

Первая причина приводит к неравномерности распределения интенсивности звука по апертуре АОД, размытию дифракционного пятна и уменьшению интенсивности звука при удалении от преобразователя. Если принять за максимально допустимую неравномерность в распределении интенсивности звука 3 дБ (что, грубо говоря, соответствует уменьшению интенсивности дифрагированного света по апертуре АОД в 2 раза), а апертуру — 0,5 мм, то предельное значение затухания звука составит ~ 60 дБ/см. Такое затухание будет наблюдаться при частоте ~ 550 МГц (см., например, [5]). Ее и следует принять за f_{\max} выбранного диапазона. При этом средняя частота определяется выбранной полосой Δf .

Вторая причина приводит к заметному увеличению размера световоупровода вдоль направления распространения света и уменьшению акустооптической добротности M_2 за счет увеличения фазовой скорости звука и уменьшения эффективной фотоупругой постоянной при отклонении k_z от оси [110]. Так, например, при средней частоте АОД 375 МГц угол $\alpha = 23^\circ$. При этом угол между $v_{\text{гр}}$ и [110] составит $\sim 78^\circ$ [6], а фазовая скорость возрастет до $1,0 \cdot 10^3$ м/с (против $v_{\text{ф}} \approx 0,62 \cdot 10^3$ м/с при $\alpha = 0$). По нашим оценкам, это приводит к снижению акустооптической добротности до $M_2 \approx 177 \cdot 10^{-18}$ с³/г. Тем не менее эти изменения нельзя считать принципиальными, так как угол между k_z и $v_{\text{гр}}$ быстро увеличивается лишь при $\alpha \leq 10^\circ$, а затем возрастает сравнительно медленно. Действительно, при $\alpha = 6^\circ$ угол между k_z и $v_{\text{гр}}$ составляет уже $\sim 45^\circ$. При $\alpha = 23^\circ$ он возрастает примерно до 55° , т. е. всего на 10° . Снижение M_2 с увеличением угла α оказывается весьма заметным. Тем не менее M_2 остается еще достаточно большим, чтобы не накладывать ограничений на возможности использования этого материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов С. В., Большева Т. А. Расчет основных параметров акустооптического дефлектора на TeO_2 // Автометрия.— 1985.— № 5.
2. Богданов С. В. Условия возникновения повторной дифракции и ее влияние на рабочую полосу акустооптического дефлектора // Автометрия.— 1985.— № 5.
3. Тищенко Ю. Н., Трубецкой А. В. Некоторые вопросы создания и исследования акустооптического дефлектора на монокристалле TeO_2 // Автометрия.— 1979.— № 1.
4. Yano T., Kawabuchi M., Fukumoto A., Watanabe A. TeO_2 anisotropic Bragg light deflector without midband degeneracy // Appl. Phys. Lett.— 1975.— V. 26, N 12.— P. 689—691.
5. Антонов С. Н., Кузнецов Е. Ф., Миргородский В. И., Проклов В. В. Акустооптические исследования распространения медленной акустической волны в TeO_2 // Акуст. журн.— 1982.— Т. 28, № 4.
6. Ohmachi Y., Uchida N., Niizeki N. Acoustic wave propagation in TeO_2 single crystal // JOSA.— 1972.— V. 51, N 1.— P. 164—168.

Поступила в редакцию 14 апреля 1986 г.

УДК 681.51 : 007.5

М. Я. ЖИТОМИРСКИЙ, В. М. ЛИСКИН, А. А. МАЙСТРЕНКО,
В. П. МАШТАЛИР, Е. П. ПУТЯТИН

(Харьков)

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ, СОГЛАСОВАННЫХ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

1. Одно из интенсивно развиваемых направлений обработки и интерпретации визуальной информации — анализ и распознавание изображений в условиях мешающих воздействий, и в частности геометрических преобразований. Подобные трансформации видеок кадров обусловлены изменением взаимного положения и (или) ориентации датчика зрительной информации и наблюдаемого объекта, дисторсией объектива, несо-

гласованностью строчной и кадровой разверток сканерного устройства.

Традиционно используемыми и достаточно адекватными реальным искажениям видеoinформации являются модели, в основу которых положены группы геометрических преобразований плоскости. В настоящее время существует ряд алгоритмов анализа изображений при действии различных групп. Однако область применения этих алгоритмов ограничена простыми (в основном линейными) видами геометрических трансформаций. Кроме того, как правило, либо априорно предполагается, что известна группа, относительно действия которой эквивалентны видеокадры, либо неизвестные параметры не определяются, а устанавливается лишь соответствие изображений. Структура известных алгоритмов (за исключением корреляционных) различна для разных групп преобразований, что приводит к необходимости создания большого числа вычислительных устройств.

