

нелинейные искажения, вносимые базовыми элементами ГОЭС, приводят главным образом к неравномерности восстановления по полю изображения; восстановление деталей изображения происходит за большее число итераций на участках с теми значениями интенсивности, где производная функции нелинейных искажений мала;

пороговые ограничения, вносимые электронно-цифровой частью системы, повышают устойчивость и скорость сходимости алгоритма ван Циттерта, если интенсивность восстанавливаемого изображения находится вблизи пороговых значений рабочего диапазона системы (но не выходит за пределы этого диапазона), и не влияют на процесс восстановления в противном случае.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Василенко Г. И. Теория восстановления сигналов.— М.: Сов. радио, 1979.
2. Matsuoka K., Shigematsu T., Ichioka Y. e. a. Iterative image restoration by means of optical-digital hybrid system//Appl. Opt.— 1982.— V. 21, N 24.— P. 4493—4499.
3. Афанасьева О. А., Борзов С. М., Гибин И. С. и др. Восстановление изображений в итеративной оптико-электронной системе с обратной связью//Автометрия.— 1986.— № 2.
4. Шафер Р. У., Мерсеро Р. М., Ричардс М. А. Интерференционные алгоритмы восстановления сигналов при наличии ограничений//ТИИЭР.— 1981.— Т. 69, № 4.
5. Разумова И. И., Худик В. Н. Прикладные вопросы реализации алгоритма ван Циттерта в оптико-электронной системе с обратной связью//Оптическая обработка информации/Под ред. С. Б. Гуревича.— Л.: Наука, 1985.
6. Kawata S., Ichioka Y. Resolution enhancement of spectra//JOSA.— 1980.— V. 70, N 7.— P. 762—772.
7. Jansson P. A., Hunt R. H., Plyler E. K. Iterative image restoration by means of optical-digital hybrid system//JOSA.— 1970.— V. 60.— P. 596.

Поступила в редакцию 27 августа 1985 г.

УДК 616.07

В. Н. МОЙСЕЕВ, И. Н. ТРОИЦКИЙ, Н. Д. УСТИНОВ

(Москва)

### ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ТОМОГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА Ч. II. АНАЛИЗ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТОЧНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Элементы информационной матрицы Фишера для томографического изображения. Пусть функция  $f(x, y)$ , описывающая анализируемое сечение, зависит от некоторого числа  $M$  неизвестных параметров  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ , так что  $f(x, y) = f(x, y, \lambda)$ . Тогда и проекции (1) [1], и восстановленное изображение (2) [1] также зависят от тех же параметров ( $R(s, \varphi) = R(s, \varphi, \lambda)$ ;  $f_\alpha(x, y) = f_\alpha(x, y, \lambda)$ ). Рассмотрим вопрос о том, с какой максимальной точностью данные неизвестные параметры могут быть измерены по восстановленному томографическому изображению.

В соответствии с неравенством Крамера — Рао минимальный эллипсоид рассеяния для эффективных оценок определяется информационной матрицей Фишера [2], элементы которой равны

$$J_{lm} = - \frac{\partial^2 \ln \Phi [f_\alpha(x, y) | f(x, y, \lambda)]}{\partial \lambda_l \partial \lambda_m} \quad (1)$$

Как отмечалось в [1],  $\Phi [f_\alpha(x, y) | f(x, y, \lambda)] = F [f_\alpha(x, y) - f_\alpha(x, y, \lambda)]$ , где функционал  $F(\cdot)$  определяется выражением (24) или (31) [1]. Продифференцировав  $\ln \Phi(\cdot)$  по  $\lambda_l$  и  $\lambda_m$  и усреднив полученный результат,

