

УДК 683.3 : 621.372.061

А. А. ЛЯЛИНСКИЙ, С. Г. РУСАКОВ
(Москва)

МЕТОДЫ УСКОРЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МДП БИС

Введение. Тенденции разработки аппарата математического моделирования БИС и СБИС определяются, с одной стороны, необходимостью увеличения производительности средств моделирования, а с другой — повышенными требованиями к точности результатов моделирования. Новое перспективное направление моделирования БИС во временной области — ускоренный электрический анализ (УЭА) — занимает промежуточное положение между традиционными электрическими и логическими видами моделирования по точности анализа и по производительности. Ускорение расчетов достигается за счет декомпозиции системы уравнений, описывающей поведение схемы. В силу ряда ограничений вычислительного характера методы УЭА основное применение нашли только в моделировании временных характеристик цифровых МДП БИС. Результаты разработок методов и программ ускоренного моделирования (в настоящее время наиболее известны программы MOTIS [1], MOTIS-C [2], SPLICE [3], ПА-6 [4]) подтвердили эффективность их применения. Для схем высокой степени сложности получен выигрыш во временных затратах на 1—2 порядка, а также значительный выигрыш по оперативной памяти ЭВМ в сравнении с традиционными «стандартными» методами схемотехнического моделирования. Это позволяет, в свою очередь, увеличить предельные возможности программ.

Отказ от методов «стандартного» моделирования при численном интегрировании систем уравнений моделей, а также применение декомпозиционных подходов, связанных в первую очередь с использованием релаксационных методов, приводят к постановке новых проблем вычислительного плана. От решения вопросов сходимости и численной устойчивости новых методов зависит степень их универсальности и соответственно широта класса моделируемых схем. Особенностью применения релаксационных методов УЭА (по сравнению с их использованием при численном решении систем высокой размерности в задачах математической физики) является отсутствие свойств симметричности и положительной определенности матриц модели, играющих ведущую роль для обоснования многих известных методов. Среди основных численных проблем, появляющихся в связи с этим в методах УЭА, следует выделить сохранение свойств, близких к A -устойчивости исходных неявных методов интегрирования, и проблему «плавающих емкостей», которая вызвана потенциальным неучетом внедиагональных емкостей в релаксационных методах.

Результаты, приведенные в настоящей статье, направлены на развитие теории методов и алгоритмов УЭА с целью увеличения их универсальности при частичном решении перечисленных проблем. В частности, получены новые достаточные условия A -устойчивости, расши-

ряющие в сравнении с работой [5] класс тестовых моделей, предложен принцип локальной диагонализации для учета внедиагональных емкостей в релаксационных методах, приведены характеристики разработанной авторами программы ускоренного электрического анализа.

Условия стабильности. В наибольшей степени методам УЭА соответствует схемотехника МДП БИС [6]; уравнения моделей этого класса схем получают, как правило, в форме [5]

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{v})\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{I}(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — вектор-функция узловых потенциалов; $\mathbf{v}(t)$ — вектор управляющих входных напряжений; $\mathbf{I}(t)$ — вектор токов нелинейных элементов; C — матрица узловых емкостей схемы.

Отличительная черта алгоритмов УЭА — применение релаксационных методов для декомпозиции исходных систем при исключении точных гауссовских методов решения линейных систем уравнений для вычисления ньютоновской поправки. При определении степени универсальности алгоритмов УЭА важным является вопрос, для каких схем сохраняются свойства устойчивости и A -устойчивости исходных неявных методов интегрирования, так как новые алгоритмы вносят дополнительные ограничения из-за потенциальной потери устойчивости на больших интервалах моделирования.

Рассмотрим систему трансцендентных уравнений вида

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad (2)$$

которая получается на шаге интегрирования неявными методами в результате дискретизации. В «стандартных» программах моделирования для решения системы (2) применяется метод Ньютона

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k), \quad (3)$$

свойства сходимости которого не накладывают дополнительных ограничений на величину шага интегрирования. Помимо этой особенности он обладает квадратичной скоростью сходимости, что позволяет рассчитывать при хорошем начальном приближении на малое число итераций на шаге. Применение релаксационных подходов для решения систем вида (2) приводит к составным итерационным процедурам [7], в которые по указанным причинам целесообразно включать методы ньютоновского типа.