Работа посвящена разработке универсального метода построения функционалов, позволяющих при всевозможных однопараметрических преобразованиях не только определять коэффициенты геометрических трансформаций, но и устанавливать их вид. При анализе временных последовательностей изображений, наряду с обычными геометрическими трансформациями, могут использоваться произвольные группы, являющиеся на некоторых промежутках времени однопараметрическими с параметром время.

Пусть ограниченная замкнутая область $D \subset \mathbb{R}^2$ является полем зрения видеодатчика. Изображения описываются финитными функциями распределения яркостей $B(x, y)$, $B(x, y) = 0$ при $(x, y) \notin D$. Пусть $B_0(x, y)$ — эталонное изображение наблюдаемого объекта (например, выделенное из фона в некоторый начальный момент времени); $B_t(x, y)$ — текущее изображение; $\lambda(x, y)$ — характеристическая функция, «отделяющая» функцию $B_0(x, y)$ от фона $\Phi(x, y)$:

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 1; & \{V(x, y) \in D : B_0(x, y) \neq 0\}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть также $G = \{g_t\}$ (здесь и далее $t \in \mathbb{R}^1$) — группа Ли преобразований плоскости

$$g_t: \begin{cases} x \rightarrow \varphi_1(x, y, t); \\ y \rightarrow \varphi_2(x, y, t); \end{cases} \det \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)} \right) \neq 0.$$

При этом будем считать, что преобразования не выводят наблюдаемое изображение за пределы поля зрения D

$$\{V(x, y) \in D : B_0(x, y) \neq 0 \Rightarrow (\varphi_1(x, y, t), \varphi_2(x, y, t)) \in D\}. \quad (1)$$

Через $\eta(x, y)$ обозначим аддитивный случайный шум, а результат применения g_t к $B(x, y)$ через $g_t \circ B(x, y)$. Тогда временная последовательность изображений при неизменном ракурсе наблюдаемого объекта и без учета его заслонений представляется в виде

$$B_t(x, y) = \{g_t \circ \lambda(x, y)\} \{g_t \circ B_0(x, y)\} + \{1 - g_t \circ \lambda(x, y)\} \Phi(x, y) + \eta(x, y).$$

В дальнейшем будем считать, что функция $g_t \circ \lambda(x, y)$ известна. Тем самым в каждый момент времени выделено изображение наблюдаемого объекта и можно положить $\Phi(x, y) \equiv 0$. Пренебрегая влиянием помех ($\eta(x, y) \equiv 0$), приходим к анализу групповой модели геометрических преобразований

$$B_t(x, y) = B_0(\varphi_1(x, y, t), \varphi_2(x, y, t)).$$

Поскольку в реальных условиях всегда есть аддитивный шум, метод обработки видеок кадров должен обладать достаточной помехоустойчивостью.

2. Один из основных подходов к решению задач, указанных в п. 1, — нахождение и использование специальных функционалов, в некотором

смысле согласованных с действием группы преобразований. Точное определение будет дано ниже. Рассмотрим иллюстрирующий пример для случая действия группы простейших преобразований плоскости:

$g_t: \begin{cases} x \rightarrow x + t, \\ y \rightarrow y, \end{cases}$ где t — параметр преобразования. Известны [1, 2] следующие функционалы:

$$W_1[B(x, y)] = \iint_D B(x, y) dx dy;$$

$$W_2[B(x, y)] = \iint_D B(x, y) e^{kx} dx dy, k \in \mathbb{C};$$

$$W_3[B(x, y)] = \iint_D B(x, y) x dx dy.$$

Согласованность функционалов с действием группы состоит в том, что для любого изображения и параметра сдвига t , удовлетворяющего условию (1), выполнены равенства

$$W_1[B_t(x, y)] = W_1[B_0(x + t, y)] = W_1[B_0(x, y)];$$

$$W_2[B_t(x, y)] = W_2[B_0(x + t, y)] = e^{-kt} W_2[B_0(x, y)];$$

$$W_3[B_t(x, y)] = W_3[B_0(x + t, y)] = W_3[B_0(x, y)] - t W_1[B_0(x, y)].$$

Тем самым с помощью функционала W_1 осуществляется проверка эквивалентности двух изображений, функционалы W_2 и W_3 позволяют определить параметры сдвига, связывающего эквивалентные изображения.

Аналогичные функционалы найдены и для других основных однопараметрических подгрупп группы аффинных преобразований [3, 4]. Однако даже в случае линейных преобразований отсутствует общая методика нахождения необходимых функционалов для любой однопараметрической группы.

В работе предложен универсальный метод построения функционалов, согласованных с действием любой (в том числе нелинейной) однопараметрической группы Ли. Согласованность понимается в смысле следующего определения.