находим

$$\begin{aligned}
 J_{lm} = & \frac{1}{N^0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{\alpha}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_l} \frac{\partial f_{\alpha}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_m} dx dy + \\
 & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{\alpha}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_l} \times \\
 & \times e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{\alpha}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_m} e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Преобразуем равенство (2) так, чтобы оно определялось не функцией  $f_{\alpha}(x, y, \lambda)$ , а явно зависело от исходной функции  $f(x, y, \lambda)$ . Подставляя (1) [1] в (2) [1] и делая замену переменных  $x_1 = s \cos \varphi - p \sin \varphi$ ,  $y_1 = p \cos \varphi + s \sin \varphi$ , имеем

$$f_{\alpha}(x, y, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1, \lambda) \tau_{\alpha}(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1, \quad (3)$$

$$\text{где } \tau_{\alpha}(x - x_1, y - y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q_{\alpha} [(x - x_1) \cos \varphi + (y - y_1) \sin \varphi] d\varphi. \quad (4)$$

Пусть функция  $f_{\alpha}(x, y, \lambda)$  такова, что ее дифференцирование по любой компоненте вектора  $\lambda$  можно осуществить под знаком интеграла (3). Тогда, подставляя (3) в (2) и учитывая равенство [3] \*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha}(x, y) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy w_{\alpha} \left( \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right), \quad (5)$$

получаем

$$\begin{aligned}
 J_{lm} = & \frac{1}{N^0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_1, y_1, \lambda)}{\partial \lambda_l} \frac{\partial f(x_2, y_2, \lambda)}{\partial \lambda_m} \tau_{\alpha}^0(x_1 - x_2, y_1 - y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 + \\
 & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega_1, \omega_2) w_{\alpha}^2 \left( \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_l} \times \\
 & \times e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_m} e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy d\omega_1 d\omega_2,
 \end{aligned} \quad (6)$$

здесь

$$\tau_{\alpha}^0(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{\alpha}(x - x_1, y - y_1) \tau_{\alpha}(x - x_2, y - y_2) dx dy. \quad (7)$$

В приложении показано, что

$$\tau_{\alpha}^0(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \int_0^{\infty} dt \int_0^{2\pi} d\varphi t w_{\alpha}^2(t) e^{i2\pi t [(x_1 - x_2) \cos \varphi + (y_1 - y_2) \sin \varphi]}. \quad (8)$$

Делая в интеграле (8) замену переменных  $\omega_1 = 2\pi t \cos \varphi$ ,  $\omega_2 = 2\pi t \sin \varphi$

\* Равенство (5) имеет следующий смысл: спектр восстановленного томографического изображения равен спектру истинного, умноженному на функцию  $w_{\alpha} \left( \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right)$ .

и подставляя его в (6), находим

$$J_{lm} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 d\omega_2 \left[ v(\omega_1, \omega_2) + \frac{1}{(2\pi)^2 N^0} \right] w_{\alpha}^2 \left( \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_1} \times \\ \times e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_m} e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy. \quad (9)$$

Определенная особенность равенства (9) — наличие в нем функции  $w_{\alpha}(\cdot)$ . Напомним, что она входит в равенство (3) [1] и ее появление связано с регуляризацией преобразования Радона. Чтобы более детально разобраться со значимостью этой функции, рассмотрим случай, когда неизвестным является только один параметр ( $\lambda = \lambda$ ).

Для данной ситуации дисперсия эффективной оценки неизвестного параметра  $\lambda$  задается выражением (9) при  $\lambda_1 = \lambda_m = \lambda$ . Учтем также, что  $v(\omega_1, \omega_2)$  определяется формулой (30) [1], а  $g(\omega_1, \omega_2) = G(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})$  (16) [1]. Тогда, переходя в плоскости  $\{\omega_1, \omega_2\}$  к полярным координатам  $\omega, \varphi$ , из (9) получаем

$$\sigma_{\alpha}^2 = \left\{ \frac{1}{(2\pi)^2 N^0} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega w_{\alpha}^2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)}{1 + \frac{1}{N^0} \omega w_{\alpha}^2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) \left[ g(\omega) + \frac{N_0}{2\pi} \right]} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} e^{i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dx dy \right|^2 \right\}^{-1}. \quad (10)$$

