

О. А. КАЦУБА, Ю. В. ФОФАНОВ

(Куйбышев)

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ СТРУКТУРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

В практике идентификации сложных нелинейных систем, в частности в задачах, связанных с обнаружением закономерностей по набору экспериментальных данных, нередко встречаются случаи полного или почти полного отсутствия априорной информации о виде (структуре) идентифицируемой зависимости (закономерности).

Широко распространенным подходом к таким задачам является поиск удачной зависимости в рамках различных расширяющихся классов усложняющихся закономерностей [1—3] исследуемого объекта

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_p \subset \dots, \quad (1)$$

состоящий в последовательной проверке всех элементов построенных классов в порядке возрастания их сложности с целью выделения наименее сложной закономерности, удовлетворяющей некоторой наперед заданной точности.

Под сложностью конкретной зависимости f_γ обычно понимается значение некоторого функционала $p_\gamma = T(f_\gamma)$, позволяющего поставить в соответствие каждой зависимости f_γ ($\gamma = 1, 2, \dots$) из всего множества рассматриваемых зависимостей F (тезауруса моделей) некоторое неотрицательное число p_γ .

Явный вид $T(f_\gamma)$ определяется конкретными требованиями, предъявляемыми к искомой зависимости.

В наиболее распространенном случае множество всех рассматриваемых закономерностей содержит бесконечное (счетное) число элементов. Это может быть множество всех полиномов, частных сумм рядов некоторых ортогональных функций, сплайнов и т. д.

Общей трудностью аппроксимации с помощью сплайнов и рядов ортогональных функций является необходимость определения большого количества коэффициентов, а значит увеличение объема необходимой экспериментальной выборки. Кроме того, громоздкость (часто необоснованная) получаемых зависимостей не только затрудняет их дальнейшее практическое использование, но и создает трудности при интерпретации исследуемого явления, особенно в случаях неудачного выбора вида ортогонального ряда. Наиболее ярко эти трудности проявляются в системах управления быстропротекающими процессами, где большое количество вычислительных операций, необходимое ЭВМ для получения прогноза поведения объекта или процесса при изменении внешних условий, может приводить к запаздыванию управляющего воздействия.

В настоящей статье излагается подход, позволяющий в ряде случаев избежать указанных трудностей и алгоритмизировать процесс как структурной, так и параметрической идентификации наименее сложной (в смысле времени вычисления или количества вычислительных операций) зависимости.

Особо отметим, что рассматривается случай идентификации зависимости при достаточно малой размерности аргумента, что делает существенным различие в областях применения предлагаемого подхода и метода группового учета аргумента (МГУА), эффективного при большом количестве аргументов.

Постановка задачи. Считая, что некоторый набор экспериментальных данных ψ , осуществляющий отображение

$$R^n \xrightarrow{\psi} r_1 \subset R^1,$$

может быть описан (аппроксимирован) аналитической функцией, конкретизируем множество F -альтернативных гипотез о виде зависимости (тезаурус моделей).

Введем следующие определения.

Определение 1. Назовем исходным базисом M некоторое конечное множество функций действительного аргумента φ_μ , осуществляющих отображение

$$R^{n_\mu} \supset r_{n_\mu} \xrightarrow{\varphi_\mu} r_{1_\mu} \subset R^1,$$

где n_μ — размерность аргумента функции φ_μ .

Определение 2. А. Зависимости $y = x_i$ и $y = c_i$ — зависимости над M .

Б. Каждая зависимость $y = f(x_1, \dots, x_{n_\mu}) = \varphi_\mu(x_1, \dots, x_{n_\mu}) \in M$ — зависимость над M .

В. Пусть $y = f(x_1, \dots, x_{n_\mu})$ — зависимость над M , а h_1, \dots, h_{n_μ} — выражения, являющиеся либо константами ($c_j \in R^1$), либо переменными x_i , либо моделями над M . Тогда выражение $y = f(h_1, \dots, h_{n_\mu})$ — зависимость над M , а c_j ($j = \overline{1, n_\mu}$) — параметры этой зависимости.

Из определения 2 видно, что множество всех зависимостей F_M над M счетно и образует индуктивный класс [4].

