

В. В. ПОСПЕЛОВ, А. В. ЧИЧАГОВ

(Москва)

МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ УТРАЧЕННЫХ ФРАГМЕНТОВ СИГНАЛА

Введение. При решении ряда задач, связанных с анализом и обработкой сигналов, часто возникает ситуация, когда по каким-либо причинам исследуемый сигнал не может наблюдаться в некоторые моменты времени либо в некоторых областях пространства. Причем для последующего анализа или обработки требуется восстановить утраченный фрагмент сигнала. Такие задачи возникают при восстановлении изображений [1], звуковых сигналов [2, 3] и т. д. Обычно оператор на основе априорной информации об исследуемом сигнале и накопленного опыта достаточно легко может мысленно восстановить утраченный фрагмент. Тем не менее разработка эффективного алгоритма восстановления утраченных фрагментов сигнала является актуальной проблемой в области цифровой обработки сигналов.

Развитие систем автоматической обработки данных, увеличение объема, повышение скорости и качества обработки информации ставят задачу создания автоматического метода устранения подобных дефектов сигнала. В данной статье рассматривается один из возможных методов решения этой задачи, позволяющий эффективно восстанавливать утраченные фрагменты сигналов определенного класса.

Постановка задачи. Пусть последовательность $s(n) = s(t_n)$, где $t_n = n\tau$, $n = 0, \pm 1, \dots$; τ — шаг дискретизации, представляет исследуемый физический сигнал $s(t)$. Рассмотрим интервал $0 \leq n \leq N-1$, который обозначим символом I . Оценку спектра сигнала $s(t)$ на интервале I можно получить с помощью формул дискретного преобразования Фурье [4]:

$$c_k = \mathcal{F}[s(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \exp\left(-\frac{2\pi i k n}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$s(n) = \mathcal{F}^{-1}[c_k] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $\mathcal{F}[\]$ — оператор дискретного преобразования Фурье (ДПФ); $\mathcal{F}^{-1}[\]$ — оператор обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ); c_k — коэффициенты ДПФ.

Предположим, что сигнал $s(n)$ на интервале I можно представить в виде

$$s(n) = \sum_{\alpha=0}^{M-1} c_{\alpha} \exp\left(\frac{2\pi i k_{\alpha} n}{N}\right), \quad (1)$$

где c_{α} — амплитуда; $2\pi k_{\alpha}/N$ — круговая частота; M — число ненулевых гармоник сигнала, причем $0 \leq k_0 < \dots < k_{M-1} \leq N-1$; k_{α} — целое.

Положим также, что выполняется неравенство

$$M \ll N, \quad (2)$$

т. е. число гармоник сигнала гораздо меньше, чем представляемая для анализа выборка спектра сигнала. Класс сигналов, для которых выполняются условия (1) и (2), назовем классом сигналов с лакунарным спектром и обозначим через $S_{M,N}$.

Рассмотрим сигнал $u(n)$, принадлежащий классу $S_{M,N}$, по заданный на множестве $I \setminus \Delta$, где $\Delta \subset I$ — некоторое (необязательно связанное) под-

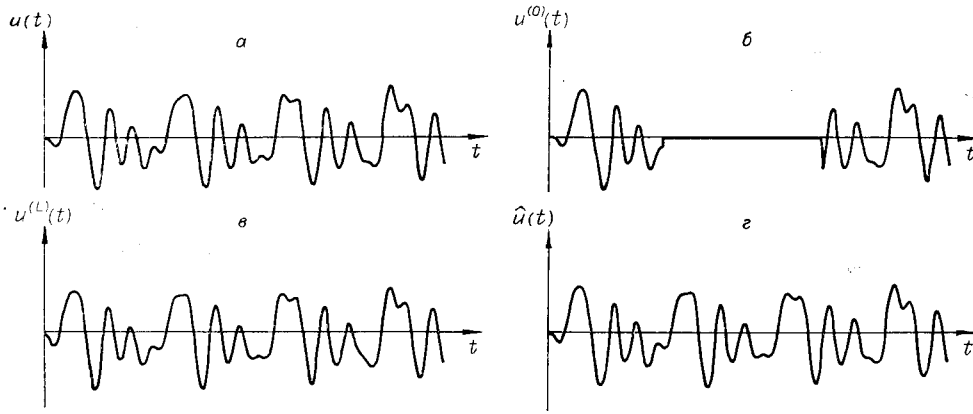


Рис. 1. Восстановление звукового сигнала:

a — исходный сигнал; *b* — исходный сигнал с утраченным фрагментом; *c* — восстановленный сигнал; *d* — тригонометрический полином, аппроксимирующий исходный сигнал

множество интервала I (рис. 1). Требуется восстановить сигнал $u(n)$ на множестве Δ , используя информацию о сигнале $u(n)$ на остальной части интервала I .