Распространенными для итерационного решения систем линейных уравнений высокой размерности являются методы Якоби, Гаусса — Зейделя, последовательной верхней релаксации (ПВР), Писмена — Рэкфорда или чередующихся направлений [7]. Их использование вместо точного решения системы (3) приводит к организации составных итерационных процессов, где в качестве первичного выступает метод Ньютона. Более экономным оказывается применение релаксационных подходов на нелинейном уровне. В этом случае исходная система нелинейных уравнений подвергается декомпозиции до линеаризации. Релаксационный метод выступает в роли первичного, а метод Ньютона — в роли вторичного при решении отдельных уравнений $f_i(\mathbf{x}) = 0$ относительно переменной x_i ($i = 1, \dots, n$). Если ньютоновские итерации проводятся до обеспечения заданной погрешности, то составная итерационная процедура может рассматриваться как нелинейный релаксационный метод, например нелинейные методы ПВР, Якоби, Писмена — Рэкфорда. Если задано число вторичных итераций m , то получаются m -шаговые составные методы. Условия сходимости таких процессов приведены в [7]. Из оценок скорости сходимости вытекает целесообразность применения одношаговых процедур.

Таким образом, при организации вычислительных алгоритмов для УЭА следует учитывать условия сходимости составных итерационных процессов, имея в виду возможные ограничения на величину шага из-за этих условий для матриц произвольного вида. Из рассмотренных

алгоритмов для УЭА МДП БИС целесообразно выбрать класс составных итерационных процессов типа ПВР — Ньютона, если матрица анализируемой структуры (благодаря исходным компонентным соотношениям) близка к треугольной, или класс методов Писмена — Ньютона при наличии элементов матрицы выше диагонали.

Основные характеристики численных методов интегрирования такие, как точность и устойчивость, традиционно исследуются на тестовых задачах, которые представляют собой асимптотически устойчивые системы линейных ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений) с постоянными коэффициентами вида [8] $y = Ay$. На данных системах анализируются свойства и методы интегрирования для программ «стандартного» моделирования, в том числе свойства устойчивости, A -устойчивости или жесткой устойчивости [8]. Так как для методов УЭА в связи с их целевым назначением точность интегрирования не играет ведущей роли, основной вопрос при их оценке связан с характеристиками устойчивости. Однако тестовые задачи указанного выше типа не соответствуют в этом случае своему назначению, так как при использовании релаксационных методов в процессе вычислений обрабатываются отдельные уравнения. Анализ методов предлагается [5, 9] вести на приближенной к электрическому расчету модельной задаче (1), представленной в виде

$$Cx = -Gx, \quad (4)$$

где C — матрица узловых емкостей; G — матрица узловых проводимостей; C и G постоянны. При этом предполагается асимптотическая устойчивость системы (4) и невырожденность матрицы C (каждый узел должен иметь заземленную емкость).

Задача исследования характеристик методов включает вопрос об их устойчивости при ограниченном шаге h и анализ сохранения устойчивости исходных неявных методов интегрирования при отсутствии ограничений на величину шага. Принятым способом анализа устойчивости одношаговых методов являются оценка нормы матрицы перехода $M(h)$: $x_{n+1} = M(h)x_n$, отражающей характер накопления ошибок, и проверка условия

$$\|M(h)\| < 1. \quad (5)$$

Например, для неявных методов Эйлера или трапеций при решении системы вида (3) условие (5) выполнено при произвольном h . Характеристики свойств устойчивости при одной составной итерации на шаге наглядно получаются при их реализации для системы (4) совместно с неявным методом Эйлера

$$x_{k+1} = x_k + hx_{k+1}. \quad (6)$$

Применение формулы дискретизации (6) к модельной системе (4) приводит к [9] $(C + hG)x_{k+1} = Cx_k$. Будем рассматривать далее каждую из матриц C и G в виде суммы диагональной, нижней и верхней треугольных: $C = C_d + C_l + C_u$, $G = G_d + G_l + G_u$.

Соответствующие переходные матрицы $M(h)$ для методов Якоби и Гаусса — Зейделя имеют вид [6]

$$M_J(h) = [C_d + hG_d]^{-1}[C_d - h(G_l + G_u)]; \quad (7)$$

$$M_{ГЗ}(h) = [C_d + C_l + h(G_d + G_l)]^{-1}[C_d + C_l - hG_u]. \quad (8)$$

Из формул (7), (8) видно, что в вычислительном процессе не участвует в полном виде матрица емкостей C (в алгоритме с методом Якоби используются только диагональные емкости C_d , а в методе Гаусса — Зейделя учитывается также нижняя треугольная матрица C_l). Поэтому такие алгоритмы в общем случае не могут обеспечить заданную точность и устойчивость и накладывают ограничения на структуру моделируемых схем (все емкости схемы должны быть заземлены).

