

4. Yamanouchi K., Kamiya T., Shibayama K. New leaky surface waves in anisotropic metal—diffused optical waveguides // IEEE Trans.—1978.—V. MTT-26.—P. 298.
5. Ctyroky J., Cada M. Guided and semileaky modes in anisotropic optical waveguides of the LiNbO₃ type // Opt. Comm.—1978.—V. 27.—P. 353.
6. Sheem S. K., Burns W. K., Milton A. F. Leaky—mode propagation in Ti-diffused LiNbO₃ and LiTaO₃ waveguides // Opt. Lett.—1978.—V. 3.—P. 76.
7. Burns W. K., Cheem S. K., Milton A. F. Approximate calculations of leaky—mode loss coefficients for Ti-diffused LiNbO₃ waveguides // IEEE J. Quant. Electron.—1979.—V. QE-15.—P. 1282.
8. Ctyroky J., Cada M. Generalized WKB method for the analysis of light propagation in inhomogeneous anisotropic optical waveguides // IEEE J. Quant. Electron.—1981.—V. QE-17.—P. 1064.
9. Kolosovsky E. A., Petrov D. V., Tsarev A. V., Yakovkin I. B. An exact method for analysing light propagation in anisotropic inhomogeneous optical waveguides // Opt. Comm.—1982.—V. 43.—P. 21.
10. Петров Д. В. Акустооптическое преобразование направляемой моды в вытекающую волну в волноводе Ti:LiNbO₃ // Письма в ЖТФ.—1983.—Т. 9, вып. 18.
11. Petrov D. V. Acoustooptic and electrooptic guided wave conversion to leaky waves in an anisotropic optical waveguide // Opt. Comm.—1984.—V. 50.—P. 300.
12. Петров Д. В., Чтыроки И. Акустооптическое преобразование направляемой моды в вытекающую волну в LiNbO₃:Ti-волноводе // Квантовая электрон.—1985.—Т. 12, № 5.
13. Kim B., Tsai C. S. Thin—film tunable optical filtering using anisotropic and non-collinear acoustooptic interaction in LiNbO₃ waveguides // IEEE J. Quant. Electron.—1979.—V. QE-15.—P. 642.
14. Yamamoto S., Okamura Y. Guided—radiation mode interaction in off—axis propagation in anisotropic optical waveguides with application to direct—intensity modulators // J. Appl. Phys.—1979.—V. 50.—P. 2555.
15. Marcuse D. Electrooptic coupling between TE and TM modes in anisotropic slabs // IEEE J. Quant. Electron.—1975.—V. QE-11.—P. 759.
16. Marcuse D. Coupled—mode theory for anisotropic optical waveguides // Bell. Syst. Techn. J.—1975.—V. 54.—P. 985.
17. Петров Д. В. Влияние процессов излучения на коллинеарное акустооптическое взаимодействие направляемых мод // Квантовая электрон.—1980.—Т. 7, № 9.
18. Свидзинский К. К. Теория брэгговской дифракции в планарном оптическом волноводе на решетках с ограниченной апертурой // Квантовая электрон.—1980.—Т. 7, № 9.
19. Парыгин В. Н., Чирков Л. Е. Дифракция света на ультразвуке в анизотропной среде // Квантовая электрон.—1975.—Т. 2, № 2.
20. Marcuse D. Theory of dielectric optical waveguides.—N. Y.: Academic Press, 1974.
21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика.—М.: Наука, 1974.
22. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах.—М.: Наука, 1969.
23. Люиселл У. Излучение и шум в квантовой электронике.—М.: Наука, 1972.
24. Тейлор Г., Ярив А. Волноводная оптика // ТИИЭР.—1974.—№ 62.

Поступила в редакцию 4 ноября 1985 г.

УДК 535.42 : 535.31 : 53.082.5

Б. Е. КРИВЕНКОВ, Ю. В. ЧУГУИ

(Новосибирск)

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА НА ОБЪЕМНЫХ ТЕЛАХ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Автоматизация контроля геометрии промышленных изделий — одна из актуальных задач современного приборостроения. Для ее решения с успехом используются методы фурье-оптики, в частности дифракционные [1] и корреляционные [2], основанные на анализе и фильтрации спектров пространственных частот изображений объектов. Так как большинство контролируемых изделий трехмерные, то необходимо выяснить влияние объемности этих изделий на их пространственные спектры — дифракционные картины Фраунгофера. Особенности дифракции света на таких объектах носят принципиальный характер, приводя, например,

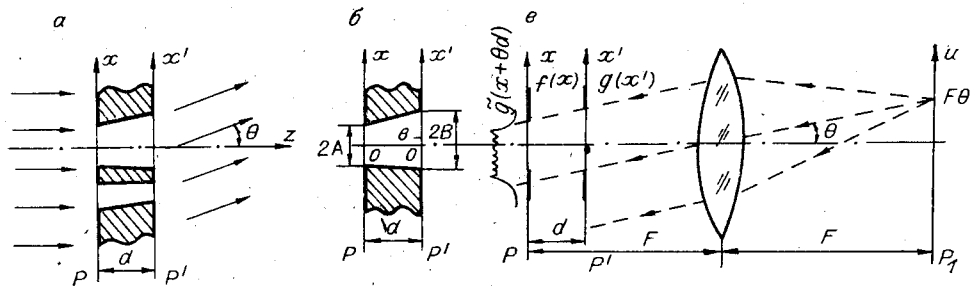


Рис. 1. Трехмерный объект постоянной толщины d (а), объемное отверстие (б), схема формирования его спектра в обратном ходе лучей с использованием эквивалентной системы диафрагм (в)

к зависимости измеренного дифракционными методами диаметра цилиндрического изделия от анализируемой полосы частот [3, 4].

Поскольку методы Фурье-оптики применимы для анализа дифракционных явлений только на двумерных объектах нулевой толщины, а существующие теории дифракции света на трехмерных телах [5] представляются сложными для инженерных применений, нами предложен квазигеометрический (модифицированный оптико-геометрический) метод расчета, позволяющий в первом приближении достаточно просто и физически наглядно оценить влияние протяженных тел постоянной толщины на их пространственные спектры [6]. Результаты расчета квазигеометрическим (КГ) методом спектров некоторых простейших объектов (типа бипланарная щель) хорошо согласуются как с более точными расчетами, так и с экспериментальными данными. Однако для важных на практике случаев объектов постоянной толщины — объемный край, отверстие — реальная картина дифракции оказывается более сложной, чем это предсказывает КГ-метод. Анализ показывает, что он в полной мере учитывает эффекты виньетирования (затенения) дифрагированных волн и лишь частично — их взаимодействие (интерференцию).

В настоящей работе на основе метода эквивалентных диафрагм в приближении Кирхгофа — Френеля проведен расчет дифракционной картины Фраунгофера на абсолютно поглощающих телах постоянной толщины. Анализ дифракции света на таких объектах достаточно прост, но тем не менее отражает существенные особенности формирования дифракционного поля объемного тела. С целью более адекватного описания физической картины дифракции уточнен ранее предложенный КГ-метод. На его основе обсуждается влияние протяженности объектов на их спектры. Теоретические результаты подтверждаются экспериментами.

