

$= 2,3 \cdot 10^7$ для $M = 10$, при $q_0 = 4 \cdot 10^8$ для $M = 16$, а в случае пуассоновского потока — при $\bar{N} = 10^5$ для $M = 6$, при $\bar{N} = 2 \cdot 10^6$ для $M = 10$, при $\bar{N} = 2 \cdot 10^7$ для $M = 12$.

Сравнивая рис. 1 и 2, можно также сделать вывод о том, что общий ход зависимостей $\Delta = \Delta(M)$ примерно одинаков как в случае наблюдения сигнала в аддитивном шуме, так и для ситуации, когда информационный сигнал описывается пуассоновским потоком. В частности, для небольших значений q_0 и \bar{N} зависимости $\Delta(M)$ имеют более «резкий» минимум, а при увеличении q_0 и \bar{N} область значений M , близких к оптимальному, увеличивается, причем менее чувствительным оказывается отклонение M от оптимального в сторону больших значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Луитт Р. М. Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований // ТИИЭР.— 1983.— Т. 71, № 3.
2. Моисеев В. Н., Троицкий И. Н., Устинов Н. Д. Потенциальная точность томографического процесса // Автометрия.— 1987.— № 1.
3. Бори М., Вольф Э. Основы оптики.— М.: Наука, 1973.
4. Троицкий И. Н. Выбор отношения сигнал/шум и размера считывающей апертуры в радиографии // Дефектоскопия.— 1974.— № 2.
5. Заворуев Ю. В., Троицкий И. Н. К вопросу определения оптимальных параметров фотозмульсионного слоя // ЖНиПФиК.— 1976.— № 4.
6. Заворуев Ю. В., Троицкий И. Н. Об оптимальном числе коэффициентов обобщенного ряда Фурье при распознавании маломощных оптических изображений // Автометрия.— 1977.— № 4.

Поступила в редакцию 29 ноября 1985 г.

УДК 535.317.1

В. А. ТИХОМИРОВ, И. Н. ТРОИЦКИЙ, А. Г. ШЕБАЛИН
(Москва)

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Постановка задачи. Одной из важных задач, которые необходимо решать при постановке томографического эксперимента, является определение минимального уровня информационного сигнала, необходимого для восстановления томографических изображений [1]. Теоретическое рассмотрение этого вопроса часто ограничивается учетом только отдельных факторов, что объясняется громоздкостью соответствующих расчетов. Более полно данная задача может быть решена методом статистического моделирования томографического процесса, при котором становится проще учет различных факторов, определяющих качество изображения. Такой метод позволяет определить необходимый уровень сигнала как на основании непосредственного зрительного анализа качества изображений, смоделированных при различных условиях, так и путем набора статистических данных их качества, оцененного по тому или иному критерию. В самом общем виде для проведения статистического моделирования необходимо последовательное выполнение следующих этапов:

1. Математическое описание анализируемого метода получения томографического изображения из имеющихся зарегистрированных проекций (исходных данных), т. е. алгоритма восстановления.

2. Формирование математической (детерминистской и статистической) модели исходных данных.

3. Статистическое моделирование исходных данных.

4. Получение реализаций случайных изображений в соответствии с выбранным алгоритмом восстановления.

5. Статистический анализ полученных изображений.

В настоящей работе приводится иллюстрация последовательного выполнения сформулированных этапов при конкретных заданных условиях. С целью максимальной наглядности в дальнейшем привлекается ряд упрощающих предположений. О том, как осуществить статистическое моделирование без этих предположений, сообщается в конце работы.