Определение. Пусть M — пространство изображений. Набор функционалов $\Phi_1: M \rightarrow \mathbb{R}^1, \dots, \Phi_n: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется согласованным с действием группы $G = \{g_t\}, t \in \mathbb{R}^1$, если существуют гладкие функции $h_1(t), \dots, h_n(t)$ такие, что для любого $B(x, y) \in M$ и $t \in \mathbb{R}^1$ выполнено

$$\Phi_i[g_t \circ B] = h_i(t) \Phi_i[B] + \dots + h_n(t) \Phi_n[B]. \quad (2)$$

Например, для указанной группы сдвигов функционалы W_1 и W_2 согласованы с действием группы (соответственно $h_1(t) \equiv 1, h_2(t) = e^{-kt}$). Кроме того, с действием группы согласован набор $\{W_3, W_1\}$, при этом $h_1(t) \equiv 1, h_2(t) = -t$.

Заметим, что равенство (2) дает уравнение для нахождения параметра преобразования, если только существует $i: h_i(t) \neq \text{const}$. Если же все функции $h_i(t)$ не зависят от t , то равенство (2) позволяет проверять эквивалентность двух изображений. В случае $n = 1, h_1(t) \equiv 1$ функционал Φ_1 является инвариантным.

В работе показан способ построения согласованных функционалов при $n = 1$ и $n = 2$.

3. Алгебру Ли группы $G = \{g_t\}$ обозначим через $L(G)$. Если G — однопараметрическая группа, то $L(G)$ порождена одним элементом. Пусть $\tau = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g_t \in L(G)$ — образующая алгебры Ли; $\exp: L(G) \rightarrow G$ — экспоненциальное отображение. Равенство $\exp t\tau = g_t$, вообще говоря, не верно. Однако легко показать, что имеет место равенство $\exp t\tau = g_{\alpha t}$, где α — некоторое вещественное число. Последнее свидетельствует о том, что всегда возможна такая параметризация элементов

группы, при которой равенство $g_t = \exp t\tau$ выполняется для всех t . В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые однопараметрические группы параметризованы канонически, т. е. удовлетворено последнее условие. Приведем два примера групп преобразований и их алгебр Ли. В п. 8 они будут использованы для иллюстрации метода нахождения согласованных функционалов.

Для группы Ли

$$g_t : \begin{cases} x \rightarrow \frac{x}{ty+1}, \\ y \rightarrow \frac{y}{ty+1} \end{cases}$$

алгебра Ли состоит из векторных полей $k\tau$, $k \in \mathbb{R}^1$, $\tau = -xy \partial x - y^2 \partial y$. При преобразованиях

$$g_t : \begin{cases} x \rightarrow xe^{ty}, \\ y \rightarrow y \end{cases}$$

алгебра Ли состоит из векторных полей $k\tau$, $k \in \mathbb{R}^1$, $\tau = xy \partial x$.

4. Выясним, какими могут быть функции $h_i(t)$ в определении п. 2. Покажем, что их структура не зависит от вида анализируемых преобразований, и найдем наиболее простые функции $h_i(t)$, одинаковые для всех однопараметрических групп. Пусть $n=1$, тогда должно быть выполнено равенство

$$\Phi_1[g_t \circ B] = h_1(t) \Phi_1[B]. \quad (3)$$

Подставляя в (3) $2t$ вместо t , получаем

$$\Phi_1[g_{2t} \circ B] = h_1(2t) \Phi_1[B]. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\Phi_1[g_{2t} \circ B] = \Phi_1[g_t \circ (g_t \circ B)] = h_1^2(t) \Phi_1[B]. \quad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), приходим к уравнению $h_1(2t) = h_1^2(t)$, $h_1(0) = 1$. Наиболее простое решение полученного функционального уравнения — $h_1(t) = e^{ct}$. Если $c=0$, то $h_1(t) \equiv 1$, в этом случае Φ_1 — инвариантный функционал.

При $n=2$ имеет место равенство

$$\Phi_1[g_t \circ B] = h_1(t) \Phi_1[B] + h_2(t) \Phi_2[B]. \quad (6)$$

Подставляя в (6) $2t$ вместо t , находим

$$\Phi_1[g_{2t} \circ B] = h_1(2t) \Phi_1[B] + h_2(2t) \Phi_2[B]. \quad (7)$$

Из (6) выводим аналогичное (5) равенство

$$\begin{aligned} \Phi_1[g_{2t} \circ B] &= h_1(t) \Phi_1[g_t \circ B] + h_2(t) \Phi_2[g_t \circ B] = h_1^2(t) \Phi_1[B] + \\ &+ h_1(t) h_2(t) \Phi_2[B] + h_2(t) \Phi_2[g_t \circ B]. \end{aligned} \quad (8)$$