Френелевский метод расчета дифракции. Исходные положения. Рассмотрим дифракцию света на абсолютно поглощающем объекте постоянной толщины при нормальном падении на него освещающей волны (для простоты ограничимся одномерным случаем). Такой объект можно представить в виде набора отверстий, поперечные размеры которых по глубине (вдоль оси z) в общем случае меняются по линейному закону, а их оси имеют произвольный угол с гранями этого тела (рис. 1, а). Предполагая справедливость принципа суперпозиции в рамках используемых далее приближений, ограничимся исследованием особенности дифракции света на одном отверстии (рис. 1, б). Будем характеризовать оптические свойства объекта двумя граничными функциями $f(x)$ и $g(x')$, которые описывают его амплитудные пропускания в плоскостях передней P и задней P' граней:

$$f(x) = \text{Rect}(x/2A); \quad g(x') = \text{Rect}((x' - b)/2B), \quad (1)$$

где $2A$, $2B$ и b — параметры объемного отверстия, а

$$\text{Rect}(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } |z| \leq 1/2; \\ 0 & \text{при } |z| > 1/2. \end{cases} \quad (2)$$

Внутренние поверхности отверстия будем считать абсолютно поглощающими. Это означает, что при попадании на эту поверхность волны часть ее фронта полностью гасится и в соответствии с принятой моделью абсолютно черного тела [7] волновой фронт внутри протяженного отверстия (в области пространства между его гранями) приближенно совпадает с полем, обусловленным только дифракцией на передней грани. Другими словами, определяющими являются вклады передней и задней граней протяженного отверстия, а вкладом боковых поглощающих граней можно пренебречь. В связи с этим представляется естественным заменить объемное отверстие системой диафрагм (рис. 1, в), размещаемых в его граничных плоскостях, и для расчета дифракции света на полученной модели применить формулы Фурье-оптики. Интуитивно ясно, что такая замена для случая абсолютно поглощающего объекта постоянной толщины возможна, однако требует экспериментального подтверждения.

Для удобства рассмотрения будем полагать, что объект (его модель) размещается на входе оптического Фурье-звена [8], причем его передняя грань отстоит на фокусном расстоянии от объектива. Объект освещается плоской монохроматической волной света единичной амплитуды с длиной волны λ , его дифракционная картина Фраунгофера наблюдается в плоскости P_1 . При расчете этой картины, которую будем называть спектром Фурье объекта, воспользуемся ранее полученными в [6] результатами. В соответствии с ними спектр Фурье $F(\theta)$ для такой модели в приближении малых углов наблюдения θ описывается следующим выражением:

$$F(\theta) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{g}(x + \theta d) e^{-jh\theta x} dx, \quad (3)$$

где θ — угол дифракции; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; $\tilde{g}(z) \simeq \int g(\xi) \exp\left[j \frac{k}{2d} (z - \xi)^2\right] d\xi$ — френелевский образ функции $g(z)$. В справедливости этого соотношения легко убедиться, если рассмотреть в обратном ходе лучей (см. рис. 1, в) эквивалентное поле во входной плоскости P .

Можно видеть, что вследствие дифракции света при его распространении в промежутке между двумя граничными плоскостями P и P' входная функция $f(x)$ модулируется не функцией $g(x)$, а ее френелевским образом — функцией $\tilde{g}(x + \theta d)$, аргумент которой линейно зависит от угла θ . Первое обстоятельство приводит к интерференции двух полей, соответствующих разнесенным по глубине граням, а второе — к затенению входного поля задней гранью объекта, что может приводить к эффективному уменьшению ширины отверстия. Эти качественные эффекты нуждаются, однако, в более строгом описании, что и сделано ниже.

Для расчета спектра объемного отверстия (см. рис. 1, б) воспользуемся принципом суперпозиции, в соответствии с которым световые волны, дифрагировавшие под углом θ , являются суммой волн, дифрагировавших в этом направлении на каждом из его краев. Поэтому рассмотрим сначала дифракцию света на типичном элементе этого объекта — объемном крае (рис. 2, а), а затем обобщим полученные результаты.

Объемный край. В этом случае граничные функции $f(x)$ и $g(x')$ имеют вид

$$f(x) = Y(x); \quad g(x') = Y(x' - c), \quad (4)$$

где $Y(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда:

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Вычисляя интеграл (3) с учетом (4), для спектра объемного края по-

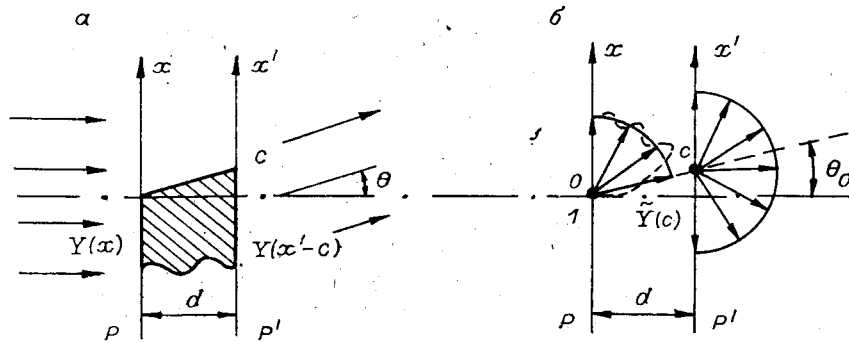


Рис. 2. Объемный край (а) и его обобщенная точечная модель (б): штриховая линия — френелевская диаграмма излучения, сплошная — равномерная

лучем следующее выражение (см. Приложение):

$$E_{FR}(\theta) = \pi d(k\theta) + \frac{1}{jk\theta} \tilde{Y}(\theta d - c) + \frac{e^{jk\theta c} e^{j\frac{k\theta^2 d}{2}}}{jk\theta} \tilde{Y}(c). \quad (5)$$

Здесь $\tilde{Y}(z) \simeq \int Y(\xi) \exp\left[j\frac{k}{2d}(z - \xi)^2\right] d\xi$ — френелевский образ функции $Y(z)$, связанный со стандартной функцией Френеля $\mathcal{F}(z) = \int_0^z e^{j\frac{\pi}{2}\xi^2} d\xi$ [9] соотношением

$$\tilde{Y}(z) = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left[\mathcal{F}(\infty) + \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{k}{\pi d}} z\right) \right]. \quad (6)$$

Для наглядности на рис. 3 приведены амплитудные компоненты функций $\tilde{Y}(x)$ (сплошная линия) и $Y(x)$ (штрихпунктирная).

Проанализируем теперь полученное выражение (5). Первый член его описывает вклад в дифракционную картину от прошедшего пучка света, а второй — дифракцию света на передней грани объекта с учетом виньетирования дифрагировавших волн задней гранью. Что касается третьего члена, то он соответствует вторичной дифракции света на задней грани, причем величина его определяется значением амплитуды поля $\tilde{Y}(c)$ — результата дифракции света на передней грани в точке расположения края задней грани объекта. Фазовая составляющая учитывает положение края в поперечном (член $e^{-jk\theta c}$) и продольном (член $e^{j\frac{k\theta^2 d}{2}}$) направлениях. Естественно, что в зависимости от величины и знака c основной вклад в дифракционное поле объемного края дает либо передняя грань ($c \ll 0$), либо задняя ($c \gg 0$). Соответствующие выражения для этих предельных случаев совпадают с известными для плоского края [8].