I. Алгоритм восстановления изображений. Рассмотрим в качестве алгоритма восстановления регуляризованное обратное преобразование Радона [2], связывающее зарегистрированные проекции с искомой функцией изображения $f_b(x, y)$:

$$f_b(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-a}^a \tilde{R}(s, \varphi) q_\alpha(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) ds, \quad (1)$$

где $\tilde{R}(s, \varphi)$ — исходные данные; $q_\alpha(\cdot)$ — регуляризующее ядро преобразования; a — радиус области моделирования. Выражение (1) соответствует случаю отсутствия ограничения по числу проекций, т. е. $\tilde{R}(s, \varphi)$ можно считать задаваемой непрерывно в области $0 \leq \varphi \leq \pi$, $-a \leq s \leq a$. Используемые виды $q_\alpha(\cdot)$ описаны, например, в [2]. Проведем моделирование с функцией вида

$$q_\alpha(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) = 2\pi \frac{\alpha^2 - 4\pi^2 (x \cos \varphi + y \sin \varphi - s)^2}{[\alpha^2 + 4\pi^2 (x \cos \varphi + y \sin \varphi - s)^2]^\alpha} \quad (2)$$

где α — параметр регуляризации.

II. Математическая модель исходных данных. 1. *Детерминистская модель.* Рассмотрим в качестве примера случай рентгеновской томографии с просвечивающим излучением малой мощности и малым поглощением излучения в объекте. Будем при моделировании ориентироваться на одну из реальных ситуаций, имеющих место при получении исходных данных. Пусть на объект падает излучение интенсивности J_0 . Тогда на выходе из объекта вдоль луча s (в прямоугольной системе координат $\{s, p\}$) сигнал имеет интенсивность

$$J(s) = J_0 \exp\left(-\int_{-a}^a \mu(p, s) dp\right), \quad (3)$$

где $\mu(p, s)$ — коэффициент поглощения излучения в объекте. Первая ситуация соответствует случаю, когда в силу малости $\mu(p, s)$ в (3) можно произвести разложение в степенной ряд и учесть первые два члена

$J(s) \approx J_0 - J_0 \int_{-a}^a \mu(p, s) dp$. Вторая ситуация соответствует случаю исполь-

зования регистрирующей пленки с логарифмической характеристикой

$J(s) = \ln J_0 - \int_{-a}^a \mu(p, s) dp$. В том и в другом случае зарегистрированное

распределение представляет собой постоянную составляющую интенсивности, связанную с мощностью исходного излучения, и информационный сигнал, являющийся томографической проекцией (второе слагаемое). Вследствие линейности обратного преобразования Радона по отношению к исходным данным восстановление изображения также происходит в виде двух слагаемых: первого, вызванного постоянной составляющей исходных данных, и второго — информационного. Вид первого слагаемого априорно известен, и оно может быть исключено из рассмотрения путем вычитания из восстановленного образа. В результате можем рассматривать изолированно моделирование только информационной части исходных данных и восстановленного изображения, что и будет выполняться в дальнейшем.

2. *Статистическая модель.* Квантовая структура излучения и характер его взаимодействия с регистратором приводят к тому, что исходные данные представляют собой совокупность случайным образом зафиксированных координат точек детектирования (отсчетов) $\{s_i, \varphi_i\}$ и описываются пуассоновским потоком в плоскости регистрации [3]. Плотность вероятности реализации $\{s_i, \varphi_i\}$, $i = 1, \dots, n$, в этом случае равна

$$P\{\{s_i, \varphi_i\}, n\} = \frac{1}{n!} N^n \prod_{i=1}^n R(s_i, \varphi_i) \exp\left(-N \int_0^\pi d\varphi \int_{-a}^a R(s, \varphi) ds\right), \quad (4)$$

где n — число отсчетов, реализовавшееся в исходных данных; $R(s, \varphi)$ — томографическая проекция. Коэффициент N определяется условием нормировки

$$n_c = N \int_0^\pi d\varphi \int_{-a}^a R(s, \varphi) ds, \quad (5)$$

где \bar{n}_c — среднее число отсчетов в исходных данных. Будем пренебрегать влиянием размеров центров регистрации и их оптических свойств на процесс восстановления изображения. С математической точки зрения каждый из таких центров может быть описан δ -функцией с координатами, соответствующими реальному центру. Тогда, если в исходных данных реализовалось n отсчетов, они могут быть представлены в виде

$$\bar{R}(s, \varphi) = \sum_{i=1}^n \delta(s - s_i, \varphi - \varphi_i). \quad (6)$$