Обычный способ решения задачи восстановления сигнала $u(n)$ на множестве Δ состоит в том, чтобы аппроксимировать $u(n)$ тригонометрическим многочленом $T_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} q_k \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right)$ на множестве $I \setminus \Delta$ и положить

$$\widehat{u}(n) = \begin{cases} u(n), & n \in I \setminus \Delta; \\ T_N(n), & n \in \Delta, \end{cases}$$

где $\widehat{u}(n)$ — искомый сигнал. При этом для определения коэффициентов многочлена $T_N(n)$ требуется решить систему линейных алгебраических уравнений [5]

$$\sum_{k'=0}^{N-1} a_{kk'} q_{k'} = b_k,$$

здесь $a_{kk'} = \sum_{n \in I \setminus \Delta} \exp\left[\frac{2\pi i (k - k') n}{N}\right]$; $b_k = \sum_{n \in I \setminus \Delta} u(n) \exp\left(-\frac{2\pi i k n}{N}\right)$ —

коэффициенты ДПФ функции; $u^{(0)}(n) = \begin{cases} u(n), & n \in I \setminus \Delta; \\ 0, & n \in \Delta. \end{cases}$

Этот способ, однако, имеет существенный недостаток. Дело в том, что степень тригонометрического многочлена, хорошо аппроксимирующего сигналы класса $S_{M,N}$, существенно больше, чем число параметров, необходимое для задания конкретного сигнала этого класса, так как в силу условия (2) $M \ll N$. Численная реализация такого метода связана с псевдообращением вырожденной матрицы высокого порядка $[a_{kk'}]$, что при больших N требует огромных вычислительных затрат.

Предлагается другой, более эффективный способ восстановления утраченного фрагмента сигнала. Введем характеристическую функцию множества $I \setminus \Delta$:

$$\gamma(n) = \begin{cases} 1, & n \in I \setminus \Delta; \\ 0, & n \in \Delta. \end{cases}$$

Для искомого сигнала $\widehat{u}(n)$ теперь можно написать соотношение

$$u^{(0)}(n) = \gamma(n) \widehat{u}(n), \quad n \in I. \quad (3)$$

Рассмотрим задачу аппроксимации сигнала $u(n)$ на интервале $I \setminus \Delta$ одной гармоникой. Будем искать значения параметров гармоники по критерию $\exp\left(-\frac{\| \varepsilon(n) \|^2}{N}\right)$. Эти параметры будем выбирать из условия минимума функционала

$$\Phi(C', k') = \|\varepsilon(n)\|^2 = \|u^{(0)}(n) - \gamma(n) C' \varphi_{k'}(n)\|^2,$$

$$\text{где } \|\varepsilon(n)\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon(n)|^2.$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{k'}(n) &= \frac{\gamma(n) \varphi_{k'}(n)}{\|\gamma \varphi_{k'}\|}; \\ \tilde{C} &= C' \|\gamma \varphi_{k'}\|. \end{aligned}$$

Легко показать, что $\|\gamma \varphi_{k'}\| = \sqrt{1 - \frac{D}{N}}$ здесь D — мера множества Δ . Перепишем функционал Φ в виде

$$\Phi(C', k') = \|u^{(0)} - \tilde{C} \tilde{\varphi}_{k'}^*\|^2 = \|u^{(0)}\|^2 + |\tilde{C} - (u^{(0)}, \tilde{\varphi}_{k'}^*)|^2 - |(u^{(0)}, \tilde{\varphi}_{k'}^*)|^2,$$

$$\text{где } (u^{(0)}, \tilde{\varphi}_{k'}^*) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u^{(0)}(n) \tilde{\varphi}_{k'}^*(n); * \text{ — знак комплексного сопряжения.}$$