Приравнявая коэффициенты при $\Phi_1[B]$ в (7) и (8), получаем функциональное уравнение, рассмотренное выше. Наиболее простое решение его — $h_1(t) \equiv 1$. Для выполнения (8) необходимо, чтобы

$$\Phi_2[g_t \circ B] = \left\{ \frac{h_2(2t)}{h_2(t)} - 1 \right\} \Phi_2[B]. \quad (9)$$

Подставим в (9) $2t$ вместо t . Пусть $\xi(t) = \frac{h_2(2t)}{h_2(t)} - 1$. Выкладки, аналогичные предыдущим, показывают, что $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению $\xi^2(t) = \xi(2t)$. Решение $\xi(t) \equiv 0$ не представляет интереса, так как при этом $h_2(t) = \text{const}$, и, следовательно, $h_2(t) \equiv 0$, поскольку из (6) вытекает, что $h_2(0) = 0$. Данный случай уже рассматривался при $n=1$. Поэтому положим $\xi(t) = 1$, тогда $h_2(t) = ct$ при некотором c .

Итак, выяснено, какими могут быть функции $h_i(t)$ в определении п. 2: при $n=1$ $h_1(t) = e^{ct}$ (в частности, $h_1(t) \equiv 1$), при $n=2$ $h_1(t) \equiv 1$, $h_2(t) = ct$. Число c может принимать не только действительное, но и комплексное значение.

Замечание. При $n=2$ используются и другие решения уравнения $\xi^2(t) = \xi(2t)$. Например, можно положить $h_1(t) = e^t$. Но тогда для $h_2(t)$ получается функциональное уравнение, которое явно не решается. Значит, такая возможность представляет меньший интерес для практического применения.

5. Перейдем теперь к поиску самих функционалов, фигурирующих в определении п. 2. При $n=1$, $h_1(t) \equiv 1$ необходимо найти функционал Φ такой, что

$$\Phi[g_t \circ B] = \Phi[B]. \quad (10)$$

При $n=1$, $h_1(t) = e^{ct}$, $c \neq 0$ (этот случай рассмотрим отдельно, так как именно при $c \neq 0$ получаем функционал, позволяющий определить неизвестный параметр преобразования) функционал Φ должен удовлетворять условию

$$\Phi[g_t \circ B] = e^{ct} \Phi[B]. \quad (11)$$

Наконец, при $n=2$, $h_1(t) \equiv 1$, $h_2(t) = ct$ должно быть выполнено

$$\Phi_1[g_t \circ B] = \Phi_1[B] + ct\Phi_2[B]. \quad (12)$$

Согласованные функционалы будем искать в виде

$$\Phi[B(x, y)] = \iint_D B(x, y) \rho(x, y) dx dy, \quad (13)$$

где $\rho(x, y) \in L_2(D)$. Кроме того, естественно считать, что $B(x, y) \in L_2(D)$. Выбор такой структуры функционалов объясняется следующими причинами. Во-первых, для них существует широкий круг просто реализуемых вычислительных моделей в виде численных кубатур. Во-вторых, интегральный вид допускает распараллеливание вычислений по отдельным фрагментам видеокладов. В-третьих, интегральные суммы обеспечивают достаточную помехоустойчивость к случайному аддитивному шуму. Наконец, выражение (13) — общий вид линейных функционалов в классе рассматриваемых функций. Отметим, что подобный вид наиболее удобен для построения согласованных функционалов. Пусть $w = \rho(x, y) dx \wedge dy$ — внешняя дифференциальная 2-форма. Функционал (13) представим как

$$\Phi_w[B(x, y)] = \iint_D B(x, y) w.$$

Через $g_t \circ w$ обозначим результаты действия элементов g_t группы G на форму w . Следующие утверждения проверяются непосредственно:

а) функционал Φ_w удовлетворяет условию (10) тогда и только тогда, когда

$$g_t \circ w = w; \quad (14)$$

б) функционал Φ_w удовлетворяет условию (11) тогда и только тогда, когда

$$g_t \circ w = e^{-ct} w; \quad (15)$$

в) функционалы Φ_{w_1} и Φ_{w_2} удовлетворяют условию (12) тогда и только тогда, когда

$$g_t \circ w_1 = w_1 - ct w_2. \quad (16)$$

Таким образом, вопрос о нахождении функционалов, согласованных с действием группы Ли, сводится к поиску дифференциальных 2-форм, удовлетворяющих условиям (14)–(16). Уравнения (14)–(16) нелинейны, и их нельзя решить непосредственно. Однако каждое из них связано с действием группы, что позволяет, применив технику групп и алгебр Ли, найти эквивалентные им линейные уравнения.