Таким образом, использование релаксационных подходов приводит

к необходимости решения так называемой проблемы «плавающих» емкостей для расширения класса моделируемых схем.

Для использования полной матрицы емкостей C , а также учета возможных обратных связей применяется принцип симметризации [5]. Его цель — учесть при интегрировании верхнюю треугольную матрицу. Для этого может быть использован вариант метода чередующихся направлений, фактически сводящийся к процедуре прямого и обратного хода методом Гаусса — Зейделя. Для улучшения характеристик интегрирования целесообразно прямой и обратный ход на каждом шаге выполнять с применением промежуточной временной точки. Для системы (4) матрица перехода такого алгоритма имеет следующий вид [9]:

$$M_{\text{сим}}(h) = \left(\frac{1}{2} C_d + C_u + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{2} G_d + G_u \right) \right)^{-1} \left(\frac{1}{2} C_d + C_u - \frac{h}{2} \left(\frac{1}{2} G_d + G_l \right) \right) \left(\frac{1}{2} C_d + C_l + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{2} G_d + G_l \right) \right)^{-1} \left(\frac{1}{2} C_d + C_l - \frac{h}{2} \left(\frac{1}{2} G_d + G_u \right) \right). \quad (9)$$

Алгоритм является более трудоемким, чем алгоритм, использующий однопроходную схему Гаусса — Зейделя. Однако он более универсален, так как расширяет класс моделируемых схем благодаря учету обратных связей (верхних треугольных матриц) и обладает лучшими характеристиками устойчивости.

В работе [5] показана устойчивость симметричного алгоритма для схем, содержащих плавающие емкости, а также устойчивость при $h \rightarrow \infty$ (A -устойчивость) для частного случая схем, матрицы проводимостей которых включают только диагональные элементы. Последний результат, к сожалению, неконструктивен из-за отсутствия таких схем на практике.

Расширим класс тестовых моделей и соответственно класс моделируемых схем, для которых свойства A -устойчивости сохраняются при наличии плавающих емкостей. Представляет интерес рассмотрение вопроса об устойчивости при $h \rightarrow \infty$ для схем с исходными модельными уравнениями (4), матрицы которых $A = -C^{-1}G$ имеют действительные отрицательные собственные значения.

Получим общие условия на структуру матрицы G , при которых в (9) при $h \rightarrow \infty$ $\|M_{\text{сим}}(h)\| < 1$. Введем обозначения (по аналогии с [5]): $P = C_d/2 + C_u$, $P^T = C_d/2 + C_l$, $Q_1 = G_d/2 + G_u$, $Q_2 = G_d/2 + G_l$.

В силу симметричности матрицы емкостей C имеем $C = C^T$, $P + P^T = C$. Положим далее $\varepsilon = 2/h$. Тогда $h \rightarrow \infty$ соответствует $\varepsilon \rightarrow 0$. Представим (9) с учетом введенных обозначений в следующем виде:

$$M(h) = (Q_1 + \varepsilon P)^{-1} (\varepsilon P - Q_2) (Q_2 + \varepsilon P^T)^{-1} \times \\ \times (\varepsilon P - Q_1) = L_1(\varepsilon) L_2(\varepsilon) L_3(\varepsilon) L_4(\varepsilon) = L(\varepsilon). \quad (10)$$

Так как при $\varepsilon = 0$ $L_1(0) = Q_1^{-1}$, $L_2(0) = -Q_2$, $L_3(0) = Q_2^{-1}$, $L_4(0) = -Q_1$, то $L(0) = E$, где E — единичная матрица. Линеаризуем функцию $L(\varepsilon)$ при малых ε :

$$L(\varepsilon) = E + \left. \frac{dL}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