Из этого выражения видно, что минимум функционала $\Phi(C', k')$ достигается, когда выполняется равенство

$$\tilde{C} = (u^{(0)}, \tilde{\varphi}_{k'}^*)$$

при условии, что величина $|(u^{(0)}, \tilde{\varphi}_{k'}^*)|^2$ максимальна. Так как $(u^{(0)}, \tilde{\varphi}_{k'}^*) = (u^{(0)}, \varphi_{k'}^*) / \|\gamma \varphi_{k'}\|$, то значения $C^{(0)}$ и $k^{(0)}$, обеспечивающие минимум функционала $\Phi(C', k')$, можно записать в виде

$$k^{(0)} = \operatorname{argmax}_k \{|(u^{(0)}, \varphi_k^*)|^2\};$$

$$C^{(0)} = \left(1 - \frac{D}{N}\right)^{-1} (u^{(0)}, \varphi_{k^{(0)}}^*),$$

где учтено, что $\|\gamma \varphi_k\| = \sqrt{1 - (D/N)}$. Минимум функционала Φ равен $\Phi_{\min}^{(1)} = \Phi(C^{(0)}, k^{(0)}) = \|u^{(0)}\|^2 - \frac{1}{1 - \frac{D}{N}} |(u^{(0)}, \varphi_{k^{(0)}}^*)|^2 \geq 0$.

Заметим, что величины $N(u^{(0)}, \varphi_k^*)$ суть не что иное, как коэффициенты дискретного преобразования Фурье сигнала $u^{(0)}(n)$. Обозначим операцию выделения максимальной по модулю гармоники в спектре сигнала через M , т. е.

$$Mg(\omega) = \begin{cases} g(\omega), & \text{если } |g(\omega)| = \max |g(\omega)|; \\ 0, & \text{если } |g(\omega)| < \max |g(\omega)|. \end{cases}$$

Тогда остаток $\varepsilon(n)$ можно представить в виде

$$\varepsilon(n) = u^{(0)}(n) - \gamma(n) w^{(0)}(n),$$

здесь $w^{(0)}(n) = \left(1 - \frac{D}{N}\right)^{-1} \mathcal{F}^{-1} M \mathcal{F} u^{(0)}(n)$.

Если $\Phi_{\min}^{(1)} > 0$, то $\varepsilon(n)$ также можно попытаться аппроксимировать одной гармоникой и т. д., т. е. организовать итерационную процедуру, которая будет вычислять тригонометрический многочлен следующим образом:

$$\begin{aligned} w^{(l)}(n) &= (1 - D/N)^{-1} F^{-1} M F u^{(l)}(n); \\ u^{(l+1)}(n) &= u^{(l)}(n) - \gamma(n) w^{(l)}(n); \\ T^{(l+1)}(n) &= T^{(l)}(n) + w^{(l)}(n). \end{aligned}$$

При $l=0$ u и T заданы равенствами

$$u^{(0)}(n) = \begin{cases} u(n), & n \in I \setminus \Delta; \\ 0, & n \in \Delta; \end{cases} \quad T^{(0)}(n) = 0, \quad n \in I.$$

Здесь $T^{(l)}(n)$ — тригонометрический многочлен. Величина функционала Φ на l -м шаге этой процедуры равна

$$\Phi^{(l)} = \|u^{(0)}\|^2 - \sum_{m=0}^{l-1} \|w^{(m)}\|^2.$$

Очевидно, что выполняются условия

$$\Phi^{(l+1)} \leq \Phi^{(l)}, \quad (4)$$

причем если $\Phi^{(l+1)} = \Phi^{(l)}$, то это означает, что итерационный процесс установился. Действительно, при этом $\|w^{(l)}\| = 0$, а значит, $M F u^{(l)}(n) \equiv 0$. Поэтому $u^{(l)}(n) \equiv 0$, т. е. остаток полностью исчерпан, и, следовательно, $T^{(l+1)}(n) \equiv T^{(l)}(n)$, что означает установление итерационного процесса. В силу (4) $\Phi^{(l)}$ стремится к некоторому пределу $\Phi^{(\infty)} = 0$. При этом $T^{(l)}(n)$ стремится к некоторому решению уравнения (3) в классе функций $S_{M, N}$. Сходимость итерационной процедуры обусловлена размером утраченной части сигнала, «минимальным расстоянием» между гармониками сигнала, а также точностью проводимых вычислений. Практически для останова итерационной процедуры ее можно прервать на шаге L , если $\Phi^{(L)} < \delta$. В этом случае величину δ можно трактовать как среднюю мощность шума [6], причем конкретное значение величины δ определяется из практических соображений.

