

ков привело к равенству  $1 = v_0 \sin \Theta_0 = v_0 \sin[\pi(D-d)/2,75D \cdot 2]$ , здесь  $v_0$  — плотность витков на оси  $x$ .

Полное число витков

$$N = 2 \int_0^{\pi/2} v_0 \sin \Theta d \Theta = 2v_0.$$

Определив из предыдущего выражения  $v_0$ , получаем для наименьшего допустимого числа проводников значение

$$N_{\min} = 2/\sin[\pi(D-d)/5,5D],$$

и тогда окончательно

совершенствуя временные характеристики сканеров на прецизионных ЭЛТ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Миллер В. А., Куракин Л. А. Приемные электронно-лучевые трубки.— М.: Энергия, 1971.
2. Шерстнев Л. Г. Электронная оптика и электронно-лучевые приборы.— М.: Энергия, 1971.
3. Говоров В. А. Электрические и магнитные поля.— М.: Энергия, 1968.

Поступило в редакцию 30 марта 1987 г.

УДК 62-50 : 519.24

В. П. СИЗОВ

(Москва)

#### КАЛИБРОВКА МНОГОМЕРНЫХ ДАТЧИКОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ПОЛИНОМОВ

Одним из основных методов обеспечения высокой точности многомерных датчиков технических систем является их периодическая калибровка по экспериментальным точкам с априори известными параметрами. В [1] для этой цели построен численно устойчивый рекуррентный алгоритм оптимальной оценки коэффициентов двумерных аппроксимирующих полиномов, не требующий предварительного накопления измерений. Однако его реализация связана с необходимостью обращения весовой матрицы большой размерности, определяемой степенью аппроксимации.

В настоящей работе представлено эффективное в вычислительном отношении решение задачи оценки векторов нелинейности и коррекции многомерного датчика, основанное на использовании полиномов, ортонормированных на совокупности экспериментальных точек.

**Аппроксимация регулярного преобразования.** Пусть  $x$  — вектор параметров объекта, отображаемый  $k$ -мерным датчиком в вектор измерения  $z(x) = y(x) + \xi$  с регулярной  $y(x)$  и случайной  $\xi$  составляющими. Аппроксимируем каждую компоненту  $y(x)$   $k$ -мерным полиномом

$$P(x) = a^T e(x), \quad (1)$$

где  $a$  — вектор коэффициентов, называемый далее вектором нелинейности датчика по аппроксимируемой компоненте преобразования  $y(x)$ ;  $e(x)$  — вектор одночленных базисных полиномов:

$$\{e_i(x) = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}, i = 0, 1, \dots, s\}, \quad (2)$$

в котором между индексами  $i$  и степенями  $\{i_j, j = 1, 2, \dots, k\}$  с максимальными значениями  $\{s_j, j = 1, 2, \dots, k\}$  предполагается взаимно однозначное соответствие,

устанавливаемое, например, соотношением

$$i = i_1 + (s_1 + 1) i_2 + (s_1 + 1)(s_2 + 1) i_3 + \dots + (s_1 + 1)(s_2 + 1) \dots (s_{k-1} + 1) i_k. \quad (3)$$

При этом предполагается, что  $s = (s_1 + 1)(s_2 + 1) \dots (s_k + 1) - 1$  и  $x_j^{i_j} = 1$ , когда  $x_j = i_j = 0$ .