Если все $\varphi_\mu \in M$ являются функциями одного или двух аргументов, то в качестве элементов исходного базиса могут быть использованы простые арифметические и алгебраические операции типа сложения ($\varphi(a, b) = a + b$), умножения ($\varphi(a, b) = ab$) и элементарные функции, например, синус ($\varphi(a) = \sin a$), логарифм ($\varphi(a) = \ln a$) и т. д.

Определение 3. Поставим в соответствие каждому элементу $\varphi_\mu \in M$ ($\mu = \overline{1, \eta}$) положительное число l_μ , которое назовем сложностью этого элемента, а сложность каждой зависимости $f_\gamma \in F_M$ охарактеризуем следующим образом:

$$p_\gamma = T(f_\gamma) = \sum_{\mu=1}^{\eta} l_\mu k_\mu(f_\gamma),$$

где η — количество элементов в исходном базисе M ; $k_\mu(f_\gamma)$ — количество вхождений φ_μ в зависимость f_γ ($\gamma = \overline{1, 2, \dots}$).

Отметим, что если $l_\mu = 1$ ($\mu = \overline{1, \eta}$), то сложность каждой зависимости окажется пропорциональной количеству содержащихся в ней вычислительных операций: если же все l_μ будут пропорциональны времени выполнения соответствующих операций на ЭВМ определенного типа, то сложность каждой зависимости оказывается пропорциональной времени ее вычисления при одном наборе аргументов на данной ЭВМ.

Введенное таким образом определение сложности позволяет разбить все множество F_M на непересекающиеся классы K_p , все элементы которых имеют одинаковую сложность p , а поскольку каждый класс содержит конечное число элементов, то поиск удовлетворительной по точности зависимости может быть осуществлен в рамках последовательности этих классов в порядке возрастания их сложности.

Задание F_M с помощью индуктивной процедуры (определение 2) позволяет автоматически (с помощью ЭВМ) строить все классы $K_p \subset F_M$ в порядке возрастания их сложности.

Пусть ψ — набор экспериментальных данных вида $\{y_i; \varepsilon_i; x_i\}$, $i = \overline{1, N}$, где N — количество экспериментальных точек; $\dim(x_i) = n$ — размерность вектора x_i (аргумента), а ε_i — оценка уклонения y_i от истинного значения (погрешность).

Пусть $\{M\}$ — некоторое множество действительных функций, а $\omega(\psi, f_\gamma)$ — критерий, позволяющий относительно любой $f_\gamma \in F_M$ и исходных данных ψ решить вопрос о сопоставимости f_γ и ψ :

$$\omega(\psi, f_\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists c_\gamma: \rho_\gamma(y_i, f_\gamma(x_i; c_\gamma)) \leq \varepsilon_i, i = \overline{1, N}; \\ 0, & \text{если } \exists c_\gamma: \rho_\gamma(y_i, f_\gamma(x_i; c_\gamma)) \geq \varepsilon_i, i = \overline{1, N}, \end{cases}$$

где c_T — вектор параметров зависимости f_T ($\dim c_T = m_T$), а ρ_Y — метрика в некотором пространстве Y , элементами которого являются y_i и $f_T(x_i, c_T)$.

Таким образом, зависимость f_T сопоставима с исходными данными ψ , если при некотором (хотя бы одном) наборе параметров (c_T) она не выходит за пределы погрешности эксперимента.

Отметим, что существование в F_M хотя бы одной зависимости, сопоставимой с экспериментом, существенно зависит от конкретного вида M и ψ .

Рассмотрим для простоты одномерную задачу ($\dim(x_i) = 1$). Пусть M состоит только из одного элемента: $\varphi_1(a) = \sin a$ ($l_1 = 1$). В этом случае все зависимости в F_M , для которых сложность $p > 0$, имеют область изменения $[-1, 1]$; зависимостей же, для которых $p = 0$, только две: $y_1 = x$ и $y_2 = c$. Нетрудно подобрать такой набор ψ , при котором для любой $f_T \in F_M$ критерий $\omega(\psi, f_T) = 0$.

