

$$\begin{aligned}
&= E\{\Phi_1(2, 1)v(1) + \Gamma_1(2, 1)\eta(1)\}v^T(1)V^{-1}(1)H(1) = \\
&= \Phi_1(2, 1)V(1)V^{-1}(1)H(1) = \Phi_1(2, 1)H(1).
\end{aligned}$$

В заключение отметим, что использованная в промежуточных выкладках данного приложения матрица $(\Gamma Q \Gamma^T)^{-1}$ может рассматриваться как условная запись обращения матрицы $(\Gamma Q \Gamma^T + \delta^2 I)$, положительно определенной при любом $\delta \neq 0$, а полученные в итоге рекуррентные соотношения (37) — (40) — как результат предельного перехода при $\delta \rightarrow 0$, вследствие чего они остаются справедливыми и при вырожденной матрице $(\Gamma Q \Gamma^T)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление.— М.: Энергия, 1973.
2. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее приложение в связи и управлении.— М.: Связь, 1976.
3. Сизов В. П. Оптимальная оценка состояния линейных динамических систем при коррелированных ошибках измерений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1984.— № 3.
4. Эльясберг П. Е. Определение движения по результатам измерений.— М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 16 февраля 1987 г.

УДК 681.5.015 : 519.6

А. О. ЕГОРШИН

(Новосибирск)

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ФИЛЬТРАЦИИ (МЕТОД ВИ)

Введение. Хорошо известны калмановский и винеровский методы фильтрации и восстановления случайных процессов на основе динамической модели сигналов: предполагается, что полезный восстанавливаемый сигнал есть выход динамической системы (линейной). Такая модель сигнала часто более адекватна реальности, чем описание сигналов с помощью заданной системы функций. В методе фильтрации Винера динамическая система описывается интегральным уравнением свертки. В методе Калмана модель восстанавливаемого сигнала задана дифференциальными или разностными уравнениями для ее вектора состояния. Способы описания модели сигнала обуславливают и вид получаемых решений задач восстановления. После довольно сложной процедуры решения уравнения Винера — Хопфа можно получить импульсную функцию физически реализуемого оптимального фильтра. В методе Калмана уравнения динамической модели сигнала определяют и соответствующие уравнения для фильтра. Его оптимальный коэффициент усиления вычисляется с помощью матричного уравнения Риккати. Входной сигнал фильтра — обновляющийся процесс (измерение минус прогноз). В фильтре Калмана используется приближенная информация о начальном состоянии системы. По окончании переходного процесса стационарный

фильтр Калмана эквивалентен фильтру Винера при одинаковых физических моделях сигналов (т. е. при корреляционных функциях, исходных в задаче Винера, соответствующих случайным процессам уравнений фильтра Калмана).

От фильтра Винера к фильтру Калмана приводит своего рода сужение класса моделей сигналов до физически реализуемых, хотя и нестационарных. В задаче Винера заданы только корреляционные функции сигналов, что представляет собой, по-видимому, наиболее общий способ описания стационарной линейной динамической системы (поэтому здесь и возможны физически нереализуемые решения). В задаче Калмана задана более конкретная структура модели сигнала — дифференциальные или разностные уравнения для состояний, что и определяет возможность получения более эффективных вычислительных решений.

Следующий шаг сужения класса моделей сигналов — описание этих моделей в каноническом виде, иначе говоря, в виде одного (в общем случае векторного) дифференциального или разностного уравнения высокого порядка [1]. Это означает использование в пространстве состояний не произвольного базиса, а одного из тех, которые связаны с матрицей управляемости [2]. В итоге имеем дело с уравнениями не для состояний, а для наблюдаемых сигналов.

В статье представлены эффективные вычислительные решения задач оптимизации для стационарных моделей указанного типа. Еще большее упрощение вычислительной схемы достигается для одномерных задач — моделей с одним выходом. Такие модели могут быть описаны одним уравнением, а не системой.

Исходной позицией при постановке рассмотренных здесь задач оптимизации линейных динамических моделей является отказ от так называемой «концепции состояний» в пользу «концепции реализаций» [1]. Изложенные здесь задача и метод сглаживания и идентификации названы вариационными (задача и метод ВИ).

Концепция реализаций. Вместо $m+n$ уравнений для состояний модели

$$\dot{\hat{\mathbf{t}}} = F\hat{\mathbf{t}} + E\hat{\mathbf{x}}, \quad \hat{\mathbf{y}} = H^T\hat{\mathbf{t}} \quad (1)$$

(\mathbf{t} — n -вектор, \mathbf{y} — m -вектор, \mathbf{x} — l -вектор) можно найти разными способами m уравнений для ее наблюдаемых сигналов \mathbf{y} , \mathbf{x} :

$$\hat{\mathbf{y}}(\tau) + \sum_{i=1}^n a_i \hat{\mathbf{y}}^{(i)}(\tau) - \sum_{i=0}^n b_i \hat{\mathbf{x}}^{(i)}(\tau) = 0, \quad \tau \in [0, T_n]. \quad (2)$$

В дискретных задачах вместо $m+p$ уравнений для отсчетов

$$\hat{\mathbf{t}}_{k+1} = \Phi\hat{\mathbf{t}}_k + \mathcal{E}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, \quad \hat{\mathbf{y}}_k = \mathcal{H}^T\hat{\mathbf{t}}_k \quad (3)$$

могут быть получены m разностных уравнений

$$\hat{\mathbf{y}}_k + \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \hat{\mathbf{y}}_{k-p+i} - \sum_{i=0}^{p-1} \beta_i \hat{\mathbf{x}}_{k-p+i} - \beta_p \hat{\mathbf{x}}_k = 0, \quad k = \overline{0, N}. \quad (4)$$

В уравнениях (2), (4) a_i , α_i — $m \times m$ -матрицы, b_i , β_i — $m \times l$ -матрицы. Назовем реализацией совокупность отсчетов сигналов \mathbf{y} , \mathbf{x} в интервале наблюдений

$$\mathbf{z} = |\Phi_{-p}^T, \dots, \Phi_N^T|^T, \quad \Phi_i = |\mathbf{y}_i^T, -\mathbf{x}_i^T|^T, \quad i = \overline{-p, N}. \quad (5)$$

Здесь Φ — m_i -вектор ($m_i = m+l$) наблюдаемых сигналов. Тогда совокупность уравнений (4) может быть записана в виде условий ортогональности для допустимых реализаций $\hat{\mathbf{z}}$ [1]:

$$A^T \hat{\mathbf{z}} = 0, \quad (6)$$

оптимизации коэффициентов уравнения (4). В калмановской задаче фильтрации модель сигнала полностью задана, т. е. известны коэффициенты уравнений (параметры модели). Вариационная задача, поставленная здесь, предусматривает также возможность и одновременного (совместного) решения задачи оптимизации параметров модели.