Описанная выше итерационная процедура выделения гармонических составляющих в сигнале применялась к решению задачи восстановления звукового сигнала на месте импульсных помех (см. рис. 1) и при восстановлении утраченных фрагментов изображения (рис. 2). В первом случае на месте импульсной помехи сигнал зануляется и задача тем самым сводится к решению уравнения (3). Аналогично поступают и в задаче восстановления утраченного фрагмента изображения: в соответствующей области значения яркости полагаются равными нулю. В случае обработки изображений все операции (ДПФ, ОДПФ) надо заменить двумерными.

Приведенные на рис. 1, 2 примеры показывают адекватность предложенной математической модели и сви-

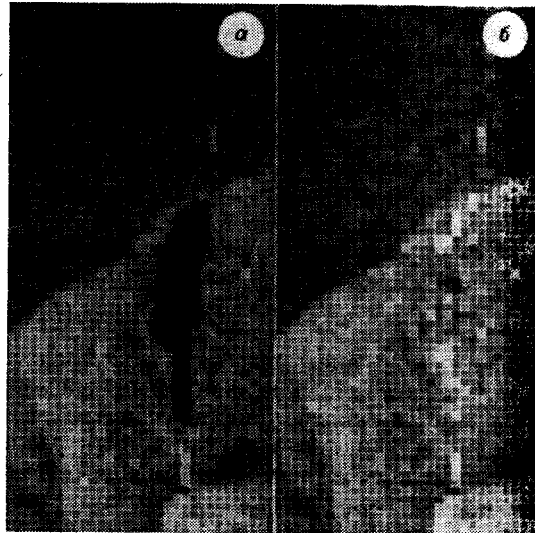


Рис. 2. Восстановление изображения:

a — исходное изображение с утраченным фрагментом; b — восстановленное изображение

детельствуют об эффективности разработанного метода применительно к задаче восстановления утраченных фрагментов сигнала. Отметим, что вне дефектной области алгоритм вообще не изменяет значений сигнала. Одной из положительных особенностей рассмотренной процедуры восстановления утраченных фрагментов сигнала является то, что все операции организуются над блоками данных одинакового размера, что позволяет удобно реализовать предложенный алгоритм на спецпроцессорах, предназначенных для обработки сигналов. Отметим также, что область применения данного метода не ограничивается рассмотренной здесь задачей. Он может с успехом применяться для выявления скрытых периодичностей [7], а также для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений.— М.: Сов. радио, 1979.
2. Чичагов А. В. Цифровая реставрация фонодокументов на ЭВМ // Техника кино и телевидения.— 1986.— № 1.
3. Морозов В. А., Поспелов В. В. Цифровая обработка сигналов.— М.: МГУ, 1986.
4. Капеллини В., Константинопидис А. Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение.— М.: Энергоиздат, 1983.
5. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений.— М.: Мир, 1980.
6. Худсон Д. Статистика для физиков.— М.: Мир, 1970.
7. Гребеников Е. А., Киоса М. Н., Миронов С. В. Численно-аналитические методы исследования регулярно возмущенных многочастотных систем.— М.: МГУ, 1986.

Поступила в редакцию 29 января 1987 г.

УДК 621.373.826 : 315.61

Ю. А. БЫКОВСКИЙ, А. В. КАЗАКЕВИЧ, В. Ф. ЛАМЕКИН,
А. В. МИРОНОС, В. Л. СМЕРНОВ

(Москва)

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНОВОДНЫХ ГОЛОГРАФИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Обработка аналоговой информации основывается на понятии качества изображения, которое, однако, не имеет точного математического выражения. Наиболее полно поведение оптической системы (ОС) описывается когерентной передаточной функцией [1] (КПФ), но на практике методы ее измерения достаточно сложны [2]. В силу исторически сложившихся традиций в теории информатики [3] и с точки зрения практического применения для оценки качества передачи информации используют понятие информативной емкости системы, которое характеризует количество пространственной информации, обрабатываемой данной оптической схемой.

По определению, предложенному в [4], максимальная информационная пропускная способность выражается следующим образом:

$$C = LA \log_2(k + 2) \text{ бит.} \quad (1)$$

Произведение апертуры оптической системы L на предельное разрешение A задает число независимых элементов (каналов) разрешения системы, а k — число уровней квантования яркости в каждом элементе разрешения и характеризует шум. Как разрешение, так и шумовые эффекты определяются частотной зависимостью КПФ, искажениями, возникающими на неоднородностях ОС, а также детектированием. При детектировании рассматриваемые характеристики связаны со свойствами фото-