Обратим внимание на то, что функция  $w_{\alpha}(\cdot)$  входит в (10) через величину

$$Y_{\alpha}(\omega) = \frac{\omega w_{\alpha}^2(\omega/2\pi)}{1 + \frac{1}{N^0} \omega w_{\alpha}^2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) \left[ g(\omega) + \frac{N_0}{2\pi} \right]}. \quad (11)$$

Параметр регуляризации  $\alpha$  всегда может быть введен таким образом, что сам принимает значения, большие или равные нулю, а функция  $w_{\alpha}(t)$  обладает следующими свойствами: при  $\alpha = 0$   $w_{\alpha}(t) \equiv 1$ ;  $w_{\alpha}(t) > 0$ , а  $\frac{\partial w_{\alpha}(t)}{\partial t} < 0$  при всех  $t \geq 0$  [3]. Тогда, дифференцируя (11) по  $\alpha$ , убеждаемся, что с ростом параметра  $\alpha$  величина  $Y_{\alpha}(\omega)$  уменьшается для всех  $\omega \geq 0$ , а так как при интегрировании по  $\omega$  она умножается на положительную функцию, то, следовательно, и результат интегрирования также уменьшается. Это означает, что с увеличением  $\alpha$  дисперсия эффективной оценки увеличивается, так что минимального значения она достигает при  $\alpha = 0$ , т. е. когда  $w_{\alpha}(t) \equiv 1$ .

Сформулированный вывод с первого взгляда кажется неожиданным. Действительно, в качестве оцениваемого параметра может выступать значение анализируемой функции в одной из точек  $x, y$  (в частности, такой пример будет рассмотрен ниже). Но тогда, если воспользоваться регуляризованным преобразованием Радона, дисперсия значения восстанавливаемой функции оказывается равной бесконечности. Это хорошо видно из формулы (19) [1], где при  $\alpha \rightarrow 0$   $\sigma^2 \rightarrow \infty$ . Принимая во внимание изложенное, возникает вопрос, как же получается, что минимальное значение дисперсии эффективной оценки (любой, и в том числе самой функции) достигается при  $\alpha = 0$ ?

Ответ кроется в следующем: оценка, построенная за счет введения функции  $w_{\alpha}(t)$ , не является оптимальной. Ее преимущество в том, что

она оказывается достаточно универсальной, т. е. годится для оценки функции при полном отсутствии априорных сведений как об этой функции, так и о статистике шума. Оптимальная же (асимптотически эффективная) оценка должна учитывать всю эту информацию. Синтезировать такую оценку можно на основе функционала плотности вероятностей [1], привлекая известные методы теории статистических решений. В результате синтеза универсальная регуляризация заменяется оптимальным сглаживанием, настроенным на данную конкретную ситуацию и не использующим фильтрующие свойства функции  $w_\alpha(t)$ .

Полагая в (9)  $w_\alpha(\cdot) \equiv 1$  и проводя преобразования, подобные тем, которые были выполнены при выводе (10), окончательно получим

$$J_{lm} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{1 + \frac{1}{N^0} \omega \left[ g(\omega) + \frac{N_0}{2\pi} \right]} \int_0^{2\pi} d\varphi \times$$

$$\times \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_l} e^{i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dx dy \times$$

$$\times \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_m} e^{-i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dx dy. \quad (12)$$

Если зависимость функции  $f(x, y, \lambda)$  от  $x$  и  $y$  проявляется только через величину  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , так что  $f(x, y, \lambda) \rightarrow f(r, \lambda)$ , то, переходя в последних интегралах (12) к полярным координатам и интегрируя по угловым координатам, найдем

$$J_{lm} = \frac{2\pi}{N^0} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{1 + \frac{1}{N^0} \omega \left[ g(\omega) + \frac{N_0}{2\pi} \right]} \int_0^\infty r \frac{\partial f(r, \lambda)}{\partial \lambda_l} J_0(\omega r) dr \int_0^\infty r \frac{\partial f(r, \lambda)}{\partial \lambda_m} J_0(\omega r) dr. \quad (13)$$

Выражение (12) позволяет при выполнении сформулированных выше условий для любой восстанавливаемой в процессе томографирования функции  $f(x, y, \lambda)$  рассчитать элементы информационной матрицы и тем самым найти минимальный эллипсоид рассеяния для эффективных оценок неизвестных параметров  $\lambda$ . Проиллюстрируем подобные расчеты на одном простом примере.

