы осуществить описанное, нужно взять через Δt ряд из n наблюдений, разбить его на группы по три ближайших наблюдений в каждом, начиная с 1-го, 2-го, 3-го и т. д. до $n-2$. Получится $n-2$ групп. К каждой группе необходимо применить весовое суммирование с коэффициентами для одной из заданных частот помехи. Результирующий ряд из $n-2$ результатов суммирования следует разбить на группы аналогичным образом и применить весовое суммирование с коэффициентами для другой из заданных частот. Получится другой ряд из $n-4$ результатов и т. д. Для обнуления r частот понадобится $n = 2r + 1$ наблюдений.

Результаты первого этапа весового суммирования имеют вид

$$M_{3u}^1 = \sum_{l=1}^3 W_{3l}(f_1) R_{ni}, \quad u \leq n-2, \quad i = u + l - 1.$$

(Индексы при результате M : «1» — номер этапа, т. е. номер заданной подавляемой частоты помехи; «3» — количество наблюдений, используемых при получении данного результата суммирования; u — текущий номер результата.)

Для второго этапа суммирования

$$M_{3v}^2 = \sum_{k=1}^3 W_{3k}(f_2) M_{3u}^1 = \sum_{k=1}^3 W_{3k}(f_2) \sum_{l=1}^3 W_{3l}(f_1) R_{ni},$$

$$v \leq n-4, \quad u = v + k - 1, \quad i = v + k + l - 2 \text{ и т. д.}$$

На последнем этапе

$$M_{n,1}^r = \sum_{j=1}^3 W_{3j}(f_r) \dots \sum_{k=1}^3 W_{3k}(f_2) \sum_{l=1}^3 W_{3l}(f_1) R_{ni},$$

$$i = 1 + j + \dots + k + l - r.$$

Следовательно, результат измерения

$$M_n = \sum_{i=1}^3 W_{3i}(f_r) \dots \sum_{j=1}^3 W_{3j}(f_r) \dots \sum_{k=1}^3 W_{3k}(f_2) \dots \sum_{l=1}^3 W_{3l}(f_1) R_{ni}$$

Индексы i, j, \dots, k, l связаны соотношением

$$-i + j + \dots + k + l = (n - 3)/2$$

в поле допустимых значений

$$1 \leq i \leq n;$$

$$1 \leq j, \dots, k, l \leq 3.$$

Изменив порядок суммирования и приняв вычисляемым индекс l , получим

$$M_n = \sum_{i=1}^n R_{ni} \sum_{j=1}^3 W_{3j}(f_r) \dots \sum_{k=1}^3 W_{3k}(f_2) W_{3l'}(f_1),$$

где

$$W_{3l'}(f_1) = \begin{cases} W_{3l}(f_1), & \text{если } 1 \leq l \leq 3; \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$l = i - j - \dots - k + ((n - 3)/2).$$

Следовательно,

$$W_{ni}(f_{1\dots r}) = \sum_{j=1}^3 W_{3j}(f_r) \dots \sum_{k=1}^3 W_{3k}(f_2) W_{3l'}(f_1).$$

Для устранения, кроме того, постоянной помехи достаточно получить через Δt два таких результата измерения и взять их полуразность, что потребует дополнительно одно наблюдение. Поэтому

$$M_n = \sum_{i=1}^n R_{ni} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 W_{3j}(f_r) \dots \sum_{k=1}^3 W_{3k}(f_2) [W_{3l'}(f_1) - W_{3l''}(f_1)],$$

где

$$W_{3l'}(f_1) = \begin{cases} W_{3l}(f_1), & \text{если } 1 \leq l \leq 3; \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$W_{3l''}(f_1) = \begin{cases} W_{3, l-1}(f_1), & \text{если } 1 \leq l-1 \leq 3; \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$l = i - j - \dots - k + ((n - 4)/2); \quad n = 2(r + 1).$$

Отсюда

$$W_{ni}(f_{0,1\dots r}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 W_{3j}(f_r) \dots \sum_{k=1}^3 W_{3k}(f_2) [W_{3l'}(f_1) - W_{3l''}(f_1)].$$

