АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1987

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

УДК 519.24

Я. А. БЕДРОВ
(Ленинград)

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ, ЛЕВАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ ЗАДАНА КЛАССАМИ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Введение. Практика изучения закономерностей функционирования сенсорных систем человека часто сталкивается с задачей определения зависимости некоторой воспринимаемой человеком характеристики сигнала (например, высоты или громкости звука) от его параметров. Характерной особенностью таких задач является то, что значение этой характеристики не может быть определено человеком количественно. В этом случае для получения экспериментальных данных, необходимых для идентификации искомой зависимости, поступают следующим образом.

Выбирают эталонный сигнал с некоторым неопределенным значением y_0 изучаемой характеристики. Задают наборы

$$x_i^T = |x_{1i}, \ldots, x_{mi}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

значений m аргументов сигнала. Для каждого i-го набора испытуемый подбирает значение $(m+1)$-го аргумента z_i так, чтобы сигнал и эталон воспринимались одинаково с точки зрения изучаемой характеристики.

Задача идентификации линейной зависимости изучаемой характеристики от параметров сигнала на основании данных такого эксперимента приводит к необходимости рассмотрения возможности оценивания параметров в линейной модели вида

$$y_0 = x_i^T\beta + z_i\alpha, \quad i = 1, \ldots, n,$$

при условии, что значение константы y_0 не определено. Насколько нам известно, в литературе, посвященной методам оценивания параметров линейной модели, этот случай не рассматривался [1—3].

Ниже дается формальная постановка задачи и показана возможность оценивания вектора β/α с помощью метода наименьших квадратов.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим линейную модель

$$y = x^T\beta + z\alpha, \tag{1}$$

где $x - m$ — вектор значений аргументов; $z - (m+1)$-й аргумент; $\beta - m$ — вектор неизвестных параметров; α — неизвестный параметр.

Будем предполагать, что значение y линейной формы не может быть измерено, но возможно сравнение его с некоторым фиксированным, но неизвестным значением y_0.

Пусть экспериментальное изучение линейной формы (1) производится следующим образом. Задается некоторый набор различных значений $\{y_{0i}\}_1^k$. Для каждого из них, в свою очередь, выбирается некоторое множество m векторов значений аргументов $\{x_{ij}\}_{j=1}^{n(i)}$. Для каждого x_{ij} значение z_{ij} аргумента z выбирается так, чтобы значение y равнялось заданному значению y_{0i}. Если ошибки сравнения не имеют постоянной составляющей и статистически независимы, то получаемые в результате эксперимента данные удовлетворяют следующей модели:

$$Y_{0i} = X_i\beta + Z_i\alpha + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{2}$$

где Y_{0i} — неизвестный $n(i)$-вектор вида $|y_{0i}, \ldots, y_{0i}|^T$; X_i — $n(i)\times m$ заданная матрица; Z_i — $n(i)$-вектор; ε_i — случайный $n(i)$-вектор, удовлетворяющий условиям

$$E[\varepsilon_i] = 0; \quad D[\varepsilon_i] = \sigma^2 I. \tag{3}$$

Будем предполагать, что векторы $\{\varepsilon_i\}_1^k$ статистически независимы, значение параметра σ неизвестно:

$$\operatorname{rank}\| X_1^T \mid \cdots \mid X_k^T \| = m. \tag{4}$$

Требуется получить оценку метода наименьших квадратов для вектора β/α. Перепишем модель (2) в форме

$$Y_{0i}/\alpha - Z_i = X_i\beta/\alpha + \varepsilon_i/\alpha, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{5}$$

Представим матрицы $\{X_i\}_1^k$ в виде

$$X_i = X_{i0} + X_i^*, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{6}$$

где элементами каждого столбца матрицы X_i^* является среднее значение соответствующего столбца матрицы X_i, а элементами того же столбца матрицы X_{i0} — отклонения от этого среднего.

В этих обозначениях система (5) может быть записана в форме

$$Y_{0i}/\alpha - Z_i - X_i^*\beta/\alpha = X_{i0}\beta/\alpha + \varepsilon_i/\alpha, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{7}$$

Очевидно, что в силу (2) и (6)

$$Y_{0i}/\alpha - X_i^*\beta/\alpha = e_i\gamma_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{8}$$

здесь $\{\gamma_i\}_1^k$ — скаляры; e_i — единичный $n(i)$-вектор.