*Пример.* Пусть восстанавливаемое томографическое изображение описывается двумерной гауссовой функцией, зависящей от двух параметров  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ , так что  $f(x, y, \lambda) \rightarrow f(r, \lambda) = \lambda_1 e^{-\lambda_2^2 r^2}$ . В соответствии с (1) [1] находим  $R(s, \varphi, \lambda) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\pi} \exp(-\lambda_2^2 s^2)$ . Определим отношение сигнала к составляющей «белого» шума в плоскости изображения

$$q^0 = \frac{1}{N^0} \iint_{-\infty}^\infty f^2(x, y, \lambda) dx dy = \frac{\pi}{2N^0} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \quad (14)$$

и в плоскости проекции

$$q_0 = \frac{1}{N_0} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty ds R^2(s, \varphi, \lambda) = \frac{\pi^{5/2}}{N_0 \sqrt{2}} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^3}, \quad (15)$$

откуда следует, что при заданном отношении величин  $q^0/q_0 = q$  спектральные плотности составляющих «белого» шума в плоскости изображения и плоскости проекции связаны соотношением

$$N_0/N^0 = q(\pi\sqrt{2}\pi/\lambda_2). \quad (16)$$

Для рассматриваемого случая можно воспользоваться формулой (13). Входящие в нее интегралы равны [4]

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial f(r, \lambda)}{\partial \lambda_1} J_0(\omega r) dr = \int_0^{\infty} r e^{-\lambda_2^2 r^2} J_0(\omega r) dr = \frac{1}{2\lambda_2^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda_2^2}}; \quad (17)$$

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial f(r, \lambda)}{\partial \lambda_2} J_0(\omega r) dr = -2\lambda_2 \lambda_1 \int_0^{\infty} r^3 e^{-\lambda_2^2 r^2} J_0(\omega r) dr = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2^3} e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda_2^2}} \left(1 - \frac{\omega^2}{4\lambda_2^2}\right). \quad (18)$$

В качестве корреляционной функции шума, сопровождающего регистрацию проекций, возьмем ту же функцию, которая использовалась в примерах работы [1] и для которой  $g(\omega) = (N_0/2\pi) \exp(-\omega^2 l^2/2)$ . Подставляя эту функцию в (13), делая замену переменной интегрирования  $x = \omega/\lambda_2$  и учитывая (14)–(18), получаем

$$J_{11} = \frac{q^0}{\lambda_1^2} \int_0^{\infty} \varphi(x) dx; \quad (19)$$

$$J_{22} = \frac{q^0}{\lambda_2^2} \frac{1}{4} \int_0^{\infty} (4 - x^2)^2 \varphi(x) dx; \quad (20)$$

$$J_{12} = J_{21} = -\frac{1}{2} \frac{q^0}{\lambda_1 \lambda_2} \int_0^{\infty} \varphi(x) (4 - x^2) dx, \quad (21)$$

где  $\gamma = l\lambda_2$ ;  $\varphi(x) = x e^{-x^2/2} \left[1 + q \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + e^{-\gamma^2 x^2/2})\right]^{-1}$ .

В случае, когда неизвестен только какой-то один параметр, дисперсия его эффективной оценки равна: для  $\lambda_1$   $\delta_1^2 = 1/J_{11}$ ; для  $\lambda_2$   $\delta_2^2 = 1/J_{22}$ . На рис. 1, 2 представлены зависимости этих дисперсий от параметров  $q$  и  $\gamma$ . Из рисунков видно, что характер зависимостей для обеих дисперсий одинаков: с увеличением  $\gamma$  они уменьшаются, а с увеличением  $q$  — увеличиваются. Параметр  $\gamma$  есть не что иное, как отношение величины  $l$ , пропорциональной радиусу корреляции, к величине  $\tilde{a} = 1/\lambda_2$ , пропорциональной размеру области, в которой сосредоточена функция  $f(r, \lambda)$ . Поэтому первая зависимость свидетельствует о том, что чем меньше радиус корреляции шумовой составляющей, сопровождающей регистрацию про-