И задачи сглаживания и фильтрации, и задача оптимизации параметров модели решены с применением метода ВИ на основе быстрых алгоритмов. Высокая помехоустойчивость (следствие вариационной постановки задачи) и вычислительная оперативность (следствие способа решения задачи) делают весьма перспективным применение предложенного метода в задачах управления, обработки сигналов, идентификации и моделирования сложных систем, в частности систем, связанных с движением.

Задача оптимизации динамической системы по дискретным наблюдениям. Решается следующая задача сглаживания сигналов (А) и оптимизации параметров их модели (Б).

Дано: число p и реализация z сигналов y, x в интервале наблюдения. Это $M+1$ отсчет m_1 -векторного ($m_1 = m+l$) сигнала $\Phi = [y^T, -x^T]^T$ (5).

Найти: сглаженную реализацию \hat{z} такую, что: 1) она удовлетворяет разностному уравнению вида (4) и 2) минимально отклоняется от заданной реализации z . Критерий близости

$$J = \sum_{-p}^N (\Phi_i - \hat{\Phi}_i)^T r^+ (\Phi_i - \hat{\Phi}_i), r^+ = \tilde{I} \tilde{r}^{-1} \tilde{I}^T, r = \tilde{I} \tilde{r} \tilde{I}^T, \quad (9)$$

где $\tilde{r} > 0$, т. е. положительно определенная m_2 -матрица ($1 \leq m_2 \leq m_1$); $\tilde{I} - m_1 \times m_2$ -матрица, полученная из единичной I_{m_2} добавлением нулевых строк с номерами i , соответствующими тем сигналам, компонентам $\Phi_{(i)}$ m_1 -вектора Φ , которые считаются заданными точно и не варьируются в модели (4). Для них $\hat{\Phi}_{(i)} = \Phi_{(i)}$. Если все m_1 -сигналов модели (4) варьируются, то $m_2 = m_1$, $\tilde{I} = I_{m_1}$, $r^+ = r^{-1} > 0$. Итак,

Задача А. Минимизировать (9) при условиях (4) с известными параметрами этих уравнений

$$\gamma = [\gamma_0^T, \dots, \gamma_p^T]^T \quad (10)$$

(см. (7)). Другой вид записи условий (4) — равенство (6). Задача А есть линейная задача сглаживания, фильтрации, аналогичная калмановской, но без специальной информации о начальных условиях модели (4).

Набор параметров векторного разностного уравнения (4) определен в (10) как $m_1(p+1) \times m$ -матрица γ , состоящая из $p+1$ -блоков размерности $m_1 \times m$. Будем называть такую конструкцию $m_1 \times m$ -блочным $(p+1)$ -вектором подобно тому, как конструкция A в (8) — $m_1 \times m$ -блочная $(M+1) \times (N+1)$ -матрица.

Линейная конструкция из параметров уравнения (4) — это L -вектор ($L = mm_1(p+1)$), или, иначе, $m_1 m \times 1$ -блочный $(p+1)$ -вектор. Вводится такая конструкция:

$$\tilde{\gamma} = [\tilde{\gamma}_0^T, \dots, \tilde{\gamma}_p^T]^T, \tilde{\gamma}_i = [\tilde{\alpha}_i^T, \tilde{\beta}_i^T]^T, \quad (11)$$

где $\tilde{\alpha}_i$ и $\tilde{\beta}_i$ — соответственно m^2 - и ml -векторы, полученные выстраиванием в вектор столбцов $m \times m$ -блоков α_i и $m \times l$ -блоков β_i (см. (4) и (7)). Итак,

Задача Б. Минимизировать (9) при условиях (4), когда об L -векторе $\tilde{\gamma}$ параметров этой модели известно только, что

$$\tilde{\gamma} = Dd, \quad (12)$$

где d — определяемый с точностью до постоянного множителя L -вектор неизвестных и независимо оцениваемых параметров уравнения (4);

$D - L \times L_1$ -матрица ранга $L_1 \leq L$. Вектор \mathbf{d} нужно найти также из условия минимума (9). Задача Б — задача идентификации или моделирования. Они не зависят от истинных сигналов φ — шумов, а зависят от ковариационную матрицу r . Предполагается, следовательно, что исходные реализации $\varphi \in N(\varphi^*, r)$:

$$\varphi = \varphi^* + \varkappa, \quad \varkappa = \begin{vmatrix} \varkappa_y^T, & -\varkappa_x^T \end{vmatrix}^T, \quad (13)$$

где $\varkappa \in N(0, r)$ — «белый» гауссов процесс с нулевым средним (шумы и ошибки измерений). Другая интерпретация процесса \varkappa_x — это не шум измерений, а неизмеряемый случайный процесс на входе объекта. Тогда $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} - \varkappa_x$, \mathbf{x} — детерминированная составляющая (известное математическое ожидание входного сигнала). Если $\mathbf{x} = 0$, то это означает, что объект возбуждается только случайным процессом типа «белый» шум.