Пусть, например, ψ :

$$(y_1 = 0; \quad \varepsilon_1 = 0,1; \quad x_1 = 0);$$

$$(y_2 = 10; \quad \varepsilon_2 = 0,1; \quad x_2 = 1).$$

Эти две точки не могут быть аппроксимированы прямыми $y_2 = c$, $y_1 = x$ и не принадлежат области значений всех остальных зависимостей. Таким образом, справедливо:

Утверждение 1. Существуют такие M , ψ и $\omega(\psi, f_T)$, что F_M не имеет ни одной зависимости, сопоставимой с экспериментом

$$(\forall f_T \in F_M : \omega(\psi, f_T) = 0).$$

Пусть теперь M таково, что содержит операцию сложения ($\varphi_1(a, b) = a + b$), а из остальных элементов M можно сконструировать произвольный элемент ортогонального ряда (например, полинома, если $\varphi_2(a, b) = ab$). Тогда из множества F_M может быть выделена зависимость f_T^* , являющаяся суммой любого количества элементов ортогонального ряда, а поскольку с помощью ортогонального ряда конечное множество экспериментальных точек аппроксимируется с любой точностью и при добавлении новых элементов в ряд точность аппроксимации не ухудшается, то справедливы следующие утверждения:

Утверждение 2. Существуют такие M и $\omega(\psi, f_T)$, что для любого ψ в тезаурусе F_M содержится счетное число зависимостей, сопоставимых с ψ .

Утверждение 3. Если M таково, что из F_M можно выделить f_T^* , являющуюся суммой любого количества элементов некоторого ортогонального ряда Q , то сопоставимая с ψ зависимость, полученная путем последовательной проверки всех элементов классов K_p в порядке возрастания их сложности, не сложнее любой сопоставимой с ψ аппроксимации этим рядом Q . Из утверждения 3 вытекает практически важное следствие.

Следствие 1. Для всякого M , содержащего, по крайней мере, сложение ($\varphi_1(a, b) = a + b$), умножение ($\varphi_2(a, b) = ab$) и синус ($\varphi_3(a) = \sin a$), независимо от вида ψ наименее сложная зависимость, сопоставимая с ψ ,

а) существует,

б) не превышает по сложности сопоставимой с ψ аппроксимации, полученной в виде ряда Фурье и полинома.

Учет априорных ограничений. Поскольку построение F_M по заданному базису M носит чисто формальный характер, то в качестве альтернативных зависимостей иногда приходится рассматривать (или даже принимать за «истинные») «экзотические» зависимости, причем даже экспериментатора заведомо неприемлемые. Например, зависимость вида $y = x^{c^x}$, если x — время, было бы трудно интерпретировать с точки зрения физики. Исследование полученных зависимостей на устойчивость по отношению к экспериментальным данным [1] тоже не всегда позволяет исключить неудачную модель.

Указанных трудностей можно избежать, если сформулировать некоторые структурные ограничения на элементы F_M . Эти ограничения, яв-

ляясь своего рода априорной информацией, позволяют сократить перебор и время нахождения искомой зависимости.

В частности, ограничения в виде некоторого набора запрещенных структурных конструкций (элементов) позволяют автоматически (на ЭВМ) производить анализ альтернативных зависимостей и исключение заведомо неприемлемых.

Отметим, что роль априорных ограничений могут выполнять и некоторые неструктурные требования, предъявляемые к искомой зависимости (монотонность, асимптотические свойства и т. д.). В этом случае их учет оказывается эффективным, так как проверить, выполняется ли данное требование для конкретной зависимости, обычно легче, чем выяснить, сопоставима ли она с экспериментальными данными, поскольку выяснение сопоставимости предусматривает решение задачи параметрической идентификации.

Если априорные ограничения не запрещают использование получающихся с помощью M ортогональных рядов в качестве альтернативных зависимостей, то следствие 1 выполняется и минимальная по сложности сопоставимая с ψ зависимость существует.

Необходимо отметить, что очень быстрый рост числа элементов (зависимостей) в классах K_p с ростом номера класса (сложности) p сильно ограничивает возможности практического применения рассматриваемого подхода.

Для избежания указанных трудностей (если не удалось обнаружить удачной зависимости в классах с низкой сложностью, а построение и проверка элементов более высокого класса сложности затруднительны) оказывается целесообразным ввести дополнительно «искусственные» структурные ограничения с целью сокращения количества рассматриваемых зависимостей и ограничения скорости роста количества элементов в классах K_p с ростом p .