6. Пусть L_w — инфинитезимальный оператор из алгебры Ли $L(G)$ в пространстве внешних дифференциальных 2-форм:

$$L_w \psi = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp t\psi \circ w).$$

Теорема. Уравнения (14) — (16) равносильны (соответственно) уравнениям (17) — (19):

$$L_w \tau = 0; \quad (17)$$

$$L_w \tau = -cw; \quad (18)$$

$$\begin{cases} L_{w_1} \tau = -cw_2; \\ L_{w_2} \tau = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Доказательство. Равносильность уравнений (14) и (17) следует из следующего факта [5]: стационарная группа любого элемента (в нашем случае 2-формы w) есть экспонента от стационарной алгебры. Подробнее, если G_w — множество преобразований, сохраняющих форму w , L_w — множество элементов ψ алгебры Ли таких, что $L_w \psi = 0$, то G_w имеет структуру группы, L_w — структуры алгебры и $G_w = \exp L_w$.

Докажем равносильность уравнений (15) и (18). Пусть выполнено (15). Дифференцируя (15) по t и полагая $t=0$, получаем равенство (18). Пусть теперь выполнено (18). Рассмотрим функцию $f(t) = g_t \circ w - e^{-ct} w$. Найдем $f(t+s)$ при любых t и s :

$$f(t+s) = g_{t+s} \circ w - e^{-c(t+s)} w = g_t \circ (g_s \circ w) - e^{-c(t+s)} w. \quad (20)$$

Дифференцируя (20) по t и полагая $t=0$, находим

$$f'(s) = L_{g_s \circ w} \tau + ce^{-cs} w. \quad (21)$$

Заметим, что из (18) следует $L_{g_s \circ w} \tau = -cg_s \circ w$, так что из (21) вытекает

$$f'(s) = -cg_s \circ w + ce^{-cs} w = -cf(s). \quad (22)$$

Поскольку $f(0) = 0$, то из (22) получим $f(s) \equiv 0$, что и требуется.

Докажем теперь равносильность уравнения (16) и системы (19). Пусть выполнено (16). Дифференцированием обеих частей (16) и подстановкой $t=0$ убеждаемся в выполнении равенства $L_{w_1} \tau = -cw_2$. Введем функцию $\gamma(t) = g_t \circ w_1 - w_1 + ctw_2$. Заметим, что $\gamma(t+s) = g_t \circ (g_s \circ w_1) - w_1 + c(t+s)w_2$. Отсюда $\gamma'(s) = L_{g_s \circ w_1} \tau + cw_2 = -cg_s \circ w_2 + cw_2 = -c(g_s \circ w_2 - w_2)$. Проведенная выкладка аналогична сделанной выше. Поскольку $\gamma(s) \equiv 0$, для любых s $g_s \circ w_2 = w_2$, откуда следует, что $L_{w_2} \tau = 0$.

Остается доказать, что из (19) вытекает (16). Действительно, если имеет место (19), то $\gamma'(s) = -c(g_s \circ w_2 - w_2) = 0$. Теорема доказана.

Предположим, что известно решение (19) при $c=1$: w_1 и w_2 . Тогда формы cw_1 и w_2 дают решение при любом c , так что в (12) и (16) можно ограничиться случаем $c=1$.

7. Укажем явный вид оператора L_w . Для этого разложим выражение $\exp t\psi \circ w$ в ряд по t и вычислим коэффициенты при первой степени t . Равносильная операция — вычислить линейную часть в разложении $(id + t\psi) \circ w$. Пусть $w = \rho(x, y) dx \wedge dy$, $\psi = \psi_1(x, y) \partial x + \psi_2(x, y) \partial y$ — векторное поле. Несложные выкладки показывают, что

$$L_w \psi = (\langle \text{grad } \rho, \psi \rangle + \rho \text{ div } \psi) dx \wedge dy, \quad (23)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Пользуясь (23), уравнения (17) и (18) представим в следующем виде:

$$\psi_1(x, y) \frac{\partial \rho(x, y)}{\partial x} + \psi_2(x, y) \frac{\partial \rho(x, y)}{\partial y} + \rho(x, y) \left[\frac{\partial \psi_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2(x, y)}{\partial y} \right] = 0; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) \frac{\partial \rho(x, y)}{\partial x} + \psi_2(x, y) \frac{\partial \rho(x, y)}{\partial y} + \rho(x, y) \left[\frac{\partial \psi_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2(x, y)}{\partial y} \right] + \\ + c\rho(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Для нахождения 2-формы $w_2 = \xi(x, y)dx \wedge dy$, удовлетворяющей условиям (19), достаточно решить (24) относительно неизвестной функции $\xi(x, y)$. Для нахождения формы $w_1 = \rho(x, y)dx \wedge dy$, удовлетворяющей (19), достаточно решить уравнение

$$\psi_1(x, y) \frac{\partial \rho(x, y)}{\partial x} + \psi_2(x, y) \frac{\partial \rho(x, y)}{\partial y} + \rho(x, y) \left[\frac{\partial \psi_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2(x, y)}{\partial y} \right] + \xi(x, y) = 0. \quad (26)$$

