

Ю. Е. ВОСКОБОЙНИКОВ

(Новосибирск)

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПРИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

К системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$K\Phi = f \quad (1)$$

приводят многие задачи интерпретации экспериментальных данных (например, оценивание параметров математических моделей, восстановление функциональных зависимостей параметрическими методами). Конечномерная аппроксимация интегральных уравнений I рода также вынуждает обратиться к СЛАУ (1). Как правило, система (1) плохо обусловлена или вырождена, и для построения устойчивого (регуляризованного) решения используются различные методы регуляризации [1, 2]. При этом учет достоверной нетривиальной априорной информации о векторе Φ может существенно повысить точность решения СЛАУ. В последнее время для построения регуляризованного решения используется сингулярное разложение матрицы K . Однако алгоритмы, учитывающие априорную информацию при таком построении решения, остались без внимания.

В данной работе излагается метод нахождения регуляризованного решения на основе сингулярного разложения матрицы, учитывающий априорную информацию о принадлежности вектора Φ выпуклому множеству. Вводятся характеристики, определяющие точность и информативность построенного решения.

Регуляризирующий алгоритм решения СЛАУ. Пусть для определенности матрица K имеет размер $N_f \times N_\Phi$, а Φ , f — векторы соответствующей размерности. Сингулярным разложением матрицы K называется представление [3] $K = U\Lambda V^T$, в котором U , V — ортогональные матрицы размером $N_f \times N_f$, $N_\Phi \times N_\Phi$, T — символ транспонирования матрицы, а Λ — $(N_f \times N_\Phi)$ -матрица с элементами

$$\{\Lambda\}_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Величины λ_i , $i = 1, 2, \dots, N_\Phi$, называются сингулярными числами матрицы K , а столбцы u_j , v_j матриц U , V — левыми и правыми сингулярными векторами. В силу ортогональности матриц U , V справедливо $U^T U = U U^T = I$, $V^T V = V V^T = I$ (I — единичная матрица соответствующей размерности). Предположим, что: а) $N_f \geq N_\Phi$; б) сингулярные числа упорядочены: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_\Phi} \geq 0$; в) вместо точной правой части f задан вектор $\tilde{f} = f + \eta$, где η — случайный вектор с нулевым средним, отражающий погрешность (шум) задания правой части уравнения (1).

Введя векторы $x = V^T \Phi$, $\tilde{y} = U^T \tilde{f}$ и используя разложение $K = U\Lambda V^T$, СЛАУ (1) можно переписать в виде трех подсистем [3]:

$$\begin{aligned} \lambda_j x(j) &= \tilde{y}(j), & \lambda_j \neq 0, & 1 \leq j \leq N_\Phi; \\ 0x(j) &= \tilde{y}(j), & \lambda_j = 0, & 1 \leq j \leq N_\Phi; \\ 0 &= \tilde{y}(j), & N_\Phi + 1 \leq j \leq N_f, \end{aligned} \quad (2)$$

из которых следует, что система (1) совместна, если $\tilde{y}(j) = 0$ для $N_\Phi < j \leq N_f$ и $\tilde{y}(j) = 0$ для $\lambda_j = 0$, $1 \leq j \leq N_\Phi$. Система имеет единственное решение, если $\lambda_j > 0$ для $1 \leq j \leq N_\Phi$, т. е. ранг матрицы K равен N_Φ . В случаях, когда система (1) несовместна или имеет не единственное решение, переходят к нормальному решению Φ_n [1], в качестве которого

принимают вектор, имеющий минимальную норму из всех векторов, доставляющих минимум функционалу $(\mathbf{K}\varphi - \tilde{\mathbf{f}})^T(\mathbf{K}\varphi - \tilde{\mathbf{f}})$. Можно показать, что $\varphi_n = \mathbf{V}\mathbf{x}_n$, а проекции $x_n(j)$ вектора \mathbf{x}_n определяются соотношением

$$x_n(j) = \begin{cases} \tilde{y}(j)/\lambda_j, & \lambda_j \neq 0, \quad 1 \leq j \leq N_\varphi; \\ 0, & \lambda_j = 0, \quad 1 \leq j \leq N_\varphi. \end{cases} \quad (3)$$