Введем $m_1 \times m_1$ -блочнo-диагональные $(M+1) \times (M+1)$ -матрицы: K с блоками r и K^+ с блоками r^+ (см. (9)) —

$$K = K_N = \begin{vmatrix} r & & 0 \\ \cdot & \cdot & \\ 0 & & r \end{vmatrix}, \quad K^+ = K_N^+ = \begin{vmatrix} r^+ & & 0 \\ \cdot & \cdot & \\ 0 & & r^+ \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Определим, что

$$K^+ K = K K^+ = I. \quad (15)$$

Теперь задачи А, Б сформулируются так: минимизировать

$$J = \|\mathbf{z} - \widehat{\mathbf{z}}\|^2 = (\mathbf{z} - \widehat{\mathbf{z}})^T K^+ (\mathbf{z} - \widehat{\mathbf{z}}) \quad (16)$$

при условиях

$$1) \quad A^T \widehat{\mathbf{z}} = 0, \quad (17a)$$

иначе с учетом (15)

$$(KA, \widehat{\mathbf{z}}) = 0, \quad (17b)$$

где образующий блок-вектор матрицы A задан (задача А), или

$$2) \quad \widetilde{\boldsymbol{\gamma}} = D\mathbf{d} \quad (18)$$

с неизвестным вектором \mathbf{d} (задача Б). Вектор \mathbf{d} должен быть выбран из условия минимума величины $\widetilde{J}(\mathbf{d})$ — минимального значения функционала J (16), полученного в задаче А.

Вектор \mathbf{d} определен как направление, т. е. с точностью до постоянного множителя. Формула (17b) есть выражение (17a), записанное в виде скалярного произведения $(*, *)$, определенного в соответствии с (15), (16).

Аналитическое решение. Задачи А, Б (15)–(18) — это задачи проектирования вектора исходных реализаций \mathbf{z} на подпространство $\mathcal{M}(\mathbf{d})$ допустимых реализаций модели (4) с заданными (задача А) или оптимизируемыми (задача Б) параметрами — вектором направлением \mathbf{d} . Подпространство допустимых реализаций модели $\mathcal{M}(\mathbf{d}) = \mathcal{M} = \mathcal{M}_N(\mathbf{d})$ полностью определяется вектором \mathbf{d} , так как оно есть ортогональное дополнение к подпространству \mathcal{M}_\perp — линейной оболочке вектор-столбцов матрицы $\widetilde{A} = KA$. Из (8) и (14) видна структура базиса \widetilde{A} в подпространстве $\mathcal{M}_{N\perp}(\mathbf{d})$. Это $m_1 \times m$ -блочные $(M+1)$ -векторы η_0, \dots, η_N :

$$\eta_k = I^k \eta_0 = \begin{vmatrix} 0_k^T, & \gamma^T K_0, & 0_{N-k}^T \end{vmatrix}^T, \quad k = \overline{0, N}. \quad (19)$$

Решение задачи А есть проекция (сглаженная реализация)

$$\widehat{\mathbf{z}} = \widehat{\mathbf{z}}_N = \Pi \mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathcal{K} \mathcal{A} \mathcal{C}^T \mathbf{z} = \mathbf{z} - \Delta \mathbf{z}, \quad (20)$$

где
$$\mathcal{C} = (\mathcal{A}^T \mathcal{K} \mathcal{A})^{-1} = (\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{A}})^{-1}, \quad (21)$$

а

$$\Pi = \Pi_N = I - \mathcal{K} \mathcal{A} \mathcal{C}^T = I - \widetilde{\mathcal{A}} \mathcal{C}(\widetilde{\mathcal{A}}, \cdot) - \quad (22)$$

проектор на $\mathcal{M} = \mathcal{M}_N$.

Решение задачи Б получается в результате минимизации $\widehat{J} = \|\Delta \mathbf{z}\|^2$ — квадрата длины «перпендикуляра» $\Delta \mathbf{z}$ из точки \mathbf{z} пространства реализаций на подпространство \mathcal{M} :

$$\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \widehat{\mathbf{z}} = \mathcal{K} \mathcal{A} \mathcal{C}^T \mathbf{z} = \widetilde{\mathcal{A}} \mathcal{C}(\widetilde{\mathcal{A}}, \mathbf{z}) \quad (23)$$

(см. (15)). Подставляя (20) в (16), получим, что решение задачи идентификации (моделирования) сводится к безусловной минимизации по направлению \mathbf{d} величины

$$\widehat{J} = \|\Delta \mathbf{z}\|^2 = (\mathbf{z}, \widetilde{\mathcal{A}}) (\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{A}})^{-1} (\widetilde{\mathcal{A}}, \mathbf{z}) = \widetilde{\mathbf{z}}^T \mathcal{A} \mathcal{C} \mathcal{A}^T \mathbf{z} = \mathbf{e}^T \mathbf{c} \mathbf{e}. \quad (24)$$

Здесь $\mathbf{e} = \mathcal{A}^T \mathbf{z} - m$ -блочный $(N+1)$ -вектор невязок уравнения (4). Так называется вектор рассогласования уравнения (4) при подстановке в него измеренных значений сигналов. Отметим, что наиболее распространенный подход к идентификации моделей — минимизация невязок их уравнений.

С учетом условия (18) и тождества

$$\mathbf{e} = \mathcal{A}^T \mathbf{z} = V \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (25)$$

где V — специальным образом определенная блок-матрица скользящих выборок сигналов уравнения (4); минимизируемую в задаче Б величину можно представить в виде

$$\widehat{J} = \mathbf{d}^T Q(\mathbf{d}) \mathbf{d}, \quad Q = U^T C U, \quad U = V D. \quad (26)$$

Замечание б. Условие разрешимости задачи А — это условие обращаемости матрицы $B = \mathcal{A}^T \mathcal{K} \mathcal{A} = (\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{A}})$ в (21). В частности, предполагается условие независимости всех m уравнений (4), т. е. чтобы ранг матрицы γ в (10) был максимальным, равным m . Существование решения задачи Б — наличие минимума величины \widehat{J} по направлению \mathbf{d} в заданной дополнительными априорными ограничениями области его изменения, например в классе устойчивых моделей (4).

Итак, вариационная дискретная задача условной оптимизации (16) — (18) сведена к задаче безусловной минимизации величины \widehat{J} (26). С помощью метода множителей Лагранжа легко получить условие минимума этой величины:

$$\mathbf{J}'_{\mathbf{d}} = \widehat{U}^T C \mathbf{e} = \widehat{U}^T C U \mathbf{d} = \widehat{\mathbf{G}} = 0, \quad \mathbf{G} = U^T C \mathbf{e}, \quad U = V D, \quad (27)$$

где V — матрица из выборок реализации \mathbf{z} (см. (25), (26)).