Уравнения (24) — (26), к решению которых сведена задача построения согласованных с геометрическими преобразованиями изображений функционалов, являются линейными уравнениями в частных производных первого порядка. Методом характеристик [6] они сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Рассмотрим три системы соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \psi_1(x, y); \\ \frac{dy}{dt} &= \psi_2(x, y); \\ \frac{dz}{dt} &= - \left[\frac{\partial \psi_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2(x, y)}{\partial y} \right] z; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \psi_1(x, y); \\ \frac{dy}{dt} &= \psi_2(x, y); \\ \frac{dz}{dt} &= - \left[\frac{\partial \psi_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2(x, y)}{\partial y} + c \right] z; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \psi_1(x, y); \\ \frac{dy}{dt} &= \psi_2(x, y); \\ \frac{dz}{dt} &= - \left[\frac{\partial \psi_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2(x, y)}{\partial y} \right] z - \xi(x, y). \end{aligned} \quad (29)$$

Пусть $H_1(x, y, z) = C_1$, $H_2(x, y, z) = C_2$ ($C_1, C_2 = \text{const}$) — произвольные первые интегралы систем (27) и (28) соответственно. Если $\frac{\partial H_1}{\partial z} \neq 0$ и $\frac{\partial H_2}{\partial z} \neq 0$ в поле зрения D , то в этой области уравнения $H_1(x, y, z) = C_1$, $H_2(x, y, z) = C_2$ можно разрешить относительно z : $z = \rho(x, y)$. Отметим, что уравнения (24) и (25) имеют бесконечно много решений, среди которых будем выбирать простейшие с точки зрения программной или аппаратной реализации.

Для решения (26) необходимо сначала найти первый интеграл (27) $H_1(x, y, z) = C_1$, разрешить уравнение $H_1(x, y, z) = C_1$ относительно z : $z = \xi(x, y)$. Затем следует найти первый интеграл (29): $H_3(x, y, z) = C_3$, разрешить уравнение $H_3(x, y, z) = C_3$ относительно z : $z = \rho(x, y)$. Тогда формы $w_1 = \rho(x, y)dx \wedge dy$ и $w_2 = \xi(x, y)dx \wedge dy$ удовлетворяют (19), а пара функционалов Φ_{w_1} и Φ_{w_2} согласована с действием группы.

8. Для иллюстрации предложенного метода получим согласованные с действием групп геометрических преобразований функционалы на примерах, введенных в п. 3.

Поскольку образующая алгебры Ли группы

$$g_t: \begin{cases} x \rightarrow \frac{x}{ty+1}; \\ y \rightarrow \frac{y}{ty+1} \end{cases}$$

равна (xy, y^2) , то $\psi_1(x, y) = xy$, $\psi_2(x, y) = y^2$. Для нахождения инвариантного функционала рассмотрим систему (27):

$$\frac{dx}{dt} = xy; \quad \frac{dy}{dt} = y^2; \quad \frac{dz}{dt} = -3yz. \quad (30)$$

Из (30) получаем $\frac{dz}{dy} = -\frac{3z}{y}$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{3z}{x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, что позволяет найти первые интегралы: $zy^3 = C_1$, $zx^3 = C_2$, $y/x = C_3$. Последний интеграл не содержит z , поэтому его рассматривать не будем. Разрешая относительно z два первых интеграла, выводим: $\rho(x, y) = C_1/y^3$, $\rho(x, y) = C_2/x^3$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Итак, найдены инвариантные функционалы

$$\begin{aligned} \Phi [B(x, y)] &= \iint_D B(x, y) \frac{1}{x^3} dx dy; \\ \Phi [B(x, y)] &= \iint_D B(x, y) \frac{1}{y^3} dx dy. \end{aligned} \quad (31)$$

Для нахождения функционала, удовлетворяющего условию (11), рассмотрим систему (28) при указанных функциях $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$:

$$\frac{dx}{dt} = xy; \quad \frac{dy}{dt} = y^2; \quad \frac{dz}{dt} = (-3y - c)z. \quad (32)$$