От знакоопределенности матрицы производных $\frac{dL}{d\varepsilon}$ зависит выполнение условия $\|M(h)\| < 1$. После дифференцирования (10) по ε получим

$$\frac{dL}{d\varepsilon}(0) = -Q_1^{-1} C (Q_1^{-1} + Q_2^{-1}) Q_1.$$

Найденная матрица $\frac{dL}{d\varepsilon}(0)$ подобна (имеет те же собственные значения) матрице

$$H = -C (Q_1^{-1} + Q_2^{-1}) = -C \left[\left(\frac{1}{2} G_d + G_u \right)^{-1} + \left(\frac{1}{2} G_d + G_l \right)^{-1} \right] = -CR.$$

Отсюда следует необходимое условие \bar{A} -устойчивости: спектр матрицы $CR = C \left[\left(\frac{1}{2} G_d + G_u \right)^{-1} + \left(\frac{1}{2} G_d + G_l \right)^{-1} \right]$ должен включать только положительные собственные значения: $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Так как матрица емкостей C симметрична и положительно определена (C — матрица Стильеса [7]), достаточное условие устойчивости — положительная определенность матрицы R или матриц $Q_1^{-1} = \left(\frac{1}{2} G_d + G_u \right)^{-1}$ и $Q_2^{-1} = \left(\frac{1}{2} G_d + G_l \right)^{-1}$. Например, достаточной является неположительность внедиагональных элементов матрицы проводимостей $G (g_{ij} < 0, i \neq j)$. Тогда при положительных диагональных элементах матрицы Q_1 и Q_2 — M -матрицы [7] и $Q_1^{-1} \geq 0, Q_2^{-1} \geq 0$. В частном случае пассивных схем матрице R соответствует симметричная матрица G с $g_{ij} \leq 0$, являющаяся матрицей Стильеса [7].

Таким образом, расширен в сравнении с работой [5] класс схем с достаточными условиями сохранения \bar{A} -устойчивости при наличии «плавающих» емкостей.

Принцип локальной диагонализации. Названный так принцип предусматривает формирование матриц с диагональным преобладанием на отдельном (локальном) этапе вычислений для обеспечения требуемых локальных свойств сходимости релаксационных методов. Так как принцип локальной диагонализации не предполагает обязательной предварительной модификации моделируемой схемы и не исключает внедиагональные элементы, а учитывает в определенной форме их значения, его применение позволяет рассчитывать на более высокую универсальность при сохранении основной декомпозиционной идеи методов УЭА. Указанный принцип может быть реализован различными способами. При декомпозиции исходной системы на отдельные уравнения локальная диагонализация может быть применена, например, до дискретизации дифференциальных уравнений или для системы нелинейных уравнений вида (2) на шаге интегрирования. Рассмотрим возможный вариант применения принципа локальной диагонализации в последнем случае. Для этого в линейной системе уравнений (3) разделим i -е уравнение на Δx_i и заменим отношение приращений $\frac{\Delta x_k}{\Delta x_i}$ на производные

$\frac{\partial x_k}{\partial x_i}$. Эта операция эквивалентна представлению каждого i -го уравнения в виде

$$f_i(x_1(x_i), x_2(x_i), \dots, x_i, \dots, x_m(x_i)) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (11)$$

и применению ньютоновской итерации к (11) как к сложной функции. В этом случае i -е уравнение системы имеет вид

$$\left(\sum_{j \neq i} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \Delta x_i = -f_i(x). \quad (12)$$

Используем далее для оценки производных $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}$ предположение локальной безынерционности j -й переменной в сравнении с i -й [10], которое приводит к соотношению

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \frac{x_j}{x_i}. \quad (13)$$

С его учетом система (12) приобретает результирующий вид

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dx_1} \Delta x_1 &= -f_1; \\ &\vdots \\ \frac{df_m}{dx_m} \Delta x_m &= -f_m, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\frac{df_i}{dx_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i \neq j} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \frac{\dot{x}_j}{x_i} \quad (15)$$

При интегрировании системы ОДУ, например, вида (4) производные (15) с учетом дискретизации

$$\frac{df_i}{dx_i} = \left(C_{ii} \frac{1}{h} + g_{ii} \right) + \sum_{i \neq j} \left(C_{ij} \frac{1}{h} + g_{ij} \right) \frac{\dot{x}_j}{x_i} \quad (16)$$

Процесс диагонализации может быть осуществлен с применением принципа Якоби или Зейделя. В первом случае для i -го уравнения на $(k+1)$ -м шаге интегрирования функция f_i рассчитывается в точке $(x_1^k, \dots, x_i^k, \dots, x_m^k)$ и производная соответствует (16). При использовании принципа Зейделя правая часть вычисляется в точке $(x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, \dots, x_m^k)$ и в диагональную сумму добавляются лишь эле-

менты справа от диагонали $\sum_{j=i+1}^m \left(C_{ij} \frac{1}{h} + g_{ij} \right) \frac{\dot{x}_j^k}{x_i^k}$.