Матрица вторых производных \mathbf{J}'' имеет сложное выражение [12]. Хорошее приближение к итерационной процедуре (ИП) Ньютона — Рафсона дает матрица $\widehat{Q} = \widehat{U}^T C \widehat{U}$ [12]:

$$\widehat{\mathbf{d}}'_{[k+1]} = \widehat{\mathbf{d}}'_{[k]} - \widehat{Q}^{-1}_{[k]} \widehat{\mathbf{G}}_{[k]}, \quad \widehat{Q} = \widehat{U}^T C \widehat{U}. \quad (28)$$

Здесь черта означает вычеркивание элемента, строки, столбца с номером i , соответствующим тому номеру элемента $d_{(i)} \neq 0$ вектора \mathbf{d} , который приводится к единице: $\mathbf{d}' = \mathbf{d}/d_{(i)}$.

Заслуживает внимания ИП типа поиска собственного вектора (СВ):

$$\mathbf{d}_{[k+1]} = Q_{[k]}^{-1} D^T D \mathbf{d}'_{[k]}. \quad (29)$$

Как показали эксперименты для $m = 1$, особенность итераций этого типа — широкая область быстрой (часто за одну итерацию) сходимости в достаточно малую окрестность экстремума. Поэтому при решении уравнения идентификации (27) она может применяться на первых (одном — двух) шагах итераций как предшественница ИП Ньютона — Рафсона (28), имеющей ограниченный радиус сходимости. Чаще всего одной-двух итераций типа СВ (29) оказывается достаточно для практического решения.

Замечание в. Определим матрицу V в тождестве (25) в соответствии с конструкцией вектора $\tilde{\gamma}$ в (11). Запишем уравнение (4) в виде

$$\gamma^T \tilde{\mathbf{v}}_k = 0 \text{ или } \tilde{v}_k^T \tilde{\gamma} = 0, \quad k = \overline{0, N}, \quad (30)$$

где, как можно видеть из (4) и (11), скользящие выборки \tilde{v} и v имеют вид

$$\tilde{\mathbf{v}}_k = |\boldsymbol{\varphi}_{k-p}^T, \dots, \boldsymbol{\varphi}_k^T|^T, \quad v = \tilde{\mathbf{v}} \otimes I_m. \quad (31)$$

Символ \otimes означает кронекеровское произведение ($A \otimes B = \{A_{ij} \times B\}$). Теперь матрица выборок V в (25) определится как $m \times m m_1$ -блочная $(N+1) \times (p+1)$ -матрица из блоков $\boldsymbol{\varphi}_i^T \otimes I_m, i = -p, N$. Блок-строки матрицы V — выборки v_k^T из (30), (31). Блок-строки матрицы U в (26) есть блок-векторы $u_k^T = v_k^T D$. Итак, в (25) — (27)

$$V^T = |v_0, \dots, v_N|, \quad U^T = |u_0, \dots, u_N|, \quad u_k = D^T v_k. \quad (32)$$

Дискретизация. Равенство (12), определяющее априорные ограничения на варьируемые в задаче Б параметры уравнения (4), может быть также и результатом дискретизации дифференциального уравнения (2) в конечном интервале наблюдения $\Delta_n = [0, T_n]$, если модель сигнала задана в виде такого уравнения. В этом случае $M = T_n / \Delta$, где Δ — дискретность отсчетов времени. Дискретизация — переход от дифференциального уравнения (2) к уравнению (4) — осуществляется в предположении определенной гладкости компонентов $\hat{\varphi}_{(i)}$ векторного сигнала $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = |\hat{y}^T, -\hat{x}^T|^T$ в интервале наблюдения Δ_n [11].

Пусть порядок старшей производной сигнала $\hat{\varphi}_{(i)}$ в уравнении (2) равен $n_{(i)}$ и для любого интервала длины $p_{(i)} \Delta (p_{(i)} \geq n_{(i)})$ в интервале наблюдения Δ_n сигнал может быть с достаточной точностью аппроксимирован полиномом степени $n_{(i)}$. Пусть, наконец, $n = \max \{n_{(i)}\}$, $p = \max \{p_{(i)}\}$, $i = \overline{1, m_1}$. Тогда $N = M - p$. Обозначим отсчеты времени в интервале наблюдения Δ_n через $\tau_i, i = -p, N$; некоторую среднюю точку скользящего интервала $\Delta_{(k)} = [\tau_{k-p}, \tau_k]$ через $\tau_{(k)}, k = \overline{0, N}$, выборку $p_{(i)} + 1$ отсчетов сигнала $\varphi_{(i)}$ в точках интервала $\Delta_{(k)}$ через $v_{(i)k}$. (Точки берутся в средней части интервалов, если $p_{(i)} < p$. Желательно, чтобы все числа $p_{(i)}$ были одинаково четными или нечетными.)

Теперь предположение о гладкости восстанавливаемых сигналов $\varphi_{(i)}, i = \overline{1, m_1}$, выразим так [11]:

$$\hat{v}_{(i)k} \approx T_{(i)} \hat{s}_{(i)k}, \quad (33)$$

где $\hat{s}_{(i)k} = (n_{(i)} + 1)$ — вектор производных сигнала $\hat{\varphi}_{(i)}$ в точке $\tau_{(k)}$:

$$\hat{s}_{(i)} = |\hat{\varphi}_{(i)}, \hat{\varphi}'_{(i)}, \dots, \hat{\varphi}^{(n_{(i)})}_{(i)}|^T, \quad T_{(i)} = (p_{(i)} + 1) \times (n_{(i)} + 1) —$$

матрица коэффициентов представления $p_{(i)} + 1$ отсчетов выборки $v_{(i)k}$, $n_{(i)} + 1$ членами ряда Тейлора относительно точки $\tau_{(k)}$. Если $\tau_{(k)}$ — центральная точка интервалов, то компоненты $T_{j_1 j_2}$ матриц $T_{(i)}$ — числа

вида $[(j_1 - p_{(i)}/2) \Delta]^{j_2} / j_2!$ Из (33) можно получить

$$\widehat{\mathbf{S}}_{(i)k} \approx T_{(i)}^+ \widehat{\mathbf{v}}_{(i)k}. \quad (34)$$

Здесь $T^+ = (T^T T)^{-1} T^T$.