Описанный метод построения нормального решения на основе сингулярного разложения (как, впрочем, и другие методы [1]) чувствителен к погрешности правой части и ошибкам вычислительного процесса, реализующего алгоритм. Действительно, пусть $\lambda_j = 0$, а в результате разложения матрицы \mathbf{K} получено значение $\tilde{\lambda}_j = \varepsilon > 0$. Тогда компонента $\tilde{x}_n(j) = \tilde{y}(j)/\tilde{\lambda}_j$ определяется погрешностью правой части, и это может привести к существенным ошибкам в φ_n . Устойчивое к таким ошибкам решение можно определить как $\varphi_\alpha = \mathbf{V}\mathbf{x}_\alpha$, где

$$x_\alpha(j) = r_\alpha(j)\tilde{y}(j), \quad r_\alpha(j) = 1/(\lambda_j + \alpha m(\lambda_j)), \quad (4)$$

α — параметр регуляризации, $m(\lambda)$ — невозрастающая функция, например, $m(\lambda) = \lambda^{-k}$, $k \geq 1$. При соответствующем выборе параметра α решение φ_α является регуляризованным [1].

Физический смысл $r_\alpha(j)$ прост. Значениям $\lambda_j \approx 0$ соответствуют малоинформативные компоненты $\tilde{y}(j)$, так как $\lambda_j x(j) \approx 0$ и $\tilde{y}(j)$ в основном определяется проекцией вектора шума $\vartheta(j) = \mathbf{u}_j^T \eta$. Если $\alpha m(\lambda_j)$ таково, что $\lambda_j \ll \alpha m(\lambda_j)$, то происходит уменьшение (по сравнению с нормальным решением) влияния $\tilde{y}(j)$ на $x_\alpha(j)$ в $\alpha m(\lambda_j)/\lambda_j$ раз. В то же время для $\lambda_j \gg \alpha m(\lambda_j)$ множитель $r_\alpha(j) \approx 1/\lambda_j$ и ослабления $\tilde{y}(j)$ не происходит.

Информативность компоненты $\tilde{y}(j)$ можно оценить количественно. Обозначим через $\sigma_\vartheta^2(j)$ дисперсию проекции шума $\vartheta(j) = \mathbf{u}_j^T \eta$, а через $x(j)$ проекцию точного решения $\mathbf{x} = \mathbf{V}^T \varphi$. Тогда информативность j -й компоненты определим соотношением сигнал/шум $S(j) = \lambda_j^2 x^2(j)/\sigma_\vartheta^2(j)$. Видно, что при $\lambda_j \approx 0$ и конечной дисперсии $\sigma_\vartheta^2(j) > 0$ величина $S(j) \approx 0$. Можно показать, что минимум среднеквадратической ошибки решения достигается, если $\alpha m(\lambda_j) = \lambda_j/S(j)$, $1 \leq j \leq N_\varphi$, и, следовательно, величина параметра регуляризации должна согласовываться с информативностью проекций вектора $\tilde{\mathbf{y}}$. Не останавливаясь на выборе α , заметим только, что существующие алгоритмы выбора [1, 2, 4] могут быть эффективно реализованы с использованием сингулярного разложения матрицы \mathbf{K} . В дальнейшем параметр регуляризации полагается известным.

Рассмотрим информационную обеспеченность различных проекций построенного решения. Первоначально остановимся на нормальном решении φ_n . Введем множество J_ε , состоящее из n_ε индексов j : $1 \leq j \leq N_\varphi$, удовлетворяющих условию $\lambda_j \leq \varepsilon$. Если $\varepsilon = 0$, то количество элементов в J_ε определяет дефект матрицы \mathbf{K} : $n_0 = N_\varphi - \text{rank}(\mathbf{K})$. В общем случае $\varepsilon > 0$ величина n_ε равна размерности подпространства, состоящего из малоинформативных проекций $\tilde{y}(j)$. Посмотрим, как размерность этого подпространства распределяется между проекциями вектора φ_n . Обозначим через $D_{\varphi, \varepsilon}(j) = \sum_{h \in J_\varepsilon} v_{j, h}^2$, где $v_{j, h}$ — j, h -й элемент матрицы \mathbf{K} .

С учетом ортогональности матрицы \mathbf{V} имеем

$$\sum_{j=1}^{N_\varphi} D_{\varphi, \varepsilon}(j) = \sum_{h \in J_\varepsilon} \sum_{j=1}^{N_\varphi} v_{j, h}^2 = \sum_{h \in J_\varepsilon} 1 = n_\varepsilon.$$