При интерпретации и анализе спектра трехмерного объекта очень полезной оказывается его модель в виде обобщенных δ -источников с оп-

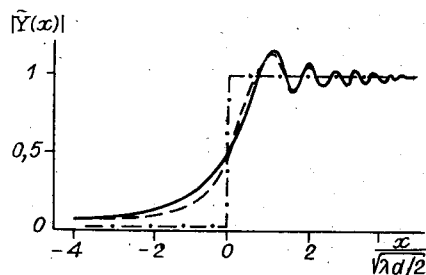


Рис. 3. График функции Хевисайда $Y(x)$ (штрихпунктирная линия), ее френелевского образа $\tilde{Y}(x)$ (сплошная) и аппроксимация элементарными функциями (штриховая)

ределенными комплексными амплитудами и диаграммами излучения, находящимися в краевых точках этого объекта. В случае объемного края эти источники располагаются в точках $x=0$ и $x'=c$ (см. рис. 2, б), амплитуды их равны соответственно 1 и $Y(c)$. При этом диаграмма излучения первого источника в отличие от второго оказывается неизотропной и определяется поведением френелевского образа $\tilde{Y}(\theta d - c)$ (см. рис. 2, б, штриховая линия). Нетрудно убедиться, что результат интерференции таких точечных источников (с точностью до множителя $1/k\theta$) описывается выражением (5).

Объемное отверстие. Граничные функции такого объекта представлены выражением (1), и в соответствии с (3) спектр объемного отверстия в приближении Френеля имеет вид

$$F_{FR}(\theta) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \text{Rect}\left(\frac{x}{2A}\right) \tilde{\text{Rect}}\left(\frac{x-b+\theta d}{2B}\right) e^{-jk\theta x} dx. \quad (7)$$

Так как объемное отверстие можно представить суперпозицией двух объемных краев (4), чему соответствует представление функции $\text{Rect}(z)$ в виде $\text{Rect}(z) = Y(z+0,5) - Y(z-0,5)$, то, используя (5), для его спектра легко получить следующую формулу:

$$F_{FR}(\theta) = \frac{1}{jk\theta} \left\{ e^{jk\theta A} \tilde{\text{Rect}}\left(\frac{\theta d - A - b}{2B}\right) - e^{-jk\theta A} \tilde{\text{Rect}}\left(\frac{\theta d + A - b}{2B}\right) - \right. \\ \left. - e^{\frac{jk\theta^2 d}{2}} \left[e^{-jk\theta(B+b)} \tilde{\text{Rect}}\left(\frac{b+B}{2A}\right) - e^{jk\theta(B-b)} \tilde{\text{Rect}}\left(\frac{b-B}{2A}\right) \right] \right\}, \quad (8)$$

где $\tilde{\text{Rect}}(z) = \int \text{Rect}(\xi) \exp\left[j\frac{k}{2d}(z-\xi)^2\right] d\xi$ — френелевский образ функции $\text{Rect}(z)$.

Первые два члена в (8) описывают дифракцию света на краях входного отверстия с учетом виньетирования спектра задней гранью, а вторые два — вторичную дифракцию (прошедшего через переднюю грань) света на задней грани объекта. Причем множители $\tilde{\text{Rect}}\left(\frac{b \pm B}{2A}\right)$ равны амплитудам поля в местах расположения краев выходного отверстия. Указанные члены соответствуют распределениям, создаваемым двумя парами источников, размещенными в краевых точках диафрагм в плоскостях P и P' (см. рис. 1, в), с амплитудами ± 1 , $\pm \text{Rect}((b \mp B)/2A)$ и диаграммами излучения соответственно 1 и $\text{Rect}((\theta d \pm A - b)/2B)$. Интерференция их и определяет все основные эффекты, вносимые в спектр протяженностью объекта.

В качестве примера на рис. 4, а приведен график распределения $I_{FR}(\theta) = \theta^2 |F_{FR}(\theta)|^2$, соответствующего спектру объемного отверстия со следующими параметрами: $2A = 2B = 0,1$ мм; $b = 0$ и $d = 0,15$ мм. Для сравнения здесь же (рис. 4, б) показан график функции $I_0(\theta) = \sin^2(k\theta A)$, описывающей дифракцию на плоском ($d = 0$) отверстии шириной $2A = 0,1$ мм. Можно видеть, что протяженность объекта резко усложняет дифракционную картину. Если, например, ограничиться рассмотрением низкочастотной области спектра, то основные эффекты здесь сводятся, с одной стороны, к появлению дополнительной модуляции амплитуды френелевского типа с минимумами при значениях $\theta_m = \sqrt{\lambda(2m+1)}/d$ ($m = 0, 1, \dots$), а с другой — к уменьшению частоты высокочастотных колебаний, определяемых параметром $2A$. Более подробный анализ этого распределения дается ниже.

Заметим, что выражения (5) и (8) легко приводятся к виду, удобному для численных расчетов на ЭВМ. Вместе с тем, очевидно, что для анализа и интерпретации дифракционных явлений на объемных телах более предпочтительнее иметь их аналитическую оценку. С этой целью

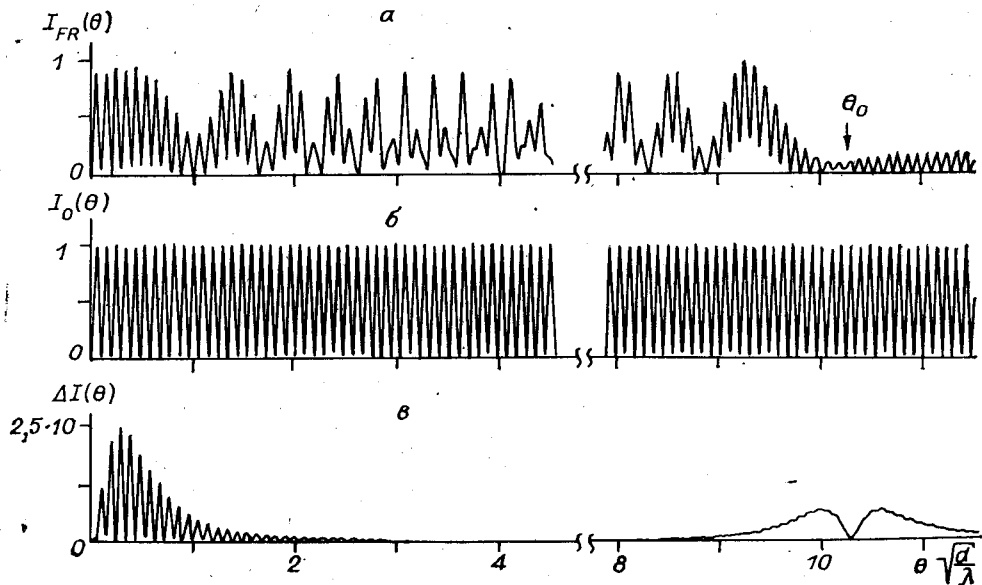


Рис. 4. Спектр $I_{FR}(\theta)$ объемной щели в приближении Френеля (а), спектр $I_0(\theta)$ плоской щели ($d = 0$) (б), разностный спектр $\Delta I(\theta)$ (в)
(θ_0 — граничный угол)