Ортонормируя базис (2) на  $N$  экспериментальных точках  $\{x(n), n = 1, 2, \dots, N\}$  с весом  $1/N$ , например, по методике, представленной в [2], получим вектор  $u(x)$  новых базисных полиномов с компонентами

$$\{u_{i'}(x), i' = 0, 1, \dots, s\}, \quad (4)$$

через которые аппроксимирующий полином (1) выражается при помощи вектора коэффициентов  $c$ :

$$P(x) = c^T u(x). \quad (5)$$

Аналогичным образом компоненты обратного преобразования  $x(y)$ , восстанавливающего значение вектора  $x$  по регулярной составляющей  $y(x)$  измерения  $z(x)$ , аппроксимируются полиномами

$$\bar{P}(y) = \bar{c}^T \bar{u}(y) \quad (6)$$

в базисе

$$\{\bar{u}_{i'}(y), i' = 0, 1, \dots, s\}, \quad (7)$$

получаемом ортонормировкой одночленного степенного базиса

$$\{e_i(y) = y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_k^{i_k}, i = 0, 1, \dots, s\} \quad (8)$$

на экспериментальных точках  $\{y(n), n = 1, 2, \dots, N\}$ .

Для записи полиномов (5) и (6) соответственно в базисах (2) и (8) достаточно привести в них подобные члены. При этом (6) примет вид, аналогичный (1):

$$\bar{P}(y) = \bar{a}^T e(y),$$

где  $\bar{a}$  — вектор коэффициентов, называемый далее вектором коррекции датчика по соответствующей компоненте преобразования  $x(y)$ .

**Оптимальное оценивание векторов нелинейности и коррекции.** Учитывая (5), представим аппроксимируемый выходной сигнал датчика в экспериментальных точках  $\{x(n), n = 1, 2, \dots, N\}$  в виде

$$z(n) = H(n)c(n) + \xi(n), \quad (9)$$

где  $z(n) = z[x(n)]$ ;  $H(n) = u^T[x(n)]$ . При этом оптимальная в смысле минимума среднеквадратической ошибки оценка  $\hat{c}(n)$  вектора  $c$  коэффициентов полинома (5), аппроксимирующего прямое преобразование датчика в базисе (4) по измерениям  $\{z(i), i = 1, 2, \dots, n\}$  вида (9) в условиях статистической неопределенности относительно «шума» измерений  $\xi(n)$  и погрешности априорной оценки  $c(0)$ , формируется по рекуррентному алгоритму оптимальной линейной фильтрации [3]

$$\hat{c}(n) = \hat{c}(n-1) + K(n)[z(n) - H(n)\hat{c}(n-1)]; \quad (10)$$

$$K(n) = M^{-1}(n)H^T(n); \quad (11)$$

$$M(n) = M(n-1) + H^T(n)H(n) \quad (12)$$

для  $n = 1, 2, \dots$  с начальными условиями  $\hat{c}(0)$  и  $M(0) = qI$ , здесь  $q$  — весовой коэффициент, учитывающий относительную «надежность» измерений  $z(n)$  и априорной оценки  $c(0)$ .

При высоких степенях аппроксимирующих полиномов (1) практическая реализация данного алгоритма затруднена необходимостью обращения на каждом шаге  $n$  весовой матрицы  $M(n)$  размером  $(s+1) \times (s+1)$ . Поэтому целесообразно вместо  $\hat{c}(n)$  предварительно вычислять произведение  $M(n)\hat{c}(n) = \hat{b}(n)$  по вытекающему из (10)–(12) рекуррентному соотношению

$$\hat{b}(n) = \hat{b}(n-1) + H^T(n)z(n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

с начальным условием  $\hat{b}(0) = q\hat{c}(0)$ , а оценки  $\hat{c}(n)$  получать в конце каждого  $r$ -го цикла считывания всех  $N$  экспериментальных точек по формуле  $\hat{c}(rN) = M^{-1}(rN) \times \hat{b}(rN)$ . При этом в силу условий ортонормировки весовая матрица (12) принимает диагональный вид

$$M(rN) = qI + \sum_{n=1}^{rN} u[x(n)]u^T[x(n)] = (q + rN)I,$$

и, следовательно,

$$\widehat{c}(rN) = \widehat{b}(rN)/(q + rN) \quad (14)$$

для  $r = 1, 2, \dots$

Аналогично при оценивании вектора  $\widehat{c}$  коэффициентов полинома (6) обратного преобразования в базисе (7) удобно предварительно вычислять вспомогательный вектор

$$\widehat{b}(n) = \widehat{b}(n-1) + \overline{H}^T(n) x(n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