Суммарный коэффициент подавления амплитуды помехи

$$K_{m\Sigma\xi}(f) = \frac{1}{|\sin \pi f_{\xi}/f_R|} \prod_{q=1}^r \frac{1 + \cos 2\pi f_{q\xi}/f_R}{|\cos 2\pi f_{\xi}/f_R - \cos 2\pi f_{q\xi}/f_R|}.$$

Аналогично получим суммарные относительную амплитудную и фазовую частотные характеристики результата измерения:

$$a_{\Sigma}(f_x) = \cos \pi f_x/f_R \prod_{q=1}^r \frac{\cos 2\pi f_x/f_R + \cos 2\pi f_{q\xi}/f_R}{1 + \cos 2\pi f_{q\xi}/f_R},$$

$$\Delta\varphi_{\Sigma}(f_x) = (n - 1) \pi f_x/f_R,$$

где f_x — частота измеряемой величины.

3*

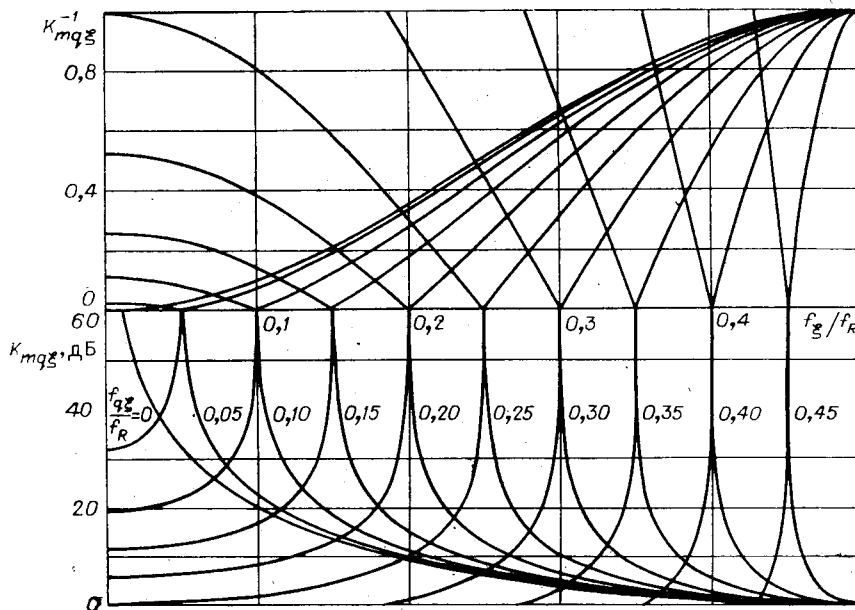


Рис. 1.

На рис. 1 и 2, а — г показаны некоторые частные и суммарные характеристики подавления помех (штриховые линии — для биномиальных коэффициентов).

Неточности выполнения алгоритма способа ограничивают его возможности. Наихудшие результаты получаются при относительных погрешностях δ_{wi} весового умножения с законом, обратным закону $\alpha_{ni}\beta_{ni}$. Фактическое значение остаточной погрешности при $|\delta_{wi}| = \delta_w$ определяется как

$$\delta_{\xi\Phi} \approx |\delta_{\xi}|_{\max} + \delta_w \xi_m \sum_{i=1}^n |W_{ni}(f_{0,1\dots r})|.$$

При высокой теоретической эффективности способа для рассматриваемых частот помехи составляющей $|\delta_{\xi}|_{\max}$ можно пренебречь. Тогда

$$\delta_{\xi\Phi} \approx \delta_w \xi_m \sum_{i=1}^n |W_{ni}(f_{0,1\dots r})| = \nu \delta_w \xi_m,$$

где $\nu = \sum_{i=1}^n |W_{ni}(f_{0,1\dots r})|$. Для данного способа $\nu = \prod_{q=1}^r \frac{1 + |\cos 2\pi f_{q\xi}/f_R|}{1 + \cos 2\pi f_{q\xi}/f_R}$.

Если для всех частот $f_{q\xi}$: $m - 0,25 \leq f_{q\xi}/f_R \leq m + 0,25$ (m — целое положительное), то $\nu = 1$. Если есть такие частоты, что $m - 0,75 < f_{q\xi}/f_R <$

$< m - 0,25$ и их количество равно p , то $\nu = \prod_{q=1}^p \text{tg}^2 \pi f_{q\xi}/f_R > 1$ (рис. 3).