III. *Статистическое моделирование исходных данных.* Моделирование начинается с задания \bar{n}_c и формы $R(s, \varphi)$. Формула (4) может быть представлена в виде

$$P\{\{s_i, \varphi_i\}, n\} = P(n) P\{\{s_i, \varphi_i\}/n\}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что моделирование $\bar{R}(s, \varphi)$ можно провести в два этапа. Сначала «наигрывается» случайное число n в соответствии с распределением Пуассона $P(n)$. Затем для полученного числа точек n должны быть «наиграны» пары координат (s_i, φ_i) исходных данных в соответствии с плотностью распределения в области $-a \leq s \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \pi$:

$$P(s_i, \varphi_i) = R(s_i, \varphi_i) \int_0^\pi \int_{-a}^a R(s, \varphi) ds d\varphi. \quad (8)$$

«Наигрыш» координат случайных отсчетов может быть осуществлен последовательно для φ_i и s_i на ЭВМ по методике, изложенной в [4]. Для этого отдельно с помощью стандартной программы генерации равномерно распределенных чисел получается последовательность таких чисел $\{r_{1i}, r_{2i}\}$, которые затем пересчитываются в s_i, φ_i по известному правилу.

IV. *Моделирование томографических изображений.* Формально томографическое изображение моделируется путем подстановки смоделированных исходных данных $\bar{R}(s, \varphi)$ (6) в алгоритм восстановления (1). Это приводит в общем виде к выражению для моделируемого изображения

$$\tilde{f}_b(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n q_{\alpha} (x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i - s_i). \quad (9)$$

В соответствии с (9) изображение рассчитывается на ЭВМ. Для расчета и вывода на монитор функции $\tilde{f}_b(x, y)$ должна быть задана сетка $\{x_k, y_k\}$. С целью исключения побочных эффектов, связанных с наблюдением регулярной структуры, в настоящей работе в примерах восстановления изображений проводилось на случайной сетке $\{x_k, y_k\}$. Значения x_k, y_k получались путем равновероятного «наигрыша» $5,4 \times 10^4$ чисел в интервале $(-a, a)$.

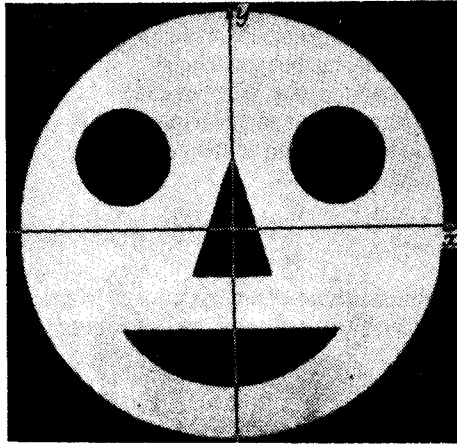


Рис. 1. Тест-функция

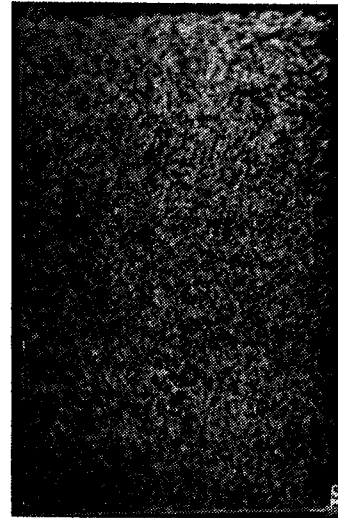


Рис. 2. Проекция тест-функции

V. Результаты моделирования. Моделирование проводилось для заданной тест-функции (фантома) вида

$$f_T(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x^2 + y^2 > 1, \\ & (x - 0,5)^2 + (y - 0,33)^2 < 0,053, \\ & (x + 0,5)^2 + (y - 0,33)^2 < 0,053, \\ -0,23 < y < 0,35 & \text{и } (y - 0,35)/3 < x < -(y - 0,35)/3, \\ -0,75 < y < -0,48 & \text{и } x^2 + y^2 < 0,4225, \\ 1 & \text{при других } x \text{ и } y. \end{cases} \quad (10)$$