нами предложена следующая оценка функции $\tilde{Y}(z)$:

$$\tilde{Y}(z) \approx Y(z) - \frac{p}{2} e^{j \frac{kz^2}{2d}} \frac{\text{sgn}(z)}{|z| + p}, \quad (9)$$

где $p = 1/\pi\sqrt{2\pi d}/k$, а $\text{sgn}(z)$ — знаковая функция. Учитывая (6), видно, что для значений $|z| \ll \sqrt{\lambda d}$ и $|z| \gg \sqrt{\lambda d}$ ($\sqrt{\lambda d}$ — величина первой зоны Френеля) приближение (9) сводится к известным разложениям функции Френеля для малых и больших значений аргумента [9]. В промежуточной области оценка оказывается менее точной, но, как показывают численные расчеты, вполне достаточной для практики. Для наглядности на рис. 3 приведены графики зависимости $|\tilde{Y}(x)|$, вычисленные по точной (сплошная линия) и приближенной (штриховая) формулам ((6) и (9)), а на рис. 4, в — график функции $\Delta I(\theta) = \theta^2 |F_{FR}(\theta) - F'(\theta)|^2$, нормированной на максимум $I_{FR}(\theta)$. Функция $F_{FR}(\theta)$ вычислена в соответствии с (8), а $F'_{FR}(\theta)$ получена из (8) с учетом (9). Можно видеть, что разность $\Delta I(\theta)$ не превышает 0,25%.

Квазигеометрический метод расчета дифракции. Существенно упростить анализ дифракционных явлений и сделать его более наглядным можно с помощью квазигеометрического подхода. Его сущность заключается в учете дифракции света на гранях объекта и описании распространения дифрагированных волн в свободном пространстве в соответствии с законами геометрической оптики.

Объемный край. В этом случае френелевские образы $\tilde{Y}(\cdot)$ в спектре (5) следовало бы заменить на сами исходные функции $Y(\cdot)$. Полученное при этом выражение, однако, не в полной мере учитывало бы вклад задней грани в дифракционное поле, когда оно находится в тени ($c < 0$), поскольку в этом случае амплитуда света в точке $x' = c$ хотя и мала, но отлична от нуля ($d \neq 0$). Для устранения этого недостатка произведем замену $\tilde{Y}(\cdot)$ на $Y(\cdot)$ только во втором члене (5). В результате получим

$$F_{QG}(\theta) = \pi \delta(k\theta) + \frac{1}{jk\theta} Y(\theta d - c) + \frac{e^{-jk\theta c} e^{j \frac{k\theta^2 d}{2}}}{jk\theta} \tilde{Y}(c). \quad (10)$$

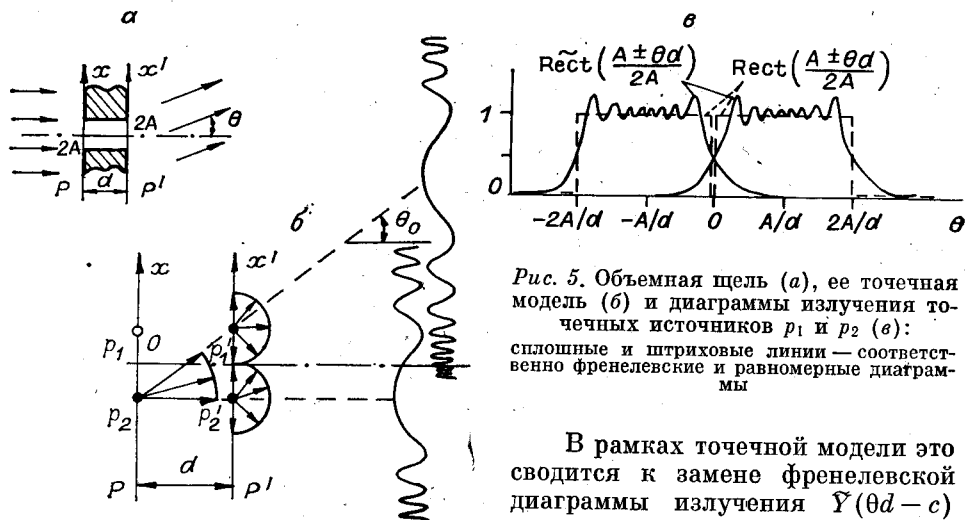


Рис. 5. Объемная щель (а), ее точечная модель (б) и диаграммы излучения точечных источников p_1 и p_2 (в): сплошные и штриховые линии — соответственно френелевские и равномерные диаграммы

номерную в области углов $c/d \leq \theta \leq \pi/2$, в соответствии с функцией $Y(\theta d - c)$ (сплошная линия на рис. 2, б).

Остановимся на отличиях предлагаемого КГ-метода от ранее описанного в работе [6], согласно которому спектр объемного края имеет вид

$$E'_{QG}(\theta) = \pi \delta(k\theta) + \frac{1}{jk\theta} Y(\theta d - c) + \frac{e^{-jk\theta c} e^{j\frac{k\theta^2 d}{2}}}{jk\theta} Y(c - \theta d).$$

Это выражение по своей структуре близко к ранее полученным (5) и (10). Однако видно, что при $\theta > \theta_0$ ($\theta_0 = c/d$ — граничный угол) вклад в спектр задней грани полностью отсутствует, так как $Y(c - \theta d) = 0$. Таким образом, предложенный ранее метод, действительно, не в полной мере учитывает вторичную дифракцию на задней грани.

Объемное отверстие. Спектр такого отверстия в КГ-приближении согласно (8) имеет вид

$$F_{QG}(\theta) = \frac{1}{jk\theta} \left\{ e^{jk\theta A} \text{Rect}\left(\frac{\theta d - A - b}{2B}\right) - e^{-jk\theta A} \text{Rect}\left(\frac{\theta d + A - b}{2B}\right) - e^{j\frac{k\theta^2 d}{2}} \left[e^{-jk\theta(B+b)} \tilde{\text{Rect}}\left(\frac{b+B}{2A}\right) - e^{jk\theta(B-b)} \tilde{\text{Rect}}\left(\frac{b-B}{2A}\right) \right] \right\}. \quad (11)$$

Диаграммы излучения эквивалентных точечных источников входной плоскости P равномерны в диапазонах углов $-((B+A)/d) < \theta - \theta_0 < (B-A)/d$, $-((B-A)/d) < \theta - \theta_0 < (B+A)/d$, где $\theta = b/d$, и равны нулю вне их.

Отметим, что приближенные формулы (10) и (11) существенно проще более точных (5) и (8). Тем не менее они достаточно хорошо учитывают эффекты объемности.