Из системы (32) следует $\frac{dz}{dy} = \frac{-3y - c}{y^2} z$, откуда $z = (\exp(c/y))/y^3$. Тем самым один из возможных функционалов, согласованных с действием рассматриваемой группы в смысле равенства (11), имеет вид

$$\Phi [B(x, y)] = \iint_D \frac{B(x, y) e^{c/y}}{y^3} dx dy. \quad (33)$$

Наконец, найдем функционалы Φ_1 и Φ_2 , согласованные с действием группы в смысле равенства (12). Форма w_2 , удовлетворяющая второму условию (19), уже найдена, например $w_2 = (dx \wedge dy)/y^3$. Остается решить уравнение (26) при $\xi(x, y) = 1/y^3$. Для этого рассмотрим (29) с указанными $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$, $\xi(x, y)$:

$$\frac{dx}{dt} = xy; \quad \frac{dy}{dt} = y^2; \quad \frac{dz}{dt} = -3yz - \frac{1}{y^3}. \quad (34)$$

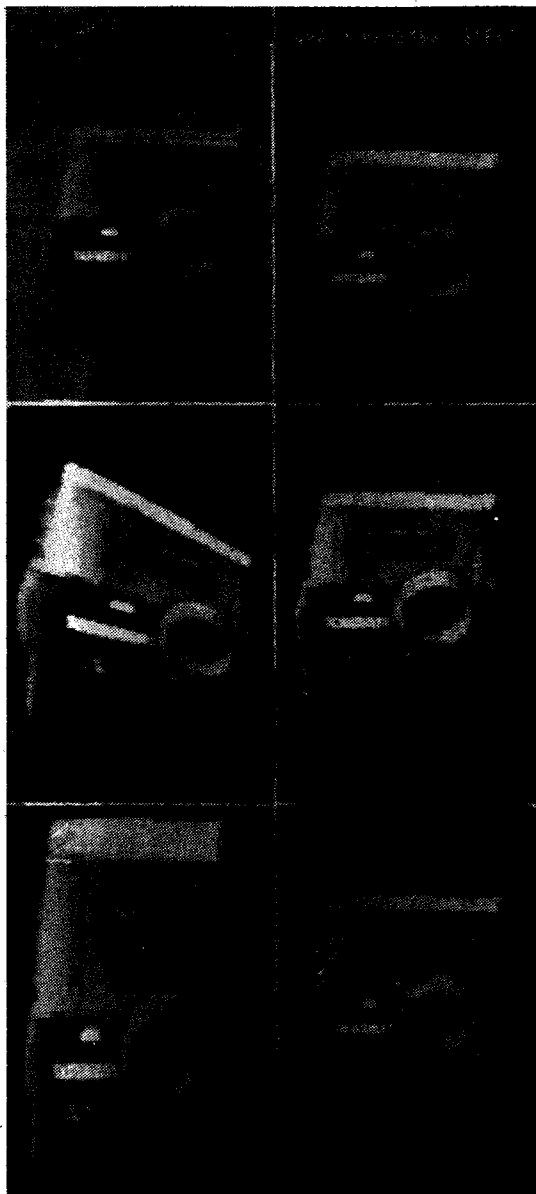
Из (34) получаем уравнение $\frac{dz}{dy} = \frac{-3yz - \frac{1}{y^3}}{y^2}$. Решая его, находим $z = 1/y^4$, т. е. $\rho(x, y) = 1/y^4$. Тогда пара функционалов Φ_1 , Φ_2 , согласованных с действием группы, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_1 [B(x, y)] &= \iint_D B(x, y) \frac{1}{y^4} dx dy; \\ \Phi_2 [B(x, y)] &= \iint_D B(x, y) \frac{1}{y^3} dx dy. \end{aligned} \quad (35)$$

Обратимся теперь к другой группе преобразований, указанной в п. 3: $\psi_1(x, y) = xy$, $\psi_2(x, y) = 0$. Для нахождения инвариантного функционала, необходимо интегрировать систему (27) при указанных $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$:

$$\frac{dx}{dt} = xy; \quad \frac{dy}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = -yz. \quad (36)$$

Простейший интеграл (36) $y = C_1$ не удовлетворяет условию, указанному в конце п. 7 (не содержит z). Важен другой интеграл: $xz = C_2$, позволяющий получить решение уравнения (24) $\rho(x, y) = C_2/x$ ($C_2 =$



произвольная постоянная) и инвариантный функционал

$$\Phi [B(x, y)] = \int_D \frac{B(x, y)}{x} dx dy. \quad (37)$$

Для нахождения функционала, удовлетворяющего (11), рассмотрим систему (28) при указанных $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xy; & \frac{dy}{dt} &= 0; \\ \frac{dz}{dt} &= (-y - c)z. \end{aligned} \quad (38)$$