Аналогично равенствам (30) уравнения (2) можно записать в виде

$$c^T \widehat{\mathbf{S}}(\tau) = 0, c = |c_0^T, \dots, c_n^T|^T, c_i^T = |a_i b_i|, \quad (35)$$

где $\widehat{\mathbf{S}}$ — вектор производных $|\widehat{\varphi}^T, \dots, \widehat{\varphi}^{(n)T}|^T$ векторного сигнала $\widehat{\varphi}(\tau) = |\widehat{y}^T(\tau), -\widehat{x}^T(\tau)|^T$. Те производные, которые отсутствуют в уравнении (2) (т. е. равны нулю соответствующие коэффициенты в блок-векторе c из (35)), отсутствуют и в s (заменяются нулями). Определим соответствующую матрицу T_1 и из (34) запишем

$$\widehat{\mathbf{S}}_{(k)} \approx T_1 \widehat{\mathbf{v}}_k. \quad (36)$$

Подставив (36) в (35), получим

$$c^T T_1 \widehat{\mathbf{v}}_k = 0, \quad k = \overline{0, N}. \quad (37)$$

С учетом (30) для блок-вектора γ коэффициентов разностного уравнения (4)

$$\gamma = T_1^T c. \quad (38)$$

Пусть \widetilde{c} — вектор параметров дифференциального уравнения (2), выстроенный в один $(n+1)m_1$ -вектор, например, подобно тому, как вектор γ коэффициентов уравнения (4) получен из блок-вектора c (см. (14)). С учетом определений γ, c, γ, c можно из (38) найти выражение, связывающее векторы $\widetilde{\gamma}$ и \widetilde{c} :

$$\widetilde{\gamma} = T \widetilde{c}. \quad (39)$$

Пусть теперь $\widetilde{\mathbf{d}}$ — вектор отличных от нуля и варьируемых в задаче Б коэффициентов уравнения (2). Нетрудно получить выражение $\widetilde{c} = D_1 \widetilde{\mathbf{d}}$, где D_1 — «упаковочная» матрица. С учетом априорно заданных линейных зависимостей между компонентами $\widetilde{\mathbf{d}}$ можно записать, что $\widetilde{\mathbf{d}} = D_2 \mathbf{d}$, где \mathbf{d} — вектор независимо оцениваемых в задаче Б параметров уравнения (2). Окончательно из (39) приходим к формуле вида (12)

$$\widetilde{\gamma} = T \widetilde{c} = T D_1 \widetilde{\mathbf{d}} = D \mathbf{d}, \quad D = T D_1 D_2. \quad (40)$$

Все определения должны обеспечить, чтобы $L \times L_1$ -матрица D имела максимальный ранг $L_1 \leq L$.

Замечание г. Описан способ оценки коэффициентов дифференциального уравнения (2) по дискретным данным. Если $\tau_{(k)}$ — центральные точки интервалов и $p_{(i)} = n_{(i)}$, то изложенная процедура близка к замене производных в (2) центральными разностями. Повышение порядка разностного уравнения ($p > n$) может быть полезно при слишком малой величине Δ дискретности времени. Соотношение (40) обеспечит поиск модели именно в пространстве неизвестных параметров уравнения (2).

Замечание д. При моделировании конкретных систем связь между $\widetilde{\mathbf{d}}$ — коэффициентами уравнения (2) — и \mathbf{d} — представляющими интерес параметрами моделируемой системы — может быть нелинейной. Тогда матрица D_2 в (40) есть матрица частных производных $\widetilde{\mathbf{d}}'_d : D_{ij} = \partial \widetilde{d}_i / \partial d_j$. В таких задачах матрица D в (12), (40) зависит от d . Вопросы сходимости в таких задачах еще более усложняются.

Быстрые рекуррентные алгоритмы (БРА). Здесь приведены кратко, без вывода, БРА для скалярного ($m = 1$) и векторного ($m > 1$) уравнения (4). Скалярные БРА принципиально проще, так как в этом слу-

чае матрица $B = (\bar{A}, \bar{A}) = A^T K A$ теплицева. Она определяет и проектор (22), и компоненты ИП, а именно матрицу Q и вектор \mathbf{G} в (28), (29). Отсюда следует важный факт, который обеспечивает эффективность соответствующих рекуррентных алгоритмов (БРА) и с помощью которого эти алгоритмы могут быть легко получены [4, 12]: матрица B и обратная ей матрица $C = B^{-1}$ симметричны относительно обеих диагоналей (дваж- олучных матриц B и C для вычисления векторов Q и \mathbf{G} в (28) и (29) ранга $\lambda = CA^T \mathbf{z}$ в (20) и компонентов \mathbf{G} и Q в итерациях [4]. Здесь приводятся БРА и при $m > 1$, и при $m = 1$ для элементов пространства реализаций [12]. Вычисляются компоненты $\hat{\mathbf{z}}$, Q , \mathbf{G} и функционал \hat{J} . Легко видеть, что реализация итераций (28) требует двух циклов БРА: на первом вычисляется $\hat{\mathbf{z}}$, а на втором — \hat{Q} , $\hat{\mathbf{G}}$.

Из формул БРА для реализаций $\hat{\mathbf{z}}$ легко получить формулы фильтра, если текущим состоянием модели (4) для такта k считать выборку $\hat{\mathbf{t}}$ из p последних сглаженных отсчетов реализации $\hat{\mathbf{z}}_k$:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k,N} = \hat{\mathbf{z}}_k = \left| \hat{\Phi}_{-p}^T, \dots, \hat{\Phi}_{k-p}^T, \dots, \hat{\Phi}_k, \Phi_{k+1}^T, \dots, \Phi_N^T \right|^T. \quad (41)$$

Обозначим в (41) через $\hat{\mathbf{t}}_k$ текущую выборку $\hat{\mathbf{v}}_{k,k}$ сглаженной реализации $\hat{\mathbf{z}}_k$ — последние $p+1$ сглаженных отсчетов в $\hat{\mathbf{z}}_k$. Выборка $\hat{\mathbf{t}}_k$ включает в себя два состояния системы (4) — $\hat{\mathbf{t}}_{k-1/k}$ и $\hat{\mathbf{t}}_k = \hat{\mathbf{t}}_{k/k}$:

$$\hat{\mathbf{t}}_k = \hat{\mathbf{v}}_{k,k} = \left| \hat{\Phi}_{k-p}^T, \dots, \hat{\Phi}_k^T \right|^T = \left| \hat{\Phi}_{k-p}^T, \hat{\mathbf{t}}_k^T \right|^T = \left| \hat{\mathbf{t}}_{k-1/k}^T, \hat{\Phi}_k^T \right|^T. \quad (42)$$