Соответствующее этой функции «идеальное» изображение показано на рис. 1. Проекция $R(s, \varphi)$ аналитически связаны с $f_T(x, y)$ следующим образом:

$$R(s, \varphi) = \int_{-1}^1 f_T(P \cos \varphi - s \sin \varphi; P \sin \varphi + s \cos \varphi) dp. \quad (11)$$

Вид реализации исходных данных, соответствующих проекции (11), и тест-функции (10) при $\bar{n}_c = 3 \times 10^4$ показан на рис. 2. В процессе

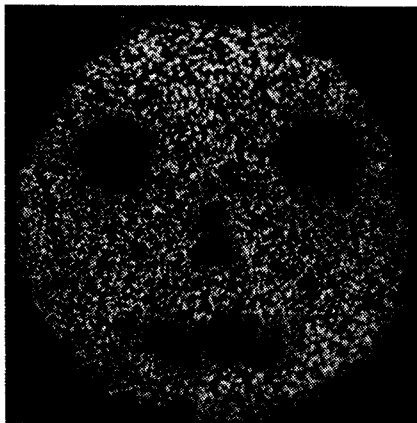


Рис. 3. Восстановленное изображение при $\bar{n}_c = 3 \cdot 10^4$, $\alpha = 0,08$

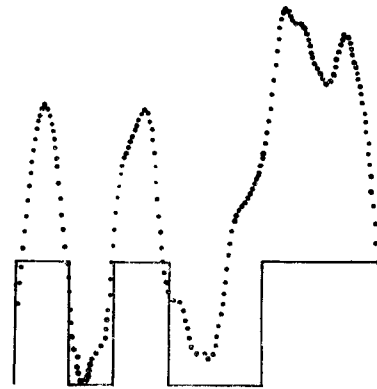


Рис. 4. Сечение восстановленного изображения и вид соответствующей тест-функции при $\bar{n}_c = 3 \cdot 10^4$, $\alpha = 0,08$

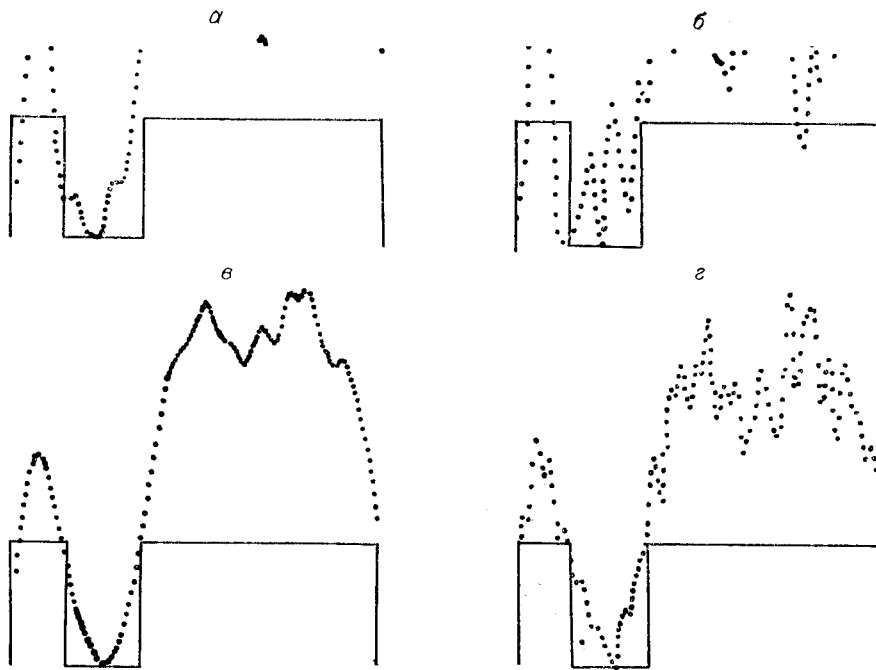


Рис. 5. Сечение фрагмента восстановленного изображения и вид соответствующей тест-функции:

$a - \bar{n}_c = 10^4, \alpha = 0,08$; $б - \bar{n}_c = 10^4, \alpha = 0,04$; $в - \bar{n}_c = 8 \cdot 10^4, \alpha = 0,08$; $г - \bar{n}_c = 8 \cdot 10^4, \alpha = 0,04$

моделирования изучалось совместное влияние на качество изображения среднего числа отсчетов в исходных данных \bar{n}_c и параметра регуляризации α . На рис. 3 приведен образец смоделированного томографического изображения при $\bar{n}_c = 3 \times 10^4$ и $\alpha/\pi = 0,08$. Анализ качества изображений проводился по трем признакам:

- контуры областей изображения в плоскости (x, y) ;
- вид восстанавливаемой функции на заданной линии $x = x_0$, т. е. сечение изображения $f_b(y)$;
- статистическое распределение $f_b(x_0, y_0)$ в заданной точке, получаемое по многим реализациям. Оценка качества передачи контуров и внутренней структуры $f_b(x, y)$ анализировалась по изображениям, подобным рис. 3.

Примеры графиков зависимости $f_b(y)$ приведены на рис. 4, 5 $a-g$. На рис. 4 показана зависимость f_b от y для тест-функции (10) при $x = 0$. На рис. 5 изображен ход f_b для тест-функции (область с центром в точке $x = -0,5, y = 0,33$) по направлению, проходящему через центр области и начало координат. Для сравнения на фотографиях показан ход соответствующей тест-функции.

На рис. 6, $a, б$ приведены полученные по 100 реализациям интегральные распределения вероятности $F(f_b)$ для точек областей нулевого и единичного уровней тест-функции. Эти зависимости удовлетворительно аппроксимируются нормальным распределением. Параметры аппроксимирующих распределений (среднее значение \bar{f}_b и среднеквадратическое отклонение σ) представлены в табл. 1.

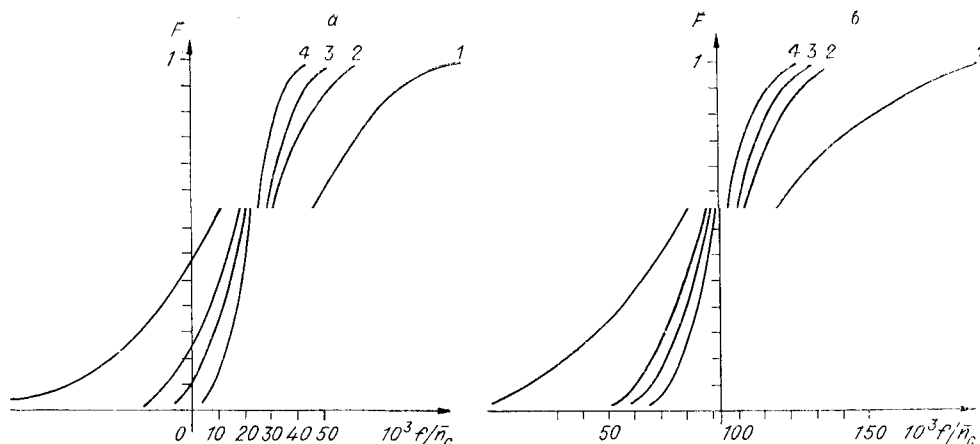


Рис. 6. Нулевой (а) и единичный (б) уровни тест-функции. Интегральные распределения:

$$1 - \bar{n}_c = 10^3; \quad 2 - 5 \cdot 10^3; \quad 3 - 10^4; \quad 4 - 2 \cdot 10^4$$

VI. Статистический анализ результатов моделирования. Результаты моделирования позволили проанализировать характер флуктуационных искажений томографических изображений, получаемых при слабом информационном сигнале.

Прежде всего было рассмотрено влияние количества информационных отсчетов в исходных данных на качество воспроизведения внутренней структуры изображения. Оно зависит, конечно, от сложности изображения, поэтому все проводимые оценки будут относиться к изображениям, по сложности близким к использованной при моделировании тест-функции. Установлено, что при уменьшении параметра α потенциально возможно более точное формирование изображения, но одновременно требуется увеличение числа сигнальных отсчетов в исходных данных. В противном случае при меньших α флуктуации в изображении и искажения контуров оказываются сильнее и не позволяют улучшить качество изображения. Так, например, удовлетворительное качество формирования контуров и структуры изображения достигается при $\alpha = 2\pi \cdot 0,08$ и $\bar{n}_c \geq 3 \times 10^4$.