Использование «искусственных» ограничений приводит к тому, что вместо «оптимальных» (минимальных по сложности) переходим к отысканию «квазиоптимальных» (минимальных по сложности при «искусственных» структурных ограничениях) моделей, поскольку поиск теперь осуществляется в некотором подмножестве индуктивного класса F_M .

Рассмотрим несколько возможных реализаций таких ограничений.

Комбинации зависимостей минимальной сложности. Зададимся некоторым значением сложности p_{\max} , выше которого не будем рассматривать зависимости из F_M , т. е. выделим из F_M некоторое подмножество

$$\Phi_{p_{\max}} = \{f_v | f_v \in F_M, p_v \leq p_{\max}\}.$$

Количество элементов в $\Phi_{p_{\max}}$ конечно. Будем искать зависимость в виде

$$f_1^* + f_2^* + \dots,$$

где f_k^* — минимальные по сложности модели, т. е. сначала отыскивается наилучшее первое приближение f_1^* из множества $\Phi_{p_{\max}}$, затем, если это необходимо, второе $f_1^* + f_2^*$, где f_1^* — найденное первое приближение, а f_2^* — элемент множества $\Phi_{p_{\max}}$ и т. д.

Таким образом, на каждом шаге процедуры рассматривается одно и то же множество $\Phi_{p_{\max}}$, что делает рост количества данных зависимостей линейно зависящим от сложности.

По координатная аппроксимация. Пусть $\dim(x_i) = n \geq 2$. Будем искать зависимость в виде $y = f^0(x_1, c_1^1, \dots, c_{m_1}^1)$,

$$\text{где } c_j^1 = f^{j_1}(x_2, c_{1,1}^2, \dots, c_{m_2,1}^2), \quad j_1 = \overline{1, m_1},$$

$$c_{j_2}^2 = f^{m_1+j_2}(x_3, c_{1,1}^3, \dots, c_{m_3,1}^3), \quad j_2 = \overline{1, m_2} \text{ и т. д.,}$$

Номер класса сложности	Вид зависимости	Значение параметра δ , Па	Значение коэффициента	Погрешность, %	Объем выборки N
2	$y = c_2 x^{c_1}$ ($\sigma_{\max} = 5,4\%$)	281,2 · 10 ⁵	$c_1 = 0,38$ $c_2 = 0,2 \cdot 10^{-4}$	$\sigma = 1,5$	85
		421,8 · 10 ⁵	$c_1 = 0,4$ $c_2 = 0,28 \cdot 10^{-4}$	$\sigma = 2,5$	85
		562,4 · 10 ⁵	$c_1 = 0,39$ $c_2 = 0,45 \cdot 10^{-4}$	$\sigma = 5,4$	85
		703 · 10 ⁵	$c_1 = 0,39$ $c_2 = 0,75 \cdot 10^{-4}$	$\sigma = 4,8$	85
3	$y = \text{sh}(c_2 x^{c_1})$ ($\sigma_{\max} = 3\%$)	281,2 · 10 ⁵	$c_1 = 0,222$ $c_2 = 0,33 \cdot 10^{-4}$	$\sigma = 2$	85
		421,8 · 10 ⁵	$c_1 = 0,18$ $c_2 = 0,53 \cdot 10^{-4}$	$\sigma = 2,7$	85
		562,4 · 10 ⁵	$c_1 = 0,16$ $c_2 = 0,82 \cdot 10^{-4}$	$\sigma = 2,1$	85
		703 · 10 ⁵	$c_1 = 0,14$ $c_2 = 0,113 \cdot 10^{-3}$	$\sigma = 2,9$	85

т. е. сначала строится наименее сложная зависимость y от x_1 , сопоставимая с исходными данными при всех наборах x_2, \dots, x_n при соответствующих значениях параметров $c_1^1, \dots, c_{m_1}^2$ для каждого набора, затем эти коэффициенты аппроксимируются наиболее простыми зависимостями с аргументом x_2 , сопоставимыми при всех наборах x_3, \dots, x_n и т. д.

Такой подход позволяет на каждом шаге процедуры рассматривать вместо многомерных моделей одномерные и сокращает тем самым трудоемкость процедуры поиска удачной зависимости.