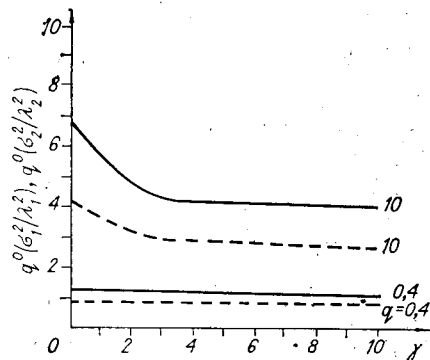


Рис. 1. Зависимости относительных дисперсий эффективных оценок параметров  $\lambda_1$  (сплошные линии) и  $\lambda_2$  (пунктирные) от величины  $\gamma$  при раздельном их измерении для  $q = 0,4; 10$

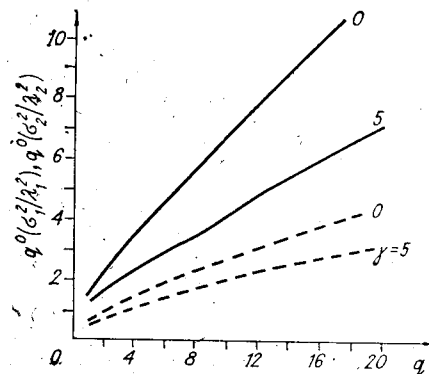


Рис. 2. Зависимости относительных дисперсий эффективных оценок параметров  $\lambda_1$  (сплошные линии) и  $\lambda_2$  (пунктирные) от величины  $q$  при раздельном их измерении для  $\gamma = 0; 5$

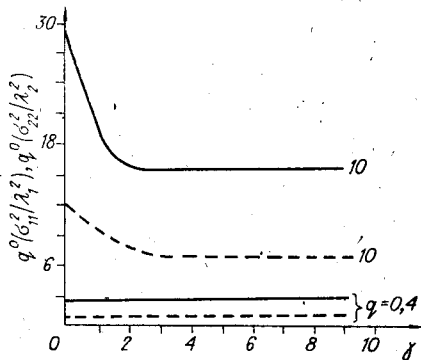


Рис. 3. Зависимости относительных дисперсий эффективных оценок параметров  $\lambda_1$  (сплошные линии) и  $\lambda_2$  (штриховые) от величины  $\gamma$  при совместном их измерении для  $q = 0,4; 10$

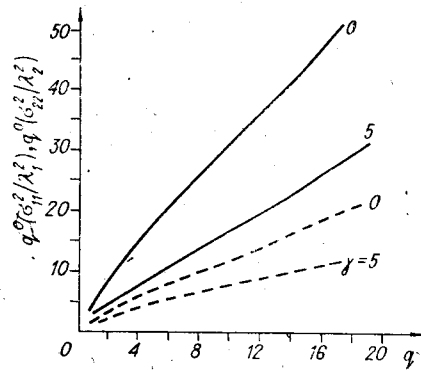


Рис. 4. Зависимости относительных дисперсий эффективных оценок параметров  $\lambda_1$  (сплошные линии) и  $\lambda_2$  (штриховые) от величины  $q$  при совместном их измерении  $\gamma = 0; 5$

екций, тем сильнее она сказывается на ошибках измерения неизвестных параметров.

Для того чтобы интерпретировать вторую зависимость, необходимо обратить внимание на то, что графики построены в относительных единицах:  $q^0 \sigma^2 / \lambda^2$ . Следовательно, увеличение  $q$  фактически означает, что при зафиксированном  $q^0$  уменьшается отношение сигнал — шум  $q_0$ , имевшее место при регистрации проекции. Как видно из рис. 2, это уменьшение проявляется тем резче, чем меньше радиус корреляции шумовых флуктуаций.