Верность воспроизведения значений функции в пределах области изображения оценивалась по «сечениям» изображения, подобным представленным на рис. 4, 5. На полученных реализациях хорошо виден характер искажений. Они представляют собой знакопеременные отклонения восстановленного значения от «идеального» (среднего). Отклонения одного знака и примерно одной величины сосредоточены в областях корреляции флуктуаций. Моделирование при различных α показало, что размер области корреляции флуктуаций в плоскости изображения имеет порядок α .

Таблица 1

\bar{n}_c	$f_T = 1$		$f_T = 0$		\bar{n}_c	$f_T = 1$		$f_T = 0$	
	\bar{f}_{b1}	σ_1	\bar{f}_{b0}	σ_0		\bar{f}_{b1}	σ_1	\bar{f}_{b0}	σ_0
1000	93	50	24	37,3	10 000	930	160	240	125
5000	465	110	120	88,5	20 000	1860	205	480	170

Для удовлетворительного восстановления «сечения» необходимо большее число сигнальных отсчетов, чем для контуров изображения. Так, например, при $\alpha = 0,05-0,08$ форма сечения передается при $\bar{n}_c \sim 5 \times 10^4$. При уменьшении α для восстановления сечения требуется более резкое увеличение \bar{n}_c , чем для восстановления контуров изображения. При $\alpha = 0,04$ хорошее качество f_b не достигается даже при $\bar{n}_c = 8 \times 10^4$.

Основными характеристиками, описывающими флуктуационные искажения, являются закон распределения случайных значений f_b и корреляционная функция. Анализ данных моделирования позволяет применить для f_b нормальную аппроксимацию функций распределения. При этом, как следует из табл. 1, относительный уровень флуктуаций σ/\bar{f}_b пропорционален $1/\sqrt{\bar{n}_c}$, что характерно для обработки подобных пуассоновских потоков.

Основываясь на нормальной аппроксимации распределения f_b и используя сделанную оценку размера области корреляции, можно предсказать вероятность правильного формирования восстановленных уровней в целом по изображению. Для этого представим процесс формирования изображения как независимое приобретение корреляционными областями некоторых случайных значений (определяемых соответствующими средними уровнями). Количество таких областей задается размерами всего изображения и области корреляции. Можем оценить вероятность P того, что все значения f_b будут выше некоторого порога C в области, где $f_T = 1$, и соответственно ниже C там, где $f_T = 0$:

$$P = \Phi^{M_0} \left(\frac{C - \bar{f}_{b0}}{\sigma_0} \right) \left[1 - \Phi \left(\frac{C - \bar{f}_{b1}}{\sigma_1} \right) \right]^{M_1}, \quad (12)$$

где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности; M_1, M_0 — количества ячеек корреляции соответственно в областях единичного и нулевого уровней тест-функции.

Моделирование с тест-функцией (10) при $\alpha = 0,08 \cdot 2\pi$ позволяет сделать оценки: $M = 124, M = 32$. Результаты расчета P при $C = 0,6\bar{f}_{b0} + 0,4\bar{f}_{b1}$ приведены в табл. 2. Эти данные являются уже объективной количественной оценкой зависимости качества томографического изображения от мощности сигнала, особенно для случая последующего автоматизированного анализа таких изображений.

Обобщение методики статистического моделирования. В целях наибольшей наглядности были приведены примеры моделирования томографических изображений при условии ряда упрощающих предположений. Однако наличие этих предположений не является обязательным, и статистическое моделирование может быть проведено при гораздо более общих условиях. Укажем основные пути, позволяющие обобщить изложенную выше методику статистического моделирования.