Следовательно, $(K_{m\Sigma\xi})_{\min} = 1/(\nu\delta_w) < 1/\delta_w$. Величина ν показывает, во сколько раз здесь при прочих равных условиях требования к точности выполнения алгоритма способа выше, чем для способа [3] с биномиальными весовыми коэффициентами. При $f_{q\xi}/f_R \rightarrow m/2$ $\nu \rightarrow \infty$ и синтез характеристики подавления становится невозможным. Все же чаще $f_{q\xi}/f_R \leq 1/4$ и $\nu = 1$, а, значит, описанный синтез не будет иметь дополнительных технических трудностей при реализации.

Рассмотренный способ при $n = 4$, $f_R = 10$ кГц, $f_{0\xi} = 0$, $f_{1\xi} = 50$ Гц, $\beta_{ni} = 1$ реализован в ИИС для тензометрирования сложных натуральных конструкций. В этом случае

$$\begin{aligned} f_{\text{кзм}} &= 2,5 \text{ кГц}; \\ W_{4i} &= +0,1250308; -0,3749692; +0,3749692; -0,1250308; \\ K_{m\Sigma\xi} &= \frac{1,999507}{\sin \pi f_{\xi} 10^{-4} (\cos 2\pi f_{\xi} 10^{-4} - 0,999507)} \quad (\text{рис. 4}). \end{aligned}$$