Так как в этом случае система уравнений на шаге интегрирования имеет диагональный (для метода Якоби) или нижнетреугольный (для метода Гаусса — Зейделя) вид, сходимость соответствующих итерационных процессов обеспечивается при любом шаге интегрирования h .

В этом случае матрицы модельного уравнения (4) принимают вид

$$C = \tilde{C}_d, \quad G = \tilde{G}_d$$

и

$$C = C_l + \tilde{\tilde{C}}_d, \quad G = G_l + \tilde{\tilde{G}}_d$$

для методов Якоби и Зейделя соответственно, а конкретизация модельной системы приводит в этом случае к выражениям

$$\tilde{C}_d x_{n+1} + h \tilde{G}_d x_{n+1} = \tilde{C}_d x_n$$

$$\text{и } ((\tilde{\tilde{C}}_d + C_l) + h(\tilde{\tilde{G}}_d + G_l)) x_{n+1} = (\tilde{\tilde{C}}_d + C_l) x_n,$$

где элементы диагональных матриц вычисляются по формулам: для метода Якоби

$$\tilde{C}_{dii} = C_{ii} + \sum_{i \neq j} C_{ij} \frac{\dot{x}_j}{x_i}; \quad \tilde{g}_{dii} = g_{ii} + \sum_{i \neq j} g_{ij} \frac{\dot{x}_j}{x_i}$$

и для метода Зейделя

$$\tilde{\tilde{C}}_{dii} = C_{ii} + \sum_{j=i+1}^m C_{ij} \frac{\dot{x}_j}{x_i}; \quad \tilde{\tilde{g}}_{dii} = g_{ii} + \sum_{j=i+1}^m g_{ij} \frac{\dot{x}_j}{x_i}$$

Следует обратить внимание, что в отличие от ранее рассмотренных подходов в обоих случаях учитываются элементы верхней треугольной матрицы C_u , а так как переходные матрицы имеют вид

$$M_{\text{Я}}(h) = [C_d + h\tilde{G}_d]^{-1} \tilde{C}_d,$$

$$M_{\text{ЗЗ}}(h) = [\tilde{\tilde{C}}_d + C_l + h(\tilde{\tilde{G}}_d + G_l)]^{-1} (\tilde{\tilde{C}}_d + C_l)$$

и соответственно $\|M(h)\| < 1$ при $h \rightarrow \infty$, то обеспечивается \tilde{A} -устойчивость.

Для использования принципа локальной диагонализации на уровне дифференциальных уравнений можно продифференцировать i -е уравнение системы (1) по x_i и с учетом представления связей пере-

менных в виде сложных функций $x_j = x_j(x_i)$ и соотношения (13) перейти к локальному представлению исходной системы на шаге интегрирования в виде набора уравнений.

Важное свойство принципа локальной диагонализации — увеличение возможностей для эффективного распараллеливания вычислений. Исходные алгоритмы УЭА, как правило, не обладают свойствами «естественного параллелизма». Так, например, метод Гаусса — Зейделя в отличие от схемы Якоби относят к существенно последовательным методам. Предложенный принцип локальной диагонализации, заключающийся в локальном пересчете внедиагональных элементов в значение диагонального элемента, учитывая всю матрицу емкостей и гарантируя диагональное преобладание, обеспечивает независимую обработку процессорами отдельных уравнений.

Программа автоматизированного ускоренного расчета ИС (АУРИС).