Подчеркнем что $\hat{\Phi}_i$ в (41), (42) — оптимальные значения, полученные по реализациям длины $k+p+1$, соответствующим $k+1$ тактам модели (4) с «0» по « k »:

$$\hat{\Phi}_i = \hat{\Phi}_{i/k}, \quad i = \overline{-p, k}. \quad (43)$$

Прогноз, который дает модель (4) по текущему состоянию $\hat{\mathbf{t}}_k$ на $(k+1)$ -й такт, равен

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1/k} = -\bar{\gamma}^T \hat{\mathbf{t}}_k + \beta_p \mathbf{x}_{k+1}, \quad (44)$$

здесь $\bar{\gamma} = \left| \gamma_0^T, \dots, \gamma_{p-1}^T \right|^T$, $d_p = I_m$. Ошибка прогноза с учетом (15), (44) и (19) есть

$$\pi_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1/k} = \gamma^T \hat{\mathbf{t}}_{k,k+1} = (\eta_{k+1}, \hat{\mathbf{z}}_k), \quad (45)$$

где

$$\hat{\mathbf{t}}_{k,k+1} = \left| \hat{\mathbf{t}}_k^T, \Phi_{k+1}^T \right|^T = \left| \hat{\Phi}_{k-p+1/k}^T, \dots, \hat{\Phi}_{k/k}^T, \Phi_{k+1}^T \right|^T. \quad (46)$$

Введем обозначения:

$$1) \quad f_{k+1} = \Pi_k \eta_{k+1}, \quad g_{k+1} = \Pi_{1,k+1} \eta_0, \quad (47)$$

где $\Pi_k = \Pi_{0,k}$, $a \Pi_{k,j}$ — проектор на подпространство $\mathcal{M}_{k,j}$, т. е. на ортогональное дополнение к $\{\eta_k, \dots, \eta_j\}$ (напомним, что $\eta_{k+1} = I^k \eta_0$ (см. (19)));

$$2) \quad h_k = \|f_k\|^2, \quad a_k = h_k^{-1}, \quad \tilde{h}_k = \|g_k\|^2, \quad \tilde{a}_k = \tilde{h}_k^{-1}, \quad (48)$$

здесь $\|f\|^2 = (f, f)$, $\|g\|^2 = (g, g) - m \times m$ -матрицы;

$$3) \quad \mu_{k+1} = (I^1 f_k, \eta_0) = (\eta_{k+1}, g_k) \quad (49)$$

(доказательство последнего равенства опускаем); легко видеть из опре-

деления η (см. (19)), что

$$\mu_{k+1} = f_k^{\text{HT}} I^{-1} \gamma = \gamma^T I^{-1} \tilde{g}_k; \quad (50)$$

4) I^1, I^{-1} — операторы сдвига (разной размерности в (49) и (50)) на один m_i -блок вниз и вверх соответственно (т. е. на такт времени вперед и назад). Кроме того, в (50) обозначено: $f^n - p + 1$ начальных и $\tilde{g}, \tilde{f}, -p + 1$ текущих $m_i \times m$ -блоков блок-векторов f_k и g_k . Под словом «текущие» для f_k, g_k, \tilde{z}_k и т. д. подразумеваются блоки, предшествующие блоку $k + p + 2$, иначе, такту $k + 1, k = 0, N$.

Решение задачи А. Сглаженная реализация \tilde{z}_k , текущая выборка \tilde{t}_k могут быть вычислены следующим алгоритмом, начинающимся с формулы «г» при $k = 0$ и кончающимся формулой «д» при $k = N$:

$$\text{в) } f_k = I^1 f_{k-1} - \tilde{g}_{k-1} \Theta_k; \quad \tilde{f}_k = \tilde{f}_{k-1} - I^{-1} \tilde{g}_{k-1} \tilde{\Theta}_k; \quad (54)$$

$$g_k = g_{k-1} - I^1 f_{k-1} \Theta_k^T; \quad \tilde{g}_k = I^{-1} \tilde{g}_{k-1} - \tilde{f}_{k-1} \tilde{\Theta}_k^T; \quad (55)$$

$$\text{г) } \text{начало } (\mathbf{k} = 0) \quad \pi_k = \gamma^T \tilde{t}_{k-1, k}; \quad (56)$$

$$\text{д) } \tilde{z}_k = \tilde{z}_{k-1} - f_k a_k \pi_k; \quad \tilde{t}_k = \tilde{t}_{k-1, k} - \tilde{f}_k a_k \pi_k; \quad (57)$$

$$\text{е) } k = k + 1. \quad (58)$$

Если $k \leq N$, то «а», иначе — **конец** ($\mathbf{k} = N + 1$).

Начальные условия:

$$\tilde{z}_{-1} = \mathbf{z}, \quad \tilde{t}_{-1, 0} = \tilde{\mathbf{v}}_0 = [\varphi_{-p}^T, \dots, \varphi_0^T]^T; \quad (59)$$

$$f_0 = g_0 = \eta_0, \quad \tilde{f}_0 = \tilde{g}_0 = K_0 \gamma; \quad (60)$$

$$h_0 = \tilde{h}_0 = \gamma^T K_0 \gamma. \quad (61)$$

Текущая измерительная информация на такте времени « k » поступает в рекурсивную схему «а — е» через формулу «г» в виде очередного отсчета φ_k в векторе $\tilde{t}_{k-1, k}$.

Замечание е. Для простоты формул фильтр записан не для состояния $\tilde{\mathbf{t}}$ а для выборки $\tilde{\mathbf{t}}$ (см. (42)).