с начальным условием  $\widehat{b}(0) = q\widehat{c}(0)$ , полагая  $\overline{H}(n) = \overline{u}^T[y(n)]$ , после чего в конце каждого  $r$ -го цикла считывания всех экспериментальных точек находить оценку  $\widehat{c}(rN)$  по формуле

$$\widehat{c}(rn) = \widehat{b}(rn)/(q + rn) \quad (16)$$

для  $r = 1, 2, \dots$

**Ортогональная решетка экспериментальных точек.** Методика построения ортонормированного базиса (4) существенно упрощается при использовании экспериментальных точек, расположенных в узлах  $k$ -мерной ортогональной решетки, ребра которой параллельны координатным осям  $\{x_j, j = 1, 2, \dots, k\}$  и содержат по  $N_j$  узловых точек каждое, так что  $N = N_1 N_2 \dots N_k$ . В этом случае, если

$$\left\{ v_{i_j}^{(j)}(x_j) = \sum_{i_j=0}^{s_j} \varepsilon_{i_j i_j}^{(j)} e_{i_j i_j}(x_j), \quad i_j' = 0, 1, \dots, s_j \right\}$$

— одномерные полиномы, ортонормированные соответственно на ребровых точках  $\{N_j, j = 1, 2, \dots, k\}$  ортогональной решетки, и

$$\left\{ u_{i'}(x) = \sum_{i=0}^s \gamma_{i' i} e_i(x), \quad i' = 0, 1, \dots, s \right\}$$

—  $k$ -мерные полиномы (4) в исходном одночленном базисе (2), то, как нетрудно показать, коэффициенты  $\{\gamma_{i' i}, i = 0, 1, \dots, s\}$  представляют собой результат тензорного перемножения коэффициентов  $\{\varepsilon_{i_j i_j}^{(j)}, j = 1, 2, \dots, k\}$ :

$$\gamma_{i' i} = \varepsilon_{i_1 i_1}^{(1)} \varepsilon_{i_2 i_2}^{(2)} \dots \varepsilon_{i_k i_k}^{(k)}, \quad (17)$$

где  $i$  и  $i'$  образуются соответственно из  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  и  $\{i_1', i_2', \dots, i_k'\}$  по правилу (3).

**Пример калибровки координатно-яркостного датчика растрового типа.** Для иллюстрации представленного алгоритма рассмотрим датчик [1], поле оптических координат которого  $(x_1, x_2)$  представляет собой квадрат размером  $2 \times 2$  с нулем в центре, яркость  $x_3$  отдельных точек поля лежит в диапазоне 0—1, а регулярные составляющие измерений описываются полиномами