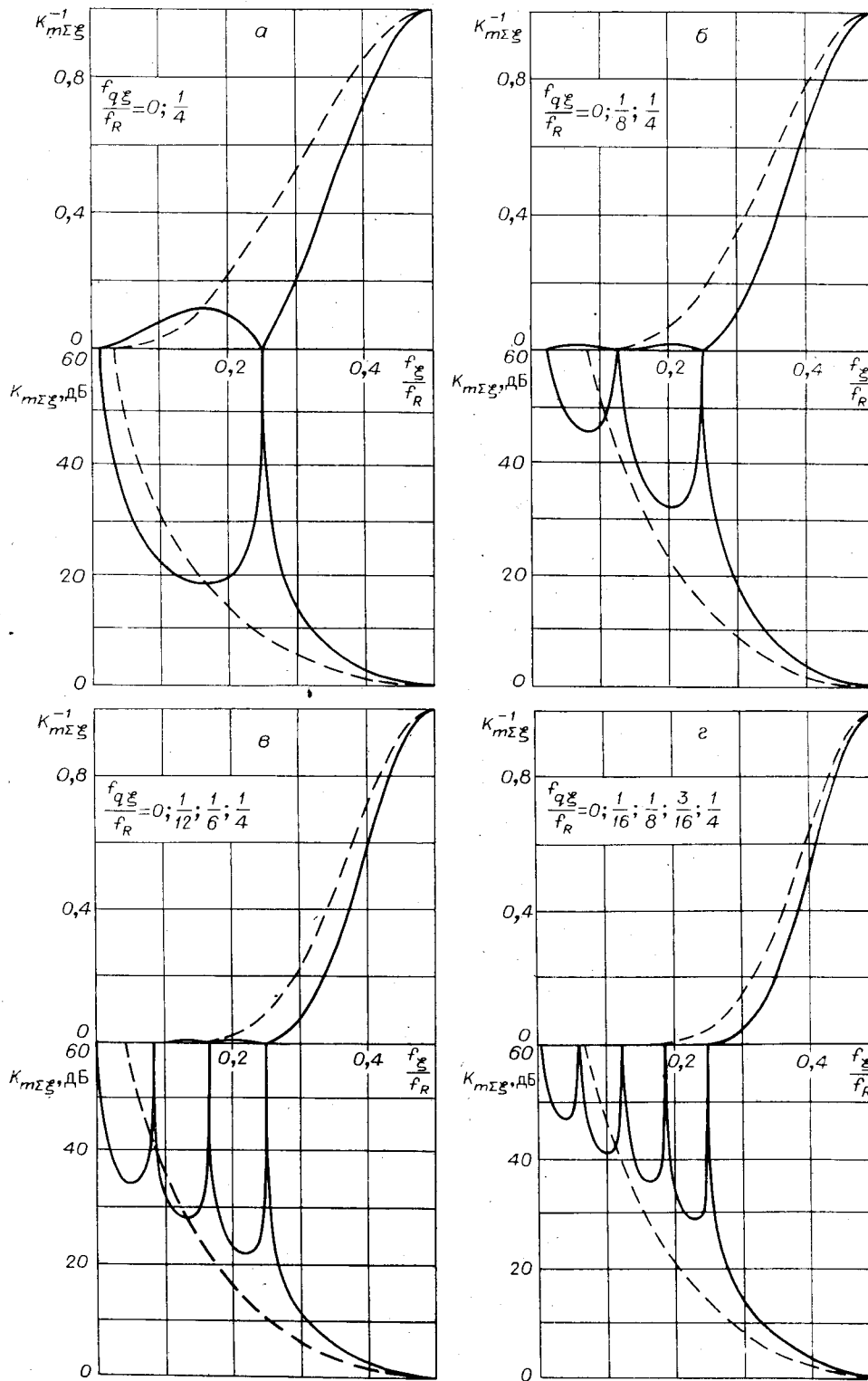


Рис. 2.

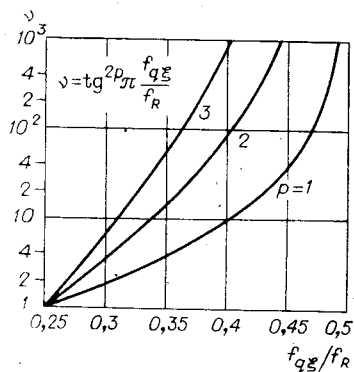


Рис. 3.

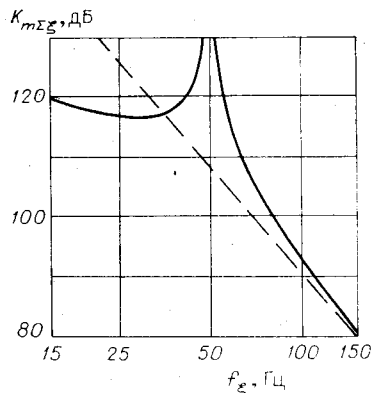


Рис. 4.

Использование способа позволяет получить высокие совокупные характеристики по быстродействию и устойчивости к аддитивным помехам с сосредоточенными частотами.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. с. 703765 (СССР). Способ измерения напряжения/В. В. Шевчук.— Оpubл. в ОИПОТЗ, 1979, № 46.
2. А. с. 687608 (СССР). Устройство для измерения сигналов/В. В. Шевчук.— Оpubл. в ОИПОТЗ, 1979, № 35.
3. Шевчук В. В. Способ уменьшения аддитивной погрешности в измерительных устройствах.— Автометрия, 1979, № 4, с. 25—29.

Поступила в редакцию 26 августа 1982 г.

УДК 517.518.8

Ю. Е. ВОСКОБОЙНИКОВ

(Новосибирск)

ЧАСТОТНЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ СГЛАЖИВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ СГЛАЖИВАЮЩИХ СПЛАЙНОВ

1. Постановка задачи. При сглаживании и дифференцировании экспериментальных данных широкое применение получили сглаживающие сплайны (СКС) [1, 2]. Для оценивания оптимального значения параметра сглаживания (минимизирующего среднеквадратическую ошибку сглаживания) предложены алгоритмы, работающие как при известных, так и при неизвестных дисперсиях погрешностей исходных данных [2, 3]. Однако еще остается ряд нерешенных вопросов, важных при практическом использовании СКС. Это прежде всего относится к сохранению в сплайне «тонких» структур приближаемой функции, что связано с разрешающей способностью СКС, и к определению числовых характеристик случайной составляющей ошибки вычисления функции и ее производных по построенному сплайну, которая обусловлена передачей в СКС погрешностей исходных данных.

В данной статье предлагается частотный подход, позволяющий не только решить задачу анализа точности сглаживания и дифференцирова-