Замечание ж. Вместо «б» (52) могут быть использованы формулы

$$a_k = (I - \Theta_k^T \tilde{\Theta}_k)^{-1} a_{k-1} = a_{k-1} (I - \tilde{\Theta}_k^T \Theta_k)^{-1}; \quad (62)$$

$$\tilde{a}_k = (I - \tilde{\Theta}_k \Theta_k^T)^{-1} \tilde{a}_{k-1} = \tilde{a}_{k-1} (I - \Theta_k \tilde{\Theta}_k^T)^{-1}.$$

Замечание з. (БРА для скалярного уравнения модели). В формулах (51) — (53) вычисляются m -матрицы. Для скалярных ($m = 1$) уравнений (4) — это числа. Тогда

$$a = \tilde{a}, \quad \Theta = \tilde{\Theta}, \quad \mu = \mu^T. \quad (63)$$

Вместо (51) — (53) имеем

$$\mu_k = \gamma^T I^{-1} \tilde{g}_{k-1}, \quad \Theta_k = \mu_k a_{k-1}; \quad (64)$$

$$h_k = h_{k-1} - \mu_k^2 a_{k-1}, \quad a_k = h_k^{-1}. \quad (65)$$

Вместо (65) можно вычислять [3]:

$$a_k = a_{k-1} / (1 - \Theta_k^2) \quad (66)$$

(ср. (62)).

Замечание и. Из (62) следует, что указанная в замечании «б» проблема обращаемости $B = A^T K A$ приводит (в силу того, что $a_k > 0$ и $\tilde{a}_k > 0$) к условиям

$$I - \Theta_k \tilde{\Theta}_k^T > 0, \quad I - \tilde{\Theta}_k^T \Theta_k > 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (67)$$

При $m = 1$ необходимо, как следует из (65), чтобы все числа Θ_k^2 были меньше единицы.

Перейдем к задаче идентификации. Здесь текущие измерения на такте « k » поступают в рекурсивную схему «а — е» через формулу «г» в виде отсчета Φ_k в блок-векторе u_k (см. (31), (32), (46)). Размерность $m \times 1$ -блок-вектора u_k в итерациях СВ (29) равна L_1 , а размерность $m \times 1$ -блок-вектора \tilde{u}_k в итерациях Ньютона — Рафсона (28) равна $L_1 - 1$.

Вычисляемые компоненты итераций задачи Б (матрица Q , вектор G и функционал \tilde{J})

$$Q = U^T C U, \quad G = U^T C e, \quad \tilde{J} = e^T C e \quad (68)$$

представляются в виде

$$Q = (W, W), \quad G = (W, W) d, \quad \tilde{J} = d^T (W, W) d. \quad (69)$$

В ИП СВ (29) используется только $L_1 \times L_1$ -матрица Q , а в итерациях Ньютона — Рафсона (28) необходимы и матрица $\tilde{Q} = (\tilde{W}, \tilde{W})$, и вектор $\tilde{G} = (\tilde{W}, W) d$. В отличие от матрицы Q компоненты матрицы и вектора \tilde{Q} , \tilde{G} могут быть получены только на втором цикле БРА после вычисления z на первом цикле (51) — (59).

Обозначим:

$$\begin{aligned} W_{(k)} &= \tilde{A}_k C_k U_k, & \tilde{A}_k &= |\eta_0, \dots, \eta_k|; \\ C_k &= (\tilde{A}_k, \tilde{A}_k)^{-1}, & U_k^T &= |u_0, \dots, u_k|; \\ Q_k &= (W_{(k)}, W_{(k)}), & G_k &= (W_{(k)}, W_{(k)}) d. \end{aligned} \quad (70)$$

Матрица $W_{(k)}$, без нулевых блок-строк — решение задачи минимизации величины $\|W_{(k)}\|^2 = \text{Sp}(Q_k)$ (Sp — след матрицы) при условиях $A_k^T W_{(k)} = U_k$. У этой m -блочной $(M+1) \times L_1$ -матрицы из $(M+1)$ блок-строк с размерами $m \times L_1$ только первые $k+1$ блок-строк ненулевые. Обозначим $p+1$ последние из них через W_k . Это $(p+1) \times L_1$ -матрица из $p+1$ $m \times L_1$ -блок-строк.

Решение задачи Б. Компоненты ИП Q , G и \tilde{J} (последняя для контроля и останова итераций) вычисляются по следующим формулам БРА, добавляемым в формулы «г», «д» общей схемы «а» — «е» (вариант «фильтр»):

$$\text{г)} \quad \psi_k = u_k - W_{k-1}^T I^{-1} \gamma; \quad (71)$$

$$Q_k = Q_{k-1} + \psi_k a_k \psi_k^T, \quad G_k = G_{k-1} + \psi_k a_k \pi_k; \quad (72)$$

$$\tilde{J}_k = \tilde{J}_{k-1} + \pi_k^T a_k \pi_k; \quad (73)$$

$$\text{д)} \quad W_k = I^{-1} W_{k-1} + \tilde{J}_k a_k \psi_k^T. \quad (74)$$

Начальные условия: $W_{-1} = 0$, $Q_{-1} = 0$, $G_{-1} = 0$, $\tilde{J}_{-1} = 0$.

Замечание к. Итерации СВ в ряде случаев (в частности, при $m = 1$) позволяют получить хорошее приближение к решению (достаточно для практики) за один шаг ИП СВ (28). Тогда осуществима оценка оптимальных параметров уравнения (4) в реальном времени. Для этого в формуле «г» цикла БРА необходимо вычислять и оценку $\tilde{d} = d_{[1]} = Q_{[0]}^{-1} \tilde{d}_{[0]}$, где $d_{[0]}$ — начальное приближение. Как следует из (72), здесь может быть применена известная «лемма об обращении

матриц» [2]. Вычисляются только Q^{-1} и $\hat{\mathbf{d}}$. Вместо (72) имеем

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad \kappa_k &= Q_{k-1}^{-1} \psi_k, \quad \Sigma_k = I - \kappa_k (h_k + \psi_k^T \kappa_k)^{-1} \psi_k^T, \\ \hat{\mathbf{d}}_k &= \Sigma_k \hat{\mathbf{d}}_{k-1}, \quad Q_k^{-1} = \Sigma_k Q_{k-1}^{-1}. \end{aligned} \quad (75)$$

Начальные условия: $Q_{-1}^{-1} = I\epsilon$, $\hat{\mathbf{d}}_{-1} = \mathbf{d}_{[0]}$. Здесь $\epsilon > 0$ — большое число [2].