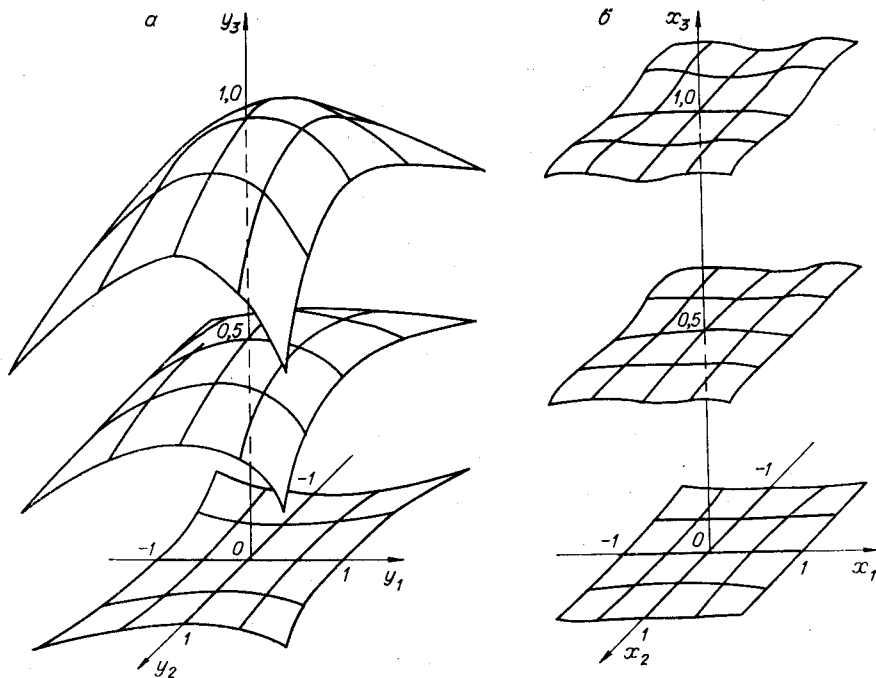
$$\begin{aligned} y_1(x) &= (x_1 + 0,36x_1x_2^2)(1 + 0,1x_3); \\ y_2(x) &= (x_2 + 0,36x_1^2x_2)(1 + 0,1x_3); \\ y_3(x) &= x_3 [1 - 0,18(x_1^2 + x_2^2)]. \end{aligned} \quad (18)$$

В режиме калибровки осуществляется растровая развертка оптического поля датчика на трех различных уровнях освещенности реперов, расположенных в узлах равномерной прямоугольной решетки с шагом 0,5 по каждой координате, так что  $N_1 = N_2 = 5, N_3 = 3$  и  $N = N_1 N_2 N_3 = 75$ . По выходным сигналам датчика, отличающимся наличием флуктуационных ошибок от теоретических значений (18), показанных на рисунке, а, требуется оценить его векторы нелинейности  $\{a^{(j)}, j = 1, 2, 3\}$  и коррекции  $\{\widehat{a}^{(j)}, j = 1, 2, 3\}$ .

Для решения поставленной задачи аппроксимируем компоненты преобразования  $y(x)$  трехмерными полиномами

$$\left\{ P^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^s a_i^{(j)} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}, \quad j = 1, 2, 3 \right\}, \quad (19)$$

положив  $s_1 = s_2 = 2, s_3 = 1$ , что дает  $s = (s_1 + 1)(s_2 + 1)(s_3 + 1) - 1 = 17$ . Весовая матрица  $M(n)$  оптимального фильтра (10)—(12) в этом случае имеет относительно большой размер:  $(s + 1) \times (s + 1) = 18 \times 18$  и, следовательно, целесообразна ее диагонализация путем перехода к многочисленному полиномиальному базису (4), ортонормированному на экспериментальных точках  $\{x(n), n = 1, 2, \dots, 75\}$ .



Исходные (а) и остаточные (б) координатно-яркостные искажения датчика

Учитывая ортогональность решетки экспериментальных точек, вычислим предварительно одномерные полиномы  $\left\{ v_{i_j}^{(j)}(x_j), i_j' = 0, 1, \dots, s_j \right\}$ , ортонормированные на ее ребровых точках  $\{x_j(n_j), n_j = 1, 2, \dots, N_j\}$  для  $j = 1, 2, 3$ :

$$v_0^{(1)}(x_1) = v_0^{(2)}(x_2) = v_0^{(3)}(x_3) = 1;$$

$$v_1^{(1)}(x_1) = 1,414x_1; \quad v_1^{(2)}(x_2) = 1,414x_2; \quad v_1^{(3)}(x_3) = -1,225 + 2,450x_3;$$

$$v_2^{(1)}(x_1) = -1,195 + 2,390x_1^2; \quad v_2^{(2)}(x_2) = -1,195 + 2,390x_2^2.$$