Анализ спектра объемного отверстия. Изучим более детально особенности формирования спектров объемных отверстий с использованием КГ и френелевского приближений. Рассмотрим сначала частный случай объекта, у которого $2A = 2B$ и $b = 0$ (объемная щель, рис. 5, а). Спектр такой щели в КГ-приближении согласно (11) равен

$$F_{QG}(\theta) = \frac{1}{jk\theta} \left\{ e^{jk\theta A} \text{Rect}\left(\frac{\theta d - A}{2A}\right) - e^{-jk\theta A} \text{Rect}\left(\frac{\theta d + A}{2A}\right) - e^{j\frac{k\theta^2 d}{2}} \text{Rect}\left(\frac{A}{2A}\right) [e^{-jk\theta A} - e^{jk\theta A}] \right\}. \quad (12)$$

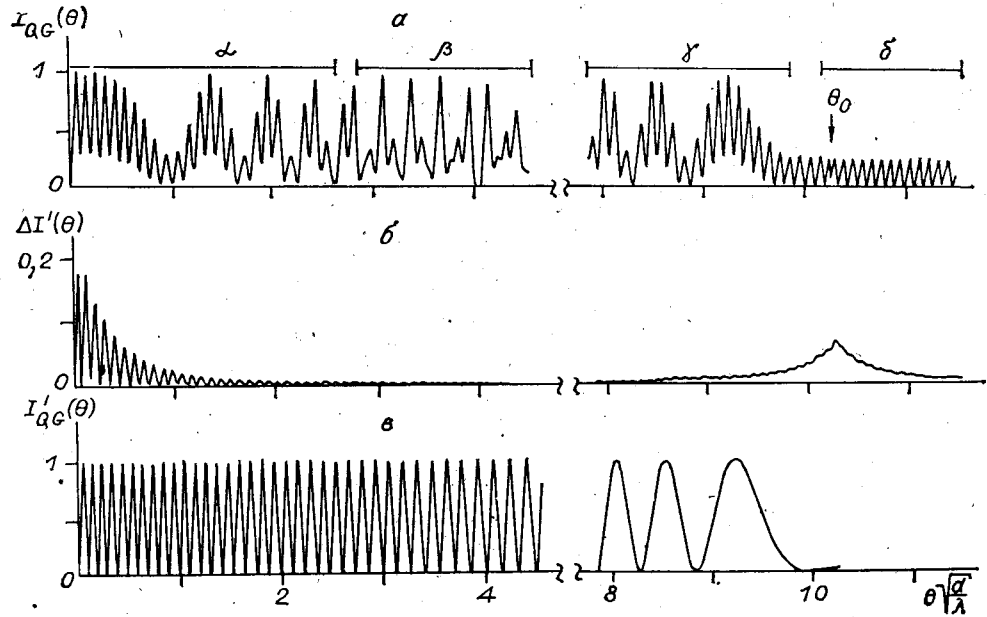


Рис. 6. Спектр $I_{QG}(\theta)$ объемной щели в КГ-приближении (а), разностный спектр $\Delta I'(\theta)$ (б) и спектр $I'_{QG}(\theta)$ (в) объемной щели, полученный в [6] при неполном учете вторичной дифракции

Учитывая, что при выполнении условия $2A \gg \sqrt{\lambda d}$ функция $\widetilde{\text{Rect}}(A/2A) \approx 1/2$, для спектра мощности получим

$$|F_{QG}(\theta)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{k^2 \theta^2} \left[\cos^2(k\theta^2 d/4) + \sin^2(k|\theta|A - k\theta^2 d/4) - \frac{1}{2} \cos^2(k\theta A) \right], & |\theta| < \frac{2A}{d}; \\ \frac{\sin^2(k\theta A)}{2k^2 \theta^2}, & |\theta| > \frac{2A}{d}. \end{cases} \quad (13)$$

На рис. 6, а приведен график функции $I_{QG}(\theta) = \theta^2 |F_{QG}(\theta)|^2$ для $2A = 0,1$ мм и $d = 0,15$ мм. В силу симметричности объекта ограничимся рассмотрением поля в области углов $\theta > 0$ и при анализе его поведения воспользуемся точечной моделью, согласно которой в создании интерференционной картины участвуют δ -источники p_2 , p_1 и p_2' с координатами $x = -A$, $x' = -A$ и $x' = A$ точка p_1 с координатой $x = A$ исключается, так как при $\theta > 0$ $\widetilde{\text{Rect}}((\theta d + A)/2A) = 0$ и амплитудами соответственно 1, $1/2$ и $-1/2$ (см. рис. 5, б). Выходное поле удобно представить как результат интерференции двух пар источников с одинаковыми по модулю амплитудами и равными $1/2$. Интерференционная картина от первой пары источников p_2 и p_2' описывается выражением

$$A_1(\theta) \simeq \cos(k\theta^2 d/4) e^{-j(k\theta A - k\theta^2 d/4)}, \quad (14)$$

а от второй p_2 и p_1' —

$$A_2(\theta) \simeq \sin(k\theta A - k\theta^2 d/4) e^{jk\theta^2 d/4}. \quad (15)$$

Оба сигнала линейно модулированы по частоте; минимум частоты (стационарная точка) первого из них имеет место при $\theta_0 = 0$, а второго — при граничном угле $\theta_0 = 2A/d$. Результирующее поле в области низких частот представляет собой ЛЧМ-сигнал (15), модулированный огибающей (14) (см. область α на рис. 6, а). В области углов, где частоты сигналов (14) и (15) сравнимы по величине, следует ожидать нарушение регулярности колебаний (область β). При приближении к граничной ча-

стоте $\theta = \theta_0$, роль несущей начинает играть сигнал (14), а огибающей — сигнал (15) (область γ), и, наконец, в области углов $\theta > \theta_0$ в создании интерференционного поля участвуют только точки P_1 и P_2 , вследствие чего частота колебаний постоянна, а амплитуда пропорциональна $\sin^2(k\theta A)$ (см. рис. 6, а, область δ).

Для наглядного представления точности оценки спектра в КГ-приближении на рис. 6, б показан график функции $\Delta I'(\theta) = \theta^2 |F_{FR}(\theta) - F_{FR}(\theta)|^2$, нормированный на максимум $I_{FR}(\theta)$. Отметим, что удовлетворительное действие же дифрагированных волн отражено лишь частично (отсутствует модуляция в спектре).

Из сравнения расчетов, выполненных Френелевским и КГ-методами, следует, что основные отличия лежат в низкочастотной области спектра, где наблюдается уменьшение контраста полос, а также в области граничной частоты θ_0 . Это можно объяснить разрывностью функций $\text{Rect}((\theta d \pm A)/2A)$, аппроксимирующих в (11) исходные непрерывные диаграммы излучения $\text{Rect}((\theta d \pm A)/2A)$. Действительно, при $|\theta| \rightarrow 0$ $\text{Rect}((\theta d \pm A)/2A) \rightarrow 0$ или 1 в зависимости от знака θ и вклад в (11) дает только один из двух первых членов. Исходная же функция $\text{Rect}((\theta d \pm A)/2A)$ при $|\theta| \rightarrow 0$ стремится к 1/2 и участвует в создании дифракционного поля своими краевыми областями — «хвостами» диаграмм излучения (рис. 5, в). Это дает основание предположить, что КГ-приближение наиболее точно в окрестности краевых точек $\theta_{кр} - \Delta\theta < \theta < \theta_{кр} + \Delta\theta$, где $\theta_{кр}$ для объемной щели равно 0 и $\pm\theta_0$ ($\theta_0 = 2A/d$), а величина окрестности $\Delta\theta$ определяется протяженностью первой зоны Френеля функции $\tilde{Y}(\cdot)$, т. е. $\Delta\theta \sim \sqrt{\lambda/d}$. Заметим, что в этом случае выражение (13) при $d \rightarrow 0$ переходит в $1/3 + \sin^2(k\theta A)/k^2\theta^2$, а не в $\sin^2(k\theta A)/k^2\theta^2$ (спектр плоского зазора), как того следовало ожидать. Выяснение области применимости предложенного КГ-метода требует тем не менее отдельного исследования.