Замечание л. Из формулы (73) видно, что функционал

$$\hat{J} = \mathbf{e}^T C \mathbf{e} = \sum_0^N \pi_k^T a_k \pi_k = \sum_0^N \pi_k^T h_k^{-1} \pi_k = \sum_0^N \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k. \quad (76)$$

Здесь \mathbf{v} — нормированный процесс обновления $\mathbf{v}_k = h_k^{-1/2} \pi_k$. Можно показать, что в статистической интерпретации задачи А (см. замечание а) h_k — это ковариация процесса обновления π_k . Следовательно, задача Б (идентификация) — это минимизация процесса обновления методом наименьших квадратов. Заметим также, что в указанной интерпретации матрица Грама $B = A^T K A = (\bar{A}, \bar{A})$ есть $\text{cov}\{\mathbf{e}\}$ — ковариация вектора невязок $\mathbf{e} = A^T \mathbf{z}$ уравнения (4), если параметры γ матрицы A равны истинным.

Заключение. В статье предложен и реализован вариационный подход к актуальным задачам фильтрации сглаживания и идентификации на основе линейных стационарных моделей динамических систем. Рассматриваются задача А — линейного оценивания (сглаживание) и задача Б — нелинейного оценивания (оценка параметров динамической модели сигнала). В отличие от большинства традиционных способов решения таких задач задачи А и Б решаются, во-первых, совместно. Во-вторых, решение основано на уравнении для наблюдаемых сигналов, т. е. на описании модели в пространстве реализаций, а не состояний. В-третьих, примененный подход к идентификации основан на минимизации невязки уравнения модели, а рассогласования сигналов ее входа и выхода с сигналами изучаемого объекта. В-четвертых, не учитывается информация о ее начальных условиях. В-пятых, для вычислительного решения задачи разработаны специальные быстрые рекуррентные алгоритмы. Наконец, в-шестых, найдена специальная итерационная процедура с улучшенными свойствами сходимости в этой задаче оптимизации.

В ИАиЭ СО АН СССР разработано программное обеспечение метода ВИ. Оно используется для исследований и решения прикладных задач.

Автор выражает благодарность коллегам по работе В.П. Будянову, С. Н. Касьяновой, А. А. Ломову, В. Е. Малыхиной, взявшим на себя труд по апробации метода ВИ, развитию его программного обеспечения и эффективному применению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоршин А. О. Вычислительные замкнутые методы идентификации линейных объектов // Оптимальные и самоадаптирующиеся системы. — Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1971.
2. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. — М.: Наука, 1987.
3. Будянов В. П., Егоршин А. О. Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров в автоматических системах с помощью ЦВМ // Автометрия. — 1973. — № 1.
4. Будянов В. П., Егоршин А. О., Филиппова Н. П. О решении с помощью ЦВМ некоторых задач анализа динамических процессов на основе измерительной информации // Вопросы построения систем автоматизации научных исследований. — Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР. — 1974.
5. Levinson N. The Wiener rms (root-mean-square) error criterion in filter design and prediction // J. Math. Phys. — 1947. — V. 25. — P. 261—278.
6. Chandrasekhar S. On radiate equilibrium of stellar atmosphere. — P. XXI // Astrophys. J. — 1947. — V. 106. — P. 152—216; P. XXII // Ibid. — 1948. — V. 107. — P. 48—72.

7. Крейн М. Г. Об интегральных уравнениях, порождающих дифференциальные уравнения 2-го порядка // ДАН СССР.— 1954.— Т. 97.— С. 21—24.
8. Kailath T. Some new algorithm for regursive estimation in constant linear system // IEEE Trans. Inform. Theory.— 1973.— V. IT-19, N 6.— P. 750—760.
9. Lindquist A. A new algorithm for optimal filtering of stationary processes // SIAM J. Control.— 1974.— V. 12(4).— P. 736—747.
10. Fridlander B., Kailath T., Morf M., Ljung L. Extended Levinson and Chandrasekhar equations for general discrete — time linear estimation problem // IEEE Trans. Automat. Control.— 1978.— V. AC-23, N 4.— P. 653—659.
11. Будянов В. П., Егоршин А. О., Филиппова Н. П. О прямом подходе к задаче идентификации // Автометрия.— 1976.— № 2.
12. Егоршин А. О. Новый метод цифровой идентификации и динамической фильтрации в линейных системах: Автореф. дис. . . канд. физ.-мат. наук.— М., 1979.
13. Egorshin A. Identification, modelling and adaptation (On optimal identification and

УДК 519.26

Я. А. БЕДРОВ
(Ленинград)

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

В практике экспериментальных физиологических исследований сложных систем с конечным числом состояний нередко возникает задача изучения причинно-следственных связей между реакцией системы и ее предысторией. Обычное интуитивное представление о механизме изучаемой связи сводится к следующему.

Предполагается, что состояния, предшествующие реакции, оказывают на систему некоторое возбуждающее или тормозящее воздействие, а воздействие самой реакции всегда тормозящее. Величина воздействия определяется как характером состояния, так и временем нахождения системы в этом состоянии. Считается, что система способна накапливать результаты воздействий отдельных состояний. Реакция системы происходит в тот момент, когда величина возбуждения достигает некоторого порогового значения.

Примером реализации подобного механизма служит система, управляющая агрессивным поведением животных. По существующим представлениям* агрессивная реакция животного возникает только при условии, что уровень агрессивной мотивации достаточно высок. В свою очередь, этот уровень может или повышаться в результате воздействия поведенческих актов, связанных с агрессивной мотивацией (обнюхивание партнера, поза угрозы), или уменьшаться из-за действия поведенческих актов, связанных с другой (например, ориентировочной) мотивацией, а также как следствие наступившей реакции.

Очевидно, что при таком представлении о механизме управления реакцией задача исследования сводится к определению значений относительных весов, с которыми различные состояния и сама реакция воздействуют на уровень возбуждения системы.

Характерной особенностью рассматриваемой задачи является то, что обычно ни текущее значение $u(t)$ величины возбуждения, ни ее пороговое значение не могут быть измерены, и единственная доступная ин-

* Меннинг О. Поведение животных.— М.: Мир, 1982.