Отметим, что поскольку зависимости из F_M по построению содержат все возможные комбинации аргументов (от 1 до n), то получаемая сопоставимая с экспериментом зависимость может не содержать некоторых аргументов, т. е. одновременно с поиском зависимости происходит исключение несущественных переменных.

Пример. На основе изложенного подхода разработаны алгоритмы и составлены программы на языке Фортран-IV для ЕС-1055, позволяющие автоматически строить по заданному M все элементы классов K_p , $p = \overline{0,5}$, и проверять их в порядке возрастания сложности.

Одним из примеров работы программ было построение уравнений для описания семейства первичных кривых ползучести $y = f^*(x)$ (где y — деформация, x — время) чистой меди для различных напряжений $\delta = 281,2 \cdot 10^5$; $421,8 \cdot 10^5$; $562,4 \cdot 10^5$; $703 \cdot 10^5$ Па при температуре 300 К, полученных методом наименьших квадратов Девисом и приведенных в работе [5].

Исходный базис $\{M\}$ состоял из семи функций:

$$\varphi_1(a, b) = a + b;$$

$$\varphi_2(a, b) = ab; \varphi_3(a, b) = a^b; \varphi_4(a) = \ln a; \varphi_5(a) = \text{sh}(a);$$

$$\varphi_6(a) = \sin a; \varphi_7(a) = \exp(a) \quad (l_\mu = 1, \mu = \overline{1,7}).$$

Априорные ограничения: 1) $(f(x))^{f(x)}$ — запрещенный элемент структуры; 2) при $x \rightarrow 0$ $y \rightarrow 0$; 3) при $x \rightarrow \infty$ $y \rightarrow \infty$.

Потребовав, чтобы максимальное отклонение модели от экспериментальной кривой не превышало 10%, зависимость $f_p^*(x)$ обнаружили во втором классе сложности (метод оценивания — метод наименьших квадратов):

$$y = f_2^*(x) = c_1 x^{c_2} (\sigma = 5,4\%).$$

При увеличении требуемой точности (5%) модели удалось обнаружить только в третьем классе сложности (см. таблицу):

$$y = f_3^*(x) = \text{sh}(c_2 x^{c_1}) (\sigma < 3\%);$$

$$y = f_3^*(x) = c_2 \text{sh}(x^{c_1}) (\sigma < 2,5\%).$$

Дальнейшее увеличение точности (2,0%) привело к моделям четвертого класса сложности:

$$y = f_4^*(x) = c_2 x^{c_1} + c_3 x (\sigma = 1,8\%);$$

$$y = f_4^*(x) = c_3 \text{sh}(c_2 x^{c_1}) (\sigma = 1,5\%).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции.— М.: Наука, 1984.
2. Вапник В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным.— М.: Наука, 1979.
3. Вапник В. Н. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей.— М.: Наука, 1984.
4. Кузин Л. Т. Основы кибернетики.— М.: Энергия, 1979, т. 2.
5. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.— М.: Мир, 1969, т. 2.

Поступила в редакцию 19 марта 1985 г.

УДК 62—501.5

О. А. КАЦЮБА

(Куйбышев)

О МЕТОДЕ КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫХ ОЦЕНОК В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

Нелинейные относительно параметров модели находят широкое применение в теории фильтрации, идентификации нелинейных объектов, распознавания образов и т. д. Проблема решения задачи нелинейного оценивания (а именно к ней сводится задача идентификации нелинейных объектов управления) без априорного знания плотности распределения помех наблюдений рассматривалась многими авторами [1—5]. Наиболее полно эта задача применительно к проблеме идентификации изложена в [2, 3], однако здесь имеют место трудности проверки условий состоятельности и асимптотической нормальности оценок параметров нелинейных моделей, к тому же случайные наблюдения одинаково распределены и область изменения неизвестных параметров — компакт.

В настоящей работе, во-первых, решается задача идентификации нелинейных объектов на основе оригинальной разновидности метода эмпирического риска, когда функция потерь принадлежит априорно только классу плотностей распределения, т. е. имеет место прямое обобщение метода максимального правдоподобия (ММП) на случай априорной неопределенности о законах распределения с помощью введения простых и конструктивных с точки зрения их проверки дополнительных условий