Остановимся на анализе спектра объемного отверстия с неодинаковыми входными и выходными размерами, т. е. когда $2A \neq 2B$. Пусть сначала $2A < 2B$ (рис. 7, а). Согласно точечной модели спектр такого отверстия представляется как результат интерференции четырех точечных источников. Однако в области углов $|\theta| < \theta'_0 = (B - A)/d$ основной вклад в дифракционную картину дают края передней грани объекта, поскольку его задняя грань находится в области тени. При $\theta > \theta'_0$ ($\theta < -\theta'_0$) одна из точек передней грани исключается и в интерференции участвуют только три точки с заметно отличающимися амплитудами, что приводит к существенному уменьшению глубины модуляции картины (рис. 7, б, $2A = 0,15$ мм; $2B = 0,18$ мм; $d = 0,2$ мм). Как и следовало ожидать, положение минимумов дифракционной картины в области уг-

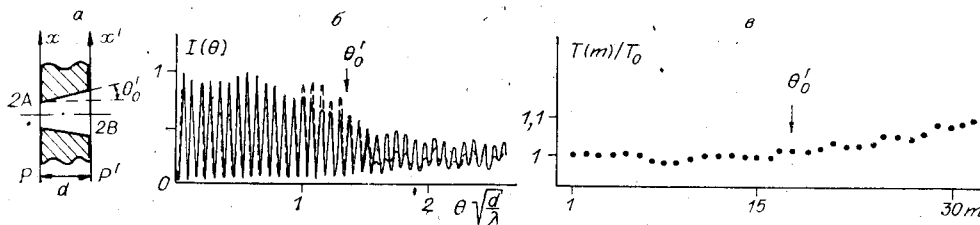


Рис. 7. Объемное отверстие с $2B > 2A$ (а), его спектр в приближении Френеля (сплошная) и КГ-приближении (штриховая линия) (б); текущий период спектра в зависимости от номера m дифракционного порядка (в)

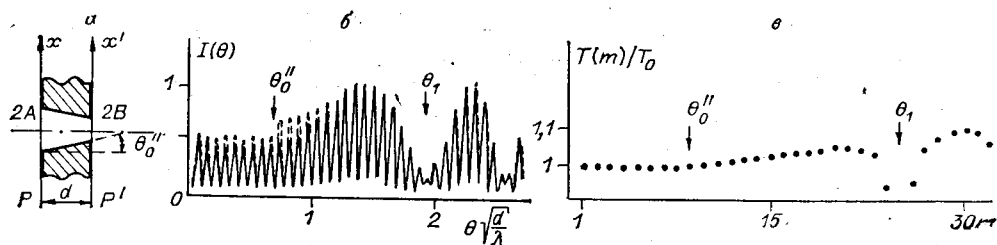


Рис. 8. Объемное отверстие с $2B < 2A$ (а), его спектр (б) и текущий период (в)

лов $|\theta| < \theta_0'$ мало отличается от эквидистантного, соответствующего плоскому отверстию шириной $2A$. Это подтверждается результатами расчетов в приближении Френеля текущего периода спектра $T(m)/T_0$, где m — номер дифракционного порядка; T_0 — период колебаний в спектре плоского отверстия (рис. 7, в).

В случае $2A > 2B$ (рис. 8, а) в области углов $|\theta| < \theta_0'' = \frac{A-B}{d}$ в формировании спектра участвует только задняя грань, дифракционное поле соответствует спектру плоской щели шириной $2B$ с эквидистантно расположенными минимумами. Для углов $|\theta| > \theta_0''$ в формирование спектра включается один из краевых источников (рис. 8, б). Таким образом, имеет место интерференция трех источников света, амплитуды которых (по абсолютной величине) сравнимы друг с другом, что приводит к увеличению суммарной амплитуды колебаний в этой области частот, а также к смещению минимумов спектра (рис. 8, в).

Экспериментальные результаты. Экспериментальные исследования дифракции света на поглощающих объемных телах постоянной толщины проводились с целью подтверждения правильности проведенного теоретического анализа, основанного на модели таких объектов в виде эквивалентной системы диафрагм.

Изучению подлежали дифракционные картины от объемного края и объемной щели. Чтобы подчеркнуть эффекты виньетирования и взаимодействия граней объемного края, его передняя грань ограничивалась апертурой, т. е. в отличие от (4) граничные функции имели вид

$$f(x) = \text{Rect}(x/2A); \quad g(x') = Y(x' + A). \quad (16)$$

Спектр такого объекта в приближении Френеля описывается выражением

$$F_{FR}(\theta) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \text{Rect}\left(\frac{x}{2A}\right) \tilde{Y}(x + A + \theta d) e^{-jk\theta x} dx. \quad (17)$$

В экспериментах объектом служил металлический ступенчатый клин, разрезанный на две половины перпендикулярно его передней и задней граням. При этом высота ступенек равнялась 3 мм, а их толщина изменялась дискретно от 0,5 до 32 мм. Объемная щель моделировалась установкой половинок клина на заданном расстоянии $2A$ друг от друга и выбором ступеньки требуемой толщины d , а объемный край — заменой одной из половинок клина плоским экраном. Для достижения хорошего поглощения боковые грани клина покрывались копотью от дыма горячей камфоры.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 9. Тестовый объект 2 размещался в прямом пучке He-Ne-лазера 1 ЛГ-38 перпендикулярно оптической оси (погрешность ориентации $\pm 1'$). Так как ширина зазора выбиралась много меньше ширины пучка лазера, то влияние гауссовой формы распределения интенсивности лазерного пучка на результаты пренебрежимо мало. Фурье-объектив 3 имел фокусное расстояние $f = 500$ мм. В его задней фокальной плоскости на прецизионной подвижке 5 с цифровым отсчетом положения (дискретность отсче-

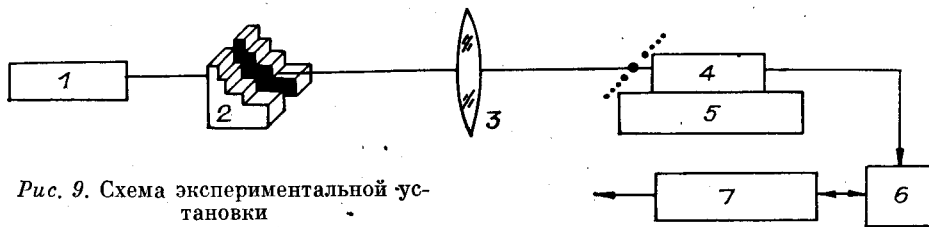


Рис. 9. Схема экспериментальной установки

тов 1 мкм) устанавливался ФЭУ 4 со целевой считывающей диафрагмой шириной 0,03 мм. Сигнал с ФЭУ поступал на цифровой вольтметр В7-16 6 и далее через плату параллельного обмена И1 считывался в память микроЭВМ «Электроника 60 М» 7. Для снижения случайной составляющей погрешности до уровня нескольких процентов результаты измерения в каждой точке усреднялись по 50—100 значениям.