В случае, когда неизвестны оба параметра  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , дисперсии их эффективных оценок определяются диагональными элементами корреляционной матрицы [2], которая является обратной к матрице, содержащей элементы  $J_{ij}$ . Обозначая через  $\delta_{11}^2$  и  $\delta_{22}^2$  соответственно дисперсии для параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  находим

$$\delta_{11}^2 = \frac{J_{22}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2} = \frac{\lambda_1^2}{q^0} \frac{1}{D} \int_0^\infty (4 - x^2)^2 \varphi(x) dx, \quad (22)$$

$$\delta_{22}^2 = \frac{J_{11}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2} = \frac{\lambda_2^2}{q^0} \frac{4}{D} \int_0^\infty \varphi(x) dx, \quad (23)$$

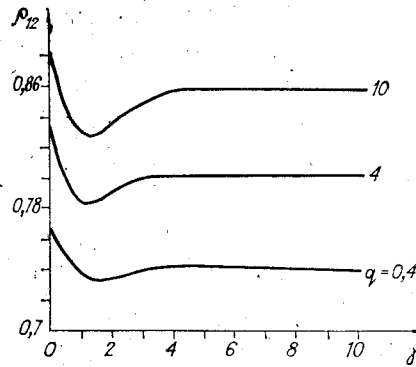
где 
$$D = \int_0^\infty \varphi(x) dx \int_0^\infty (4 - x^2)^2 \varphi(x) dx - \left[ \int_0^\infty \varphi(x) (4 - x^2) dx \right]^2.$$

Коэффициенты корреляции между эффективными оценками параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются выражением

$$\rho_{12} = - \frac{J_{21}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2} \frac{1}{\delta_{11}^2 \delta_{22}^2} = \frac{\int_0^\infty (4 - x^2) \varphi(x) dx}{\sqrt{\int_0^\infty \varphi(x) dx \int_0^\infty (4 - x^2)^2 \varphi(x) dx}}. \quad (24)$$

На рис. 3, 4 представлены зависимости дисперсий  $\delta_{11}^2$  и  $\delta_{22}^2$  от параметров  $q$  и  $\gamma$ . Видно, что характер данных зависимостей полностью аналогичен тем, которые имели место в случае, когда неизвестен был лишь один параметр. Однако количественные значения существенно изменились. Так, если в первом случае при  $q = 10$  и  $\gamma = 0$   $q^0 \frac{\delta_{11}^2}{\lambda_1^2} \approx 7$ , то теперь при тех же

Рис. 5. Зависимость коэффициента корреляции между эффективными оценками параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  от величины  $\gamma$  для  $q = 0,4; 4; 10$



значениях  $q$  и  $\gamma$   $q^0 \frac{\delta_{11}^2}{\lambda_1^2} \approx 30$ . Аналогично вместо  $q^0 \frac{\delta_2^2}{\lambda_2^2} \approx 2,8$  имеем  $q^0 \frac{\delta_{22}^2}{\lambda_2^2} \approx 12$ .

На рис. 5 представлены зависимости коэффициента корреляции (24) от величины  $\gamma$  для трех значений  $q = 0,4; 4; 10$ . Видно, что с ростом  $q$  коэффициент корреляции увеличивается. Зависимость  $\rho_{12}$  от  $\gamma$  более сложная: максимальное значение  $\rho_{12}$  достигается при  $\delta$ -коррелированных шумах; с ростом радиуса корреляции шумовых флуктуаций величина  $\rho_{12}$  уменьшается до тех пор, пока  $l$  не становится одного порядка с  $1/\lambda_2$ , после чего опять возрастает, асимптотически стремясь к некоторому значению, меньшему первоначальному и зависящему от величины  $q$ .