Система (38) имеет первый интеграл $z - x^{(c/y)-1} = 0$. Функционал, удовлетворяющий равенству (11), запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi [B(x, y)] &= \\ &= \int_D B(x, y) x^{(c/y)-1} dx dy. \end{aligned} \quad (39)$$

Найдем теперь пару функционалов, удовлетворяющих условиям (12). Положив $\xi(x, y) = 1/x$, получим $\rho(x, y) = \ln x / (xy)$. При этом согласованные функционалы выразятся как

$$\begin{aligned} \Phi_1 [B(x, y)] &= \\ &= \int_D \frac{B(x, y) \ln x}{xy} dx dy; \end{aligned} \quad (40)$$

$$\Phi_2 [B(x, y)] = \int_D \frac{B(x, y)}{x} dx dy.$$

Таким образом, функционалы (31), (33) и пара

(35) согласованы с действием первой группы п. 3, функционалы (37), (39) и пара (40) — с действием второй группы.

Фотоиллюстрации использования согласованных функционалов при анализе изображений в условиях действия рассмотренных выше однопараметрических групп Ли приведены на рисунке. Показаны исходное изображение, изображение анализируемого объекта, выделенное из фона в интерактивном режиме ($\Phi(x, y) \equiv 0$), функции распределения яркостей, подвергнутые геометрическим трансформациям, результаты компенсации этих трансформаций.

Обработка видеокладов осуществлялась на базе созданной в Харьковском институте радиоэлектроники микропроцессорной системы анализа и интерпретации визуальной информации. Система сопряжена с универсальными ЭВМ серий ЕС и СМ. В экспериментах изображения проквантованы на 64 уровня, а поле зрения D имеет 512×512 дискретных отсчетов.

В заключение подчеркнем, что эффективность применения в реальных задачах предложенных согласованных функционалов в значитель-

ной степени определяется качеством выделения изображений объектов из фона. Тем не менее универсальный метод построения таких функционалов обеспечивает надежную обработку изображений как при неизвестных параметрах геометрических трансформаций, так и при неизвестном виде группы преобразований плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hu M.-K. Visual pattern recognition by moment invariants // IRE Trans. on Informational Theory.— 1968.— V. IT-8, N 2.— P. 179—187.
2. Путьгин Е. П., Лопатченко Б. Н., Левиков В. Б., Абрамов О. М. Автоматическая 1978.
3. Степанов В. П. Курс дифференциальных уравнений.— М.— Л.: ГИТТЛ, 1950.

Поступила в редакцию 3 апреля 1985 г.

УДК 532.529.5 : 621.375.826

А. Р. ЕВСЕЕВ, В. Е. НАКОРЯКОВ, Б. Г. ПОКУСАЕВ,
С. А. ТАЧКОВ, Л. С. ТИМКИН
(Новосибирск)

ИЗМЕРЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГАЗОЖИДКОСТНОГО ПОТОКА ЛАЗЕРНЫМ АНЕМОМЕТРОМ С ВОЛОКОННЫМ СВЕТОВОДОМ

По сравнению с традиционными схемами лазерных доплеровских измерителей скорости ЛДИС со световодом (оптическое волокно в качестве датчика) имеет ряд особенностей, делающих его применение в некоторых случаях более целесообразным. При исследовании локальных гидродинамических характеристик газожидкостных потоков преимуществами такого измерителя являются: работа в потоках с малой оптической прозрачностью; удаление объекта исследования от основной схемы ЛДИС на расстояние порядка 100 м; измерение пространственного распределения гидродинамических характеристик с достаточно высоким разрешением $\sim 10^{-4}$ м. Основной недостаток — возмущение потока вводимым волоконным датчиком.

Принципиальная возможность применения ЛДИС со световодом рассматривалась в [1, 2] при измерениях скорости крови (*in vivo*); характеристик вибрации твердых тел [3]; скорости пузырьков воздуха в воде [4] и скорости всплытия струйки газовых пузырьков в глицерине [5]. Цель данной работы — изложение методики измерения гидродинамических характеристик газожидкостных потоков методом ЛДИС со световодом и анализ полученных результатов.

Экспериментальная установка и принципы измерения. Схема экспериментальной установки показана на рис. 1. Линейно-поляризованное излучение He-Ne-лазера 1 ($\lambda = 0,6328 \cdot 10^{-6}$ м, $P = 10^{-2}$ Вт), пройдя через отверстие зеркала 2, установленного под углом к направлению луча, короткофокусным объективом 3 фокусируется на прямой торец многомодового световода 4 (длина ~ 10 м, диаметр светопередающей сердцевины $50 \cdot 10^{-6}$ м). Волоконный световод с помощью координатного устрой-