На основе программы схмотехнического проектирования общего назначения АРИС разработана программа ускоренного моделирования АУРИС. Декомпозиция системы на отдельные уравнения позволила отказаться от хранения матрицы $C + hG$, что дало значительную экономию оперативной памяти ЭВМ. Снижение временных затрат по сравнению с АРИС достигнуто за счет применения релаксационных методов и учета неактивности (латентности) узлов [11]. Последняя выражается в том, что потенциал некоторого узла не изменяется в течение некоторого отрезка времени. Учет латентности узлов осуществляется с помощью динамического планировщика узлов, работающего на каждом шаге интегрирования. В своей работе планировщик использует таблицу вида «узел — нагрузки узла» (нагрузками являются узлы элементов, присоединенных к данному узлу). Контроль латентности ведется по разнице узловых потенциалов на двух соседних шагах. Если узел A находится в активном состоянии, то он планируется к обработке на следующем шаге, а его нагрузки — на данном. Переход узла A в пассивное состояние автоматически исключает его вместе с нагрузками из списка обрабатываемых узлов. Входные узлы схемы возбуждаются только внешними генераторами. Интегрирование ведется неявным методом Эйлера первого порядка с сохранением традиционного контроля локальной погрешности и стратегии выбора шага.

Программа АУРИС имеет четыре экспериментальных варианта. В таблице даны результаты расчета асинхронной схемы памяти магазинного типа, содержащей 130 МДП-транзисторов и 67 узлов, по программе АРИС и по четырем вариантам АУРИС. Анализируются процессы последовательной записи и считывания четырех битов информации на отрезке $0 \dots 10$ мкс. Точность выдаваемого решения во всех случаях одинакова. Из таблицы видно, что максимальный выигрыш во времени достигает 8 раз. Результаты расчета тестовых примеров, взя-

Программа		ЦПУ-время, мин				
		Время анализа, мкс				
		1	10			
АРИС		16	—			
АУРИС	Использование динамического планировщика					
Метод						
1. Симметричный				Нет	8	115
2. То же				Да	4	36
3. Гаусс — Зейдель				Да	2	22
4. Локальной диагонализации	Да	2	23			

тых из [5] и [12] (соответственно бутстреппный каскад и МДП-операционный усилитель), содержащих незаземленные емкости порядка 1 и 40 пФ, показали, что при сохранении одной и той же точности решения в варианте 3 наблюдается значительное уменьшение величины шага интегрирования, в то время как в варианте 4 он остается примерно таким же, как и при анализе с помощью программы АРИС.

Заключение. Разработка и применение методов ускоренного электрического анализа подтвердили их вычислительную эффективность. Организации вычислений методами УЭА в наибольшей степени соответствуют составные итерационные процессы типа Гаусса — Зейделя — Ньютона или Писмена — Рэкфорда — Ньютона. Условия устойчивости методов интегрирования на базе составных процессов для моделей практических схем требуют ограничения на величину шага. Это требование отсутствует в методах релаксационной кривой [6], которые сохраняют свойства устойчивости методов «стандартного» моделирования, но используют значительные объемы оперативной памяти для хранения временных характеристик. Кроме того, их применение ограничено в системах смешанного моделирования из-за проблем сопряжения с другими блоками.

Необходимы дальнейшие исследования методов УЭА, обеспечивающих свойства A -устойчивости. В статье получены необходимые и достаточные условия сохранения A -устойчивости методов УЭА в виде требований к структуре матрицы проводимостей G . Предложен также принцип локальной диагонализации, благодаря которому в релаксационных методах используется информация о всех элементах матрицы. Результат — решение проблемы «плавающих емкостей» и возможность расширения области применения методов УЭА, в том числе на класс биполярных ИС. Важное свойство предлагаемого подхода — распараллеливание алгоритмов УЭА.

Практическое применение разработанной авторами программы АУРИС, использующей методы УЭА совместно с методами временной разреженности, подтвердило эффективность программ УЭА при анализе электрических характеристик МДП БИС. Несмотря на начальную стадию исследования методов и алгоритмов УЭА этот аппарат может вполне эффективно применяться в системах многоуровневого и смешанного моделирования БИС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chawla B. R., Gummel H. K., Kozak P. MOTIS — An MOS timing simulator.— IEEE Trans. Circuits Syst., 1975, v. CAS-22, p. 901—909.
2. Fan S. P., Hsueh M. Y., Newton A. R., Pederson D. O. MOTIS-C: A new circuit simulator for MOS LSI circuits.— In: Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst., 1977, p. 700—703.
3. Newton A. R. Techniques for the simulation of large-scale integrated circuits.— IEEE Trans. Circuits Syst., 1979, v. CAS-26, p. 741—749.
4. Мартынюк В. А., Норенков И. П., Трудоношин В. А., Федорчук В. Г. Программный комплекс для анализа БИС.— В кн.: Микроэлектроника и полупроводниковые приборы/Под ред. А. А. Васенкова, Я. А. Федотова. М.: Радио и связь, 1984, вып. 8.
5. Michelli G. De., Sangiovanni-Vincentelli A. L., Newton A. R. Symmetric displacement algorithms for the timing analysis of large scale circuits.— IEEE Trans. on Computer — Aided Design, 1983, v. CAD-2, N 3.
6. Lelarasmee E., Ruehli A. E., Sangiovanni-Vincentelli A. L. The waveform relaxation method for time-domain analyses of large scale integrated circuits.— IEEE Trans. on Computer — Aided Design., 1982, v. CAD-1, N 3.
7. Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М.: Мир, 1975.
8. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений/Под ред. Д. Холла, Д. Уатта.— М.: Мир, 1979.
9. Newton A. R., Sangiovanni-Vincentelli A. L. Relaxation-based electrical simulation.— IEEE Trans. on Electronic Devices, 1983, v. ED-30, N 9.
10. Баталов Б. В., Егоров Ю. Б., Русаков С. Г. Основы математического моделирования больших интегральных схем на ЭВМ.— М.: Радио и связь, 1982.