Рассмотренный пример является сравнительно простым, и расчеты, которые в общем случае должны проводиться по формуле (12), оказываются более сложными. Однако данный пример наглядно иллюстрирует сам характер расчетов, который сохраняется для любых ситуаций, требующих анализа потенциально достижимой точности оценки неизвестных параметров в томографическом процессе.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем равенство (8). Для этого в равенство (7) подставим (4) и учтем, что  $q_\alpha(\cdot)$  определяется (3) [1]. Тогда после интегрирования по  $x$  и  $y$  получаем

$$\begin{aligned} \tau_\alpha^0(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = & \int_0^\pi d\varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 w_\alpha(t_1) w_\alpha(t_2) |t_1| |t_2| \times \\ & \times \exp\{-i2\pi[(x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1)t_1 + (x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2)t_2]\} \times \\ & \times \delta(t_1 \cos \varphi_1 + t_2 \cos \varphi_2) \delta(t_1 \sin \varphi_1 + t_2 \sin \varphi_2). \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

Воспользуемся известным равенством, которому удовлетворяет  $\delta$ -функция

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right|_{x=x_i}}, \quad (\text{П2})$$

где  $x_i$  — простые корни уравнения  $\varphi(x) = 0$ , и представим первую  $\delta$ -функцию в виде

$$\delta(t_1 \cos \varphi_1 + t_2 \cos \varphi_2) = (1/|\cos \varphi_2|) \delta(t_2 - t_{20}), \quad (\text{П3})$$

где

$$t_{20} = -t_1 \cos \varphi_1 / \cos \varphi_2.$$

Подставим (П3) в (П1) и проинтегрируем по  $t_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha}^0(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = & \int_0^{\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} d\varphi_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 w_{\alpha}(t_1) w_{\alpha}\left(-t_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}\right) |t_1|^2 \frac{|\cos \varphi_1|}{|\cos \varphi_2|} \times \\ & \times \exp \left\{ -2\pi i \left[ (x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1) t_1 - t_1 (x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2) \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \right] \right\} \times \\ & \times \delta \left( t_1 \sin \varphi_1 - t_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \sin \varphi_2 \right). \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

Оставшаяся  $\delta$ -функция эквивалентна  $\delta(\varphi_2 - \varphi_1)/|t_1|$ . Интегрируя (П4) по  $\varphi_2$  и учитывая, что  $w_{\alpha}(t) = w_{\alpha}(-t)$ , получаем

$$\tau_{\alpha}^0(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dt w_{\alpha}^2(t) |t| \exp \{ i2\pi t [(x_1 - x_2) \cos \varphi + (y_1 - y_2) \sin \varphi] \}. \quad (\text{П5})$$

Для подынтегральной функции область интегрирования  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ,  $-\infty \leq t \leq \infty$  эквивалентна области  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq t \leq \infty$ . С учетом этого замечания равенство (П5) тождественно равенству (8).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев В. Н., Троицкий И. Н., Устинов Н. Д. Потенциальная точность томографического процесса. Ч. I. Анализ флуктуационных характеристик аддитивного фона в восстановленном изображении. Функционал плотности вероятностей // Автоматизация. — 1986. — № 1.
2. Уилкс С. Математическая статистика. — М.: Наука, 1967.
3. Луитт Р. М. Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований // ТИИЭР. — 1983. — Т. 71, № 3.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 22 ноября 1984 г.

УДК 621.391

И. Н. ЯВОРСКИЙ

(Львов)

### ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ОЦЕНОК ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРИОДИЧЕСКИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Вероятностные модели в виде периодически коррелированных случайных процессов (ПКСП) отражают характерные особенности весьма широкого круга сигналов и явлений с ритмической структурой, обладающих определенной повторяемостью свойств во времени (пространстве) [1—4]. Это обуславливает практическую важность разработки методов оценивания вероятностных характеристик этого класса процессов, изучение статистических свойств возможных оценок. Один из методов определения оценок моментных функций ПКСП основан на усреднении отсчетов, которые берутся через интервалы времени, кратные периоду коррелированности процесса [3]. При этом оценки характеристик представляют собой ряд дискретных значений на периоде их изменения. Промежуточные значения оценок находятся по полученным дискретам