С помощью определяемых этими соотношениями одновалентных тензоров  $\left\{ \varepsilon_{i_j i_j}^{(j)}, j = 1, 2, 3 \right\}$  нетрудно далее по формуле (17) вычислить трехвалентные тензоры  $\{\gamma_{i' i' i'}\}$ ,  $i' = 0, 1, \dots, 17\}$  базисных полиномов (4). Например, при  $i' = 16$  имеем  $i_1' = 1, i_2' = 2, i_3' = 1$  и согласно (17)  $\gamma_{16,0} = \varepsilon_{1,0}^{(1)} \varepsilon_{2,0}^{(2)} \varepsilon_{1,0}^{(3)} = 0 (-1,195) (-1,225) = 0$ ;  $\gamma_{16,1} = \varepsilon_{1,1}^{(1)} \varepsilon_{2,0}^{(2)} \varepsilon_{1,0}^{(3)} = 1,414 (-1,195) (-1,225) = 2,070$  и т. д.

В пространстве регулярных составляющих (18) решетка экспериментальных точек  $\{y(n), n = 1, 2, \dots, 75\}$  неортогональна (см. рисунок, а). Поэтому процедура полиномиальной аппроксимации обратного преобразования  $x(y)$  трехмерными полиномами

$$\left\{ \bar{P}^{(j)}(y) = \sum_{i=0}^{17} \bar{a}_i^{(j)} y_1^{i_1} y_2^{i_2} y_3^{i_3}, j = 1, 2, 3 \right\}, \quad (20)$$

аналогичными (19), предполагает предварительное построение системы ортонормированных полиномов (7) по общей методике [2]. В частности, для  $i' = 16$  в этом случае имеем  $\bar{\gamma}_{16,0} = 0$ ;  $\bar{\gamma}_{16,1} = 2,009$  и т. д.

Как показали расчеты, после однократного ( $r = 1$ ) измерения координат и яркости всех  $N = 75$  экспериментальных точек при нормальном распределении ошибок измерений с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma^2 = 0,0016$  оценки  $\{a^{(j)}(75), j = 1, 2, 3\}$  коэффициентов полиномов (19) по алгоритму (13), (14) с использованием ортонормированных полиномов (4) при  $q = 1$  и  $\bar{a}^{(1)}(0) = \bar{a}^{(2)}(0) = \bar{a}^{(3)}(0) = 0$  отличаются от фактических значений компонент векторов нелинейности  $\{a^{(j)}(75), j = 1, 2, 3\}$ , определяемых уравнениями (18), не более чем на 0,014. Остаточные погрешности датчика после пересчета регулярных составляющих измерений по формуле (20) с использованием оценок  $\{\bar{a}^{(j)}(75), j = 1, 2, 3\}$ , найденных при тех же условиях по алгоритму (15), (16) в базисе (7), не превышают 0,025 по координатам и 0,016 по яркости, в то время как их исходные максимальные значения составляли 0,496 и 0,360 соответственно (см. рисунок, а).

## ВЫВОДЫ

1. Калибровка многомерного датчика с использованием полиномиального базиса, ортонормированного на совокупности экспериментальных точек, существенно упрощает рекуррентное оценивание векторов нелинейности и коррекции за счет диагонализации весовой матрицы оптимального фильтра.

2. При расположении экспериментальных точек в узлах ортогональной решетки вычисление ортонормированных базисных полиномов сводится к тензорному перемножению более простых в построении одномерных полиномов, ортонормированных на ребровых точках этой решетки.

3. Оценивание вектора коррекции датчика в общем случае оказывается более трудоемкой задачей, чем оценивание вектора нелинейности, поскольку для построения соответствующего ортонормированного полиномиального базиса необходимо предварительное оценивание регулярных составляющих измерений, а решетка получасмых при этом экспериментальных точек неортогональна.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сизов В. П. Алгоритмы калибровки координатных датчиков робототехнических систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1981.— № 3.
2. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов.— М.: ИЛ, 1963.
3. Сизов В. П. Алгоритмы оптимальной оценки состояния статистически неопределенных линейных динамических систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1977.— № 6.

*Поступило в редакцию 8 октября 1986 г.*

---