Прежде всего отметим свободу выбора алгоритма восстановления изображения. В частности, вместо (1) может моделироваться дискретное преобразование, восстанавливающее изображение по конечному числу проекций. В этом случае в (9) появляется двойная сумма — по числу проекций и по числу отсчетов в каждой проекции. Примеры изображений, смоделированных при числе проекций, равном 3 и 5 и $\bar{n}_c = 2 \times 10^4$, показаны на рис. 7, а, б.

В приведенных примерах использовались «идеальные» проекции $R(s, \varphi)$, соответствующие выбранной тест-функции. При моделировании могут быть учтены искажения проекций, связанные с реальными физическими процессами при формировании исходных данных. Для этого при моделировании исходных данных вместо проекций $R(s, \varphi)$, соответствующих используемой тест-функции, учитывается $R(s, \varphi)T(s, \varphi)$, где

Таблица 2

\bar{n}_c	10^3	5×10^3	10^4	2×10^4
P	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	0,35	0,98

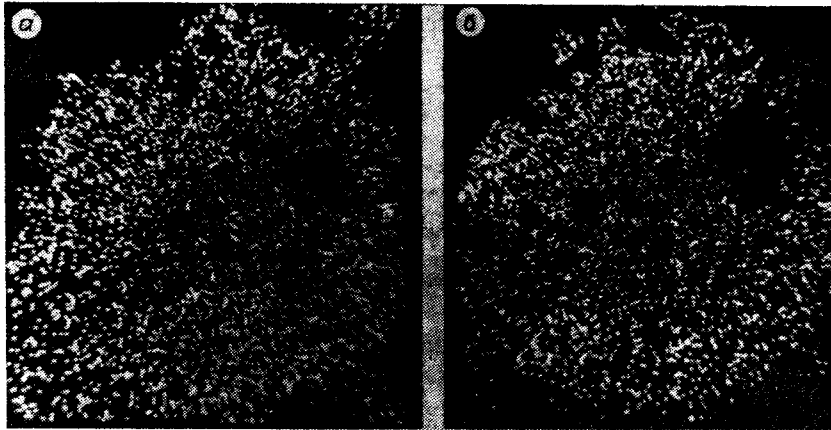


Рис. 7. Восстановление изображений при конечном числе проекций:
а — по трем, б — по пяти проекциям

$T(s, \varphi)$ — функция искажения. В этом случае в выражении (4) появляется произведение вида $\prod_{i=1}^n R(s_i, \varphi_i) T(s_i, \varphi_i)$.

Иллюстративные примеры были рассчитаны для условий отсутствия фона и шумов регистрации исходных данных. Для учета фонового излучения и шумов регистратора в (4) может быть введена плотность шумовых отсчетов $n(s, \varphi)$, что приведет к записи вероятности реализации $\bar{R}(s, \varphi)$ с учетом произведения $\prod_{i=1}^n [n(s_i, \varphi_i) + NR(s_i, \varphi_i) T(s_i, \varphi_i)]$.

Реально регистрация проекций на фотоматериале происходит таким образом, что экспонированные зерна материала имеют различный размер и оптические свойства. Этот разброс проявляется на стадии восстановления изображения в виде различия вкладов каждого из центров при оцифровке зарегистрированных данных. Моделирование позволяет учесть этот эффект путем присвоения в (6) каждому отсчету некоторого случайного веса A_i . Величины A_i должны «наигрывать» для всех отсчетов независимо в соответствии с задаваемой плотностью распределения.

Таким образом, рассмотренная методика моделирования позволяет учесть многие реальные факторы, определяющие качество томографических изображений при слабом информационном сигнале.

В заключение авторы выражают благодарность Т. И. Петровой, подготовившей часть программ для выполнения моделирования на ЭВМ приведенных в работе изображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии/Пер. с англ.— М.: Мир, 1983.
2. Баррет Х. Х., Суинделл У. Аналоговые методы восстановления вида объекта при трансаксальной томографии // ТИИЭР.— 1977.— Т. 65, № 1.
3. Троицкий И. Н. Выбор отношения сигнал/шум и размеров считывающей апертуры в радиографии // Дефектоскопия.— 1974.— № 2.
4. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Курс статистического моделирования.— М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 3 февраля 1986 г.