На рис. 10 приведены результаты экспериментов для объемного зазора $d=1$ мм, $2A=0,277$ мм (а) и для объемного края с $d=4$ мм, $2A=0,228$ мм (б). Сплошной линией на этих графиках показаны рассчитанные согласно (8) и (17) распределения $I_{FR}(\theta) = \theta^2 |F_{FR}(\theta)|^2$ и $I'_{FR}(\theta) = \theta^2 |F'_{FR}(\theta)|^2$, а точками — экспериментальные данные.

Можно видеть, что в случае объемной щели амплитуда первого дифракционного максимума значительно меньше теоретического, что объясняется влиянием микроструктуры закопченной боковой грани, которое сильнее всего проявляется при малых (скользящих) углах падения дифрагированных лучей. Амплитудные отличия имеют место и при других углах дифракции, однако они существенно меньше. В целом наблюдается согласие теоретических и экспериментальных результатов.

Анализируя дифракцию света на объемном крае, заметим, что в отрицательной области частот, где основным является эффект виньетирования, частота колебаний, как и следует ожидать, уменьшается вплоть до граничной частоты $\theta_0 = -2A/d$. В области положительных частот виньетирование пучков отсутствует и согласно [6] спектр такого объекта должен совпадать со спектром плоского отверстия. В действительности же взаимодействие граней, как это предсказывает френелевский и КГ-методы расчета, приводит к модуляции спектра, что и подтверждается экспериментально.

Эффективность предложенной теории и ее согласие с экспериментом оценим на примере поведения такой важнейшей характеристики

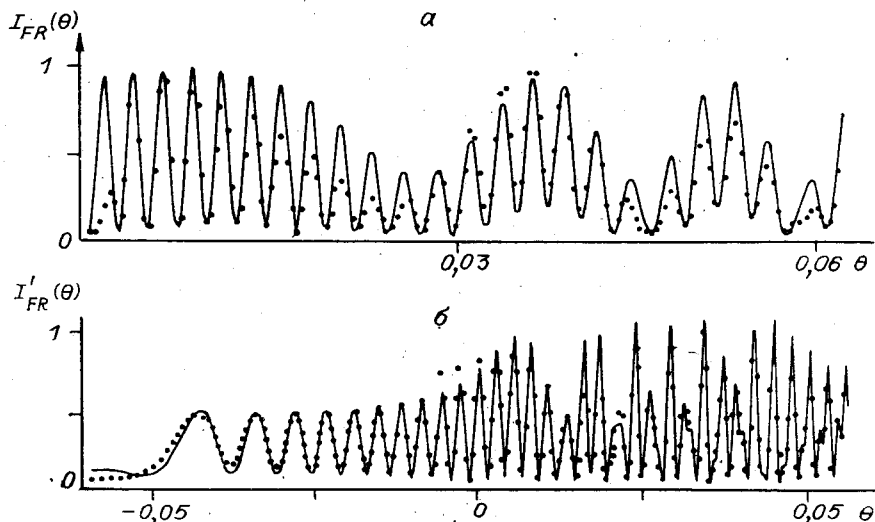


Рис. 10. Экспериментальные результаты: объемная щель (а) и объемный край (б): точками показаны экспериментальные данные, сплошными линиями — теоретические (в приближении Френеля) спектры

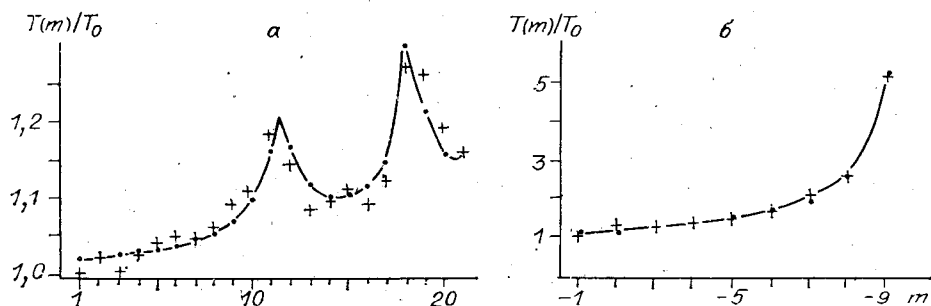


Рис. 11. Зависимость периода спектра объемной щели (а) и объемного края (б) от номера дифракционного порядка m : кресттики — экспериментальные данные; точки, соединенные линией, — теоретические

спектра, как положение его минимумов. (Именно на определении этого параметра основаны дифракционные методы измерения размеров изделий.) С этой целью рассмотрим зависимость периода T дифракционной картины указанных объектов от номера дифракционного порядка m (для удобства зависимость $T(m)$ нормирована на период T_0 спектра плоской щели шириной $2A$). На рис. 11 приведены графики зависимостей для объемной щели (а) и объемного края (б). Крестиками показаны экспериментальные результаты, а точками, соединенными для наглядности линией, — теоретические. Экспериментальная погрешность определения периода составляла 5%. Можно видеть удовлетворительное согласие теоретических расчетов и экспериментальных данных.

Таким образом, результаты экспериментальных исследований согласуются с предложенной моделью объемного поглощающего объекта в виде эквивалентной системы диафрагм. Границы области применимости предложенной модели и ее точностные характеристики требуют тем не менее дальнейшего изучения.

Заключение. В настоящей работе для анализа дифракции Фраунгофера на абсолютно поглощающих объектах постоянной толщины предложена модель таких объектов в виде системы диафрагм, что позволяет при расчетах использовать стандартные методы фурье-оптики. В приближении Френеля получены явные выражения для спектров таких практически важных объектов, как объемный край и отверстие, которые описывают явления первичной и вторичной дифракции света соответственно на передней и задней гранях объекта с учетом виньетирования дифрагированных пучков. Эти поля можно интерпретировать как результат интерференции обобщенных точечных источников с соответствующими амплитудами и френелевскими диаграммами излучения, расположенными в краевых точках объекта. Для аналитической оценки френелевских диаграмм излучения предложена их простая, но достаточно точная аппроксимация элементарными функциями.

Существенное упрощение расчетов достигается при использовании квазигеометрического метода, в соответствии с которым учитывается дифракция света только на гранях объекта, а распространение дифрагированных волн в свободном пространстве описывается в приближении геометрической оптики. Это эквивалентно замене френелевских диаграмм излучения обобщенных источников на равномерные в некотором угловом секторе, определяемом геометрией объекта. Анализ показывает, что наименее точно КГ-метод работает в окрестности краевых точек (углов).