Введем следующие обозначения:

$$Z^T = | -Z_1^T, \ldots, -Z_k^T |;$$
$$X^T = \| X_{10}^T \mid \ldots \mid X_{k0}^T \|;$$
$$e^T = | e_1^T\gamma_1, \ldots, e_k^T\gamma_k |;$$
$$\varepsilon^T = | \varepsilon_1^T, \ldots, \varepsilon_k^T |.$$

В этих обозначениях система (7) запишется в форме

$$Z + e = X\beta/\alpha + \varepsilon/\alpha.$$

В силу статистической независимости векторов $\{\varepsilon_i\}_1^k$

$$D[\varepsilon/\alpha] = \sigma^2/\alpha^2 I.$$

Если $\operatorname{rank} X = m$, то оценка метода наименьших квадратов $\tilde{\beta}$ вектора β/α запишется в виде

$$\tilde{\beta} = (X^TX)^{-1}X^T(Z + e).$$

Очевидно, что в силу центрированности строк матрицы X^T и структуры вектора e $X^Te = 0$, откуда окончательно получим

$$\tilde{\beta} = (X^TX)^{-1}X^TZ. \tag{9}$$

Пример. Рассмотрим применение описанного метода оценивания на следующем модельном примере. Для модели вида

$$y = x_{1i}\beta_1 + x_{2i}\beta_2 + z_i\alpha + \varepsilon_i,$$

φ	σ	$\tilde{\beta}_1$	$\tilde{\beta}_2$	φ	σ	$\tilde{\beta}_1$	$\tilde{\beta}_2$

где $\beta_1=3$, $\beta_2=2$, $\alpha=1$, $\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2)$, значения регрессоров x_{1i} и x_{2i} задавались с помощью выражений

$$x_{1i}=\sin(2\pi i/10);$$

$$x_{2i}=\sin(2\pi i/10+\pi/2\varphi), \quad i=1, \ldots, 10.$$

Для имитации поведения испытуемого в эксперименте с подбором параметра значение регрессора z определялось по формуле

$$z_i=(y-x_{1i}\beta_1-x_{2i}\beta_2-\varepsilon_i)/\alpha, \quad i=1, \ldots, 10,$$

при значениях $y=0{,}4$ и $y=0{,}8$. На основании полученных значений регрессоров вычислялась оценка $\tilde{\beta}$ вектора $|\beta_1, \beta_2|^T$ по формуле (9). Значения компонент вектора, найденные при различных комбинациях параметров σ и φ, приведены в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рао Р. С.** Линейные статистические методы и их применения.— М.: Наука, 1968.
2. **Себер Дж.** Линейный регрессионный анализ.— М.: Мир, 1980.
3. **Hocking R. R.** Developments in linear regression methodology: 1959—1982 // Technometrics.— 1983.— V. 25, N 3.— P. 219—230.

Поступила в редакцию 18 декабря 1984 г.

УДК 528.722.024

Л. Л. КОНЦЕВИЧ, М. Л. КОНЦЕВИЧ, А. Х. ШЕНЬ

(Москва)

ДВА АЛГОРИТМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФОРМЫ

Введение. В настоящей работе рассматриваются математические вопросы, возникающие при решении задачи интерпретации глубины по параллаксу движения и бинокулярному параллаксу.

Сформулируем общую задачу. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве S выделен конечный набор точек $A=\{a_i\}$. Этот набор (число точек в нем обозначим n) будем называть объектом. Допустим, что на S действуют m операторов проектирования p_j в двумерные евклидовы пространства F_j. В каждом F_j точке $a_i \in A$ соответствует точка $a_{ji}=p_j(a_i)$.

Допустим, что не известны ни $A \subset S$, ни p_j. Известны только a_{ji} и их соответствие (т. е. известно, какие точки являются различными проекциями одной). Известен также класс возможных отображений p_j. Требуется восстановить A.

Будут описаны решения следующих задач этого типа:

1) восстановление формы объекта по трем и более ортогональным проекциям;

2) восстановление формы объекта по двум центральным проекциям в том случае, когда для каждой проекции известны основание перпендикуляра из центра проектирования на плоскость проектирования и его длина.