11. Rabbat N. B., Hsieh H. Y. A latent macromodular approach to large-scale sparse networks.— IEEE Trans., 1976, v. CAS-23, N 12.
12. Tsividis Y. P., Gray P. R. An integrated NMOS operational amplifier with internal compensation.— IEEE J. Solid-State Circuits, 1976, v. SC-11, p. 748—754.

Поступила в редакцию 16 июля 1986 г.

УДК 621.315

В. И. КОЛЬДЯЕВ, В. А. МОРОЗ, С. А. НАЗАРОВ

(Новосибирск)

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ЛЕГИРОВАНИИ И ОКИСЛЕНИИ КРЕМНИЯ

1. Введение. В основе технологии сверхбольших интегральных схем (СБИС) лежат процессы создания легированных областей посредством ионной имплантации и диффузии легирующих примесей и получения диэлектрических пленок двуокиси кремния SiO_2 с помощью термического окисления. Для моделирования этих процессов «классическим» стало рассмотрение диффузии примеси по законам Фика, окисления в соответствии с законом Дила — Гроува и ионной имплантации по закону Линдхарда — Шарфа — Шютта [1—8]. Показано, что эти законы, отражающие механизмы переноса частиц в объемном Si и SiO_2 , выполняются достаточно корректно при низких концентрациях примеси (менее 10^{19} см $^{-3}$), больших глубинах p - n -переходов (более 1—2 мкм) и толстых слоях SiO_2 (свыше 50—100 нм).

В результате миниатюризации элементов СБИС в современной субмикронной технологии достигнуты, глубины легированных слоев 0,1—1,0 мкм, толщины слоев SiO_2 20 нм и менее, топологические размеры областей менее 1 мкм. Поэтому для субмикронной технологии требуется более детальное рассмотрение физико-химических процессов в приповерхностном слое кремния, который насыщен дефектами, определяющими механизмы переноса примесей [2—9].

В настоящей работе сделана попытка проанализировать совокупность процессов в приповерхностном слое кремния и выделить из них основные, а затем с учетом их поставить краевую задачу о легировании и окислении кремния в двумерном приближении и исследовать асимптотические свойства этой краевой задачи.

II. Обобщенная нестационарная краевая задача. Перечислим физико-химические процессы при формировании структуры интегрального МДП-транзистора (рис. 1), определяющие основные закономерности термического окисления и переноса примесей в Si.

Процессы в слое A1. 1. Перенос молекул окислителя из объема окислительной атмосферы (ОА) к поверхности SiO_2 (граница S1). Характеристики процесса переноса молекул зависят от состава ОА и конфигурации рабочей зоны окислительной установки.

2. Адсорбция молекул окислителя на поверхности SiO_2 [4].

Процессы в слое A2. 3. Диффузия молекул окислителя через слой A2 к поверхностям кремния и нитрида кремния Si_3N_4 к границам S2, S3 и S8.

4. Ускорение процесса 3 в присутствии в ОА хлорсодержащих соединений [2, 4].

5. Формирование слоя SiO_2 постоянной толщины в области I и переменной толщины под маскирующим слоем Si_3N_4 (в области II) за счет диффузии молекул окислителя под слой Si_3N_4 . (Область II слоя окисла за свою форму получила название «птичий клюв» [6].)