Протяженность объекта резко усложняет его спектр. Так, например, для симметричной объемной щели основные отличия ее спектра от спектра плоского аналога сводятся к уменьшению в низкочастотной области текущей частоты колебаний и появлению модуляции амплитуды френелевского типа.

Экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретическими и тем самым подтверждают эффективность предложенных методов

расчета дифракции Фраунгофера на абсолютно поглощающих объемных телах постоянной толщины с использованием модели эквивалентных диафрагм.

Предложенная теория может быть обобщена на более сложные объекты, например, на протяженные отверстия произвольной формы (в сечении, перпендикулярном оси z), на тела с отражающими поверхностями, цилиндры и т. д. На этом пути, по нашему мнению, встретятся трудности, скорее, математического, чем принципиального характера.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Интеграл (3) с учетом (4) имеет вид

$$E_{FR}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) \tilde{Y}(x - c + \theta d) e^{-jk\theta x} dx \quad (1.1)$$

или в развернутом представлении

$$E_{FR}(\theta) = \frac{1}{\pi p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) Y(x + t - c) e^{j\frac{h}{2d}(\theta d - t)^2} e^{-jk\theta x} dt dx, \quad (1.2)$$

где $p = e^{j\pi/h} \sqrt{2d/k\pi}$. Сначала вычислим интеграл по x . В зависимости от величины параметра t он принимает значения

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) Y(x + t - c) e^{-jk\theta x} dx = \begin{cases} \mathcal{F}\{Y\} & \text{для } t > c; \\ e^{jk\theta t} e^{-jk\theta c} \mathcal{F}\{Y\} & \text{для } t < c. \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь $\mathcal{F}\{Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) e^{-jk\theta x} dx = \pi\delta(k\theta) + 1/jk\theta$ — фурье-образ функции

Хевисайда. Используя полученное соотношение (1.3), интеграл (1.2) легко приводится к следующему виду:

$$E_{FR}(\theta) = \frac{1}{\pi p} \left\{ \pi\delta(k\theta) \mathcal{I}_1 + \frac{e^{-jk\theta c}}{jk\theta} \mathcal{I}_2 + \frac{e^{j\frac{k\theta^2 d}{2}}}{jk\theta} \mathcal{I}_3 \right\}, \quad (1.4)$$

где

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{h}{2d}t^2} dt; \quad \mathcal{I}_2 = \int_{-\infty}^c e^{j\frac{h}{2d}t^2} dt; \quad \mathcal{I}_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{h}{2d}t^2} e^{-jk\theta t} dt.$$

Эти интегралы с помощью функции Френеля $\mathcal{F}(z) = \int_0^z e^{j\frac{\pi}{2}t^2} dt$ и соотношения

$$\tilde{Y}(x) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{2}} \left[\mathcal{F}(\infty) + \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{k}{\pi d}} x\right) \right] \quad (1.5)$$

можно представить следующим образом:

$$\mathcal{I}_1 = 2 \sqrt{\frac{\pi d}{k}} \mathcal{F}(\infty) = \pi p; \quad (1.6)$$

$$\mathcal{I}_2 = \sqrt{\frac{\pi d}{k}} \left[\mathcal{F}(\infty) + \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{k}{\pi d}} c\right) \right] = \pi p \tilde{Y}(c); \quad (1.7)$$

$$\mathcal{I}_3 = e^{-j\frac{k\theta^2 d}{2}} \sqrt{\frac{\pi d}{k}} \left\{ \mathcal{F}(\infty) - \mathcal{F}\left[\sqrt{\frac{k}{\pi d}} (c - \theta d)\right] \right\} = \pi p e^{-j\frac{k\theta^2 d}{2}} \tilde{Y}(\theta d - c). \quad (1.8)$$

С учетом (1.6), (1.7) и (1.8) выражение (1.4) приводится к требуемому виду

$$E_{FR}(\theta) = \pi\delta(k\theta) + \frac{\tilde{Y}(\theta d - c)}{jk\theta} + \frac{e^{-jk\theta c} e^{\frac{jk\theta^2 d}{2}}}{jk\theta} \tilde{Y}(c). \quad (1.9)$$

В заключение авторы приносят свою благодарность В. П. Юношеву и С. П. Юношеву за помощь в автоматизации экспериментального стенда, В. В. Вертопрахову, М. А. Гофману и Е. С. Нежевенко за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов К. И., Прокопенко В. Т., Митрофанов А. С. Применение лазеров в машиностроении и приборостроении.— Л.: Машиностроение, 1978.
2. Богомолов Е. Н., Вертопрахов В. В., Чугуй Ю. В., Юношев В. П. Быстродействующее оптическое контрольно-измерительное устройство // Измер. техника.— 1985.— № 11.
3. Kochsiek M., Kunzmann H., Tantau J. Anwendung Beugungsoptischer Methoden zur Messung der Durchmesser von Kleinen Wellen // PTB-Mitt.— 1977.— Bd 87, N 4.— S. 279.
4. Schmidt S. Ein Beitrag zur Erklärung der Lichtbeugung am Metallischen Kreiszyliner // PTB-Mitt.— 1976.— Bd 86, N 4.— S. 239.
5. Хенл Х., Мауэр М., Вестпфаль К. Теория дифракции.— М.: Мир, 1964.
6. Коронкевич В. П., Кривенков Б. Е., Михляев С. В., Чугуй Ю. В. Оптико-геометрический метод расчета дифракции Фраунгофера на объемных телах // Автометрия.— 1980.— № 2.
7. Захарьев Л. Н., Деманский А. А. Рассеяние волн «черными» телами.— М.: Сов. радио, 1972.
8. Папулис А. Теория системы и преобразований в оптике.— М.: Мир, 1974.
9. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамова, И. Стишна.— М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 8 сентября 1986 г.

УДК 778.38

Д. И. МИРОВИЦКИЙ, Н. В. РОСТОВЦЕВА, О. Б. СЕРОВ

(Москва)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУР ДЛЯ ЗАПИСИ ТОНКИХ ФАЗОВЫХ ГОЛОГРАММ

Большое достоинство тонких голограмм состоит в относительной простоте их изготовления и эксплуатации. В то же время им свойственна невысокая дифракционная эффективность (ДЭ) [1, 2], что ограничивает область их применения. Возможности, предоставляемые голограммой, записанной на двух тонких пространственно разделенных светочувствительных слоях, впервые были теоретически и экспериментально исследованы в работах [3—5]. Показано, что с помощью двухслойных голограмм можно значительно повысить ДЭ. Кроме того, в отличие от тонких однослойных голограмм они обладают высокой спектрально-угловой селективностью. Для фазовой двухслойной голограммы плоских волн экспериментально получено значение ДЭ, равное 50%, что намного превышает теоретический предел ДЭ тонкой однослойной фазовой голограммы. Таким образом, переход от однослойной к двухслойной голограмме целесообразен и практически оправдан. В связи с этим представляет интерес изучение свойств неоднородных голограмм [6, 7], в том числе периодических структур, состоящих из трех и более тонких светочувствительных слоев.