Следовательно, величина $D_{\varphi, \varepsilon}(j)$ характеризует распределение размерности n_ε по проекциям построенного решения, и поэтому $D_{\varphi, \varepsilon}(j)$ можно назвать дефектом j -й проекции решения φ_n . Заметим, что $0 \leq D_{\varphi, \varepsilon}(j) \leq 1$ и значение $D_{\varphi, \varepsilon}(j) \approx 1$ свидетельствует о малой информационной обеспеченности j -й проекции построенного решения. Аналогично для $D_{j, \varepsilon}(j) =$

$$= \sum_{h \in J_\varepsilon} u_{j,h}^2 \text{ имеем}$$

$$\sum_{j=1}^{N_f} D_{j,\varepsilon}(j) = \sum_{h \in J_\varepsilon} \sum_{j=1}^{N_f} u_{j,h}^2 = \sum_{h \in J_\varepsilon} 1 = n_\varepsilon$$

и величина $D_{j,\varepsilon}(j)$ (которую можно назвать дефектом j -й проекции вектора \mathbf{f}) характеризует распределение размерности n_ε по проекциям правой части системы (1). Так как $0 \leq D_{j,\varepsilon}(j) \leq 1$, то проекция $f(j)$, для которой $D_{j,\varepsilon}(j) \approx 1$, содержит мало информации об искомом решении φ . Этот факт следует иметь в виду при планировании эксперимента (он позволяет, например, исключить измерение $f(j)$ из плана эксперимента). Для регуляризованного решения φ_α множество J_ε можно определить как $J_\varepsilon = \{j: \lambda_j / (1 + \alpha m(\lambda_j) / \lambda_j) \leq \varepsilon\}$ и величины $D_{\varphi,\varepsilon}(j)$, $D_{f,\varepsilon}(j)$ сохраняют прежний смысл.

Точностные характеристики регуляризирующего алгоритма. Вектор ошибки решения СЛАУ (1) зададим как $\varepsilon_\alpha = \varphi_\alpha - \varphi$ и представим его в виде $\varepsilon_\alpha = \mathbf{b}_\alpha + \xi_\alpha$, где $\xi_\alpha = \varphi_\alpha - \varphi$ — случайный вектор с нулевым средним, обусловленный «передачей» погрешности правой части, а $\mathbf{b}_\alpha = \varphi_\alpha - \varphi$ — систематическая ошибка регуляризации. Вектор φ_α — регуляризованное решение, построенное при точной правой части СЛАУ. Из представлений $\mathbf{f} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T\varphi$, $\varphi_\alpha = \mathbf{V} \text{diag}\{r_\alpha(1), \dots, r_\alpha(N_\varphi)\} \mathbf{U}^T\mathbf{f}$ следует записать φ_α в виде

$$\bar{\varphi}_\alpha = \mathbf{V} \text{diag}\{\lambda_1 r_\alpha(1), \lambda_2 r_\alpha(2), \dots, \lambda_{N_\varphi} r_\alpha(N_\varphi)\} \mathbf{V}^T \varphi = \mathbf{A}_\alpha \varphi. \quad (5)$$

Если ранг матрицы \mathbf{K} равен N_φ , то $\bar{\varphi}_\alpha = \varphi$ только в случае $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{I}$, однако при $\alpha > 0$ $\mathbf{A}_\alpha \neq \mathbf{I}$ и $\bar{\varphi}_\alpha$ будет отличаться от φ . Такое отличие естественно трактовать как искажение, вносимое регуляризирующим алгоритмом (4), а матрицу \mathbf{A}_α можно назвать матрицей рассеяния регуляризирующего алгоритма.

Несмотря на свою простоту, выражение (5) неприменимо на практике для вычисления φ_α , так как вектор φ неизвестен. Поэтому целесообразно (по аналогии с [5]) величину систематической ошибки косвенно характеризовать через параметры матрицы \mathbf{A}_α , элементы которой обозначим $a_{i,j}$. Для каждой i -й строки матрицы \mathbf{A}_α введем ширину $\Delta_\alpha(i) = 2(k-1)$, где

$$k = \min_l \{l: |a_{i,i \pm l}| / |a_{i,i}| \leq 0,4\},$$

имеющую простой физический смысл. Если в векторе φ есть две проекции (например, $\varphi(l')$ и $\varphi(l'')$), то эти проекции будут различимы в решении $\bar{\varphi}_\alpha$ при $|l' - l''| > (\Delta_\alpha(l') + \Delta_\alpha(l''))/2$. Наряду с шириной $\Delta_\alpha(i)$, не учитывающей наличие удаленных от главной диагонали элементов матрицы рассеяния, можно рассмотреть такие «интегральные» характеристики, как отношение решение/фон:

$$O_\alpha(i) = |a_{i,i}| / \left(\sum_{j \neq i} a_{i,j}^2 \right)^{1/2},$$

или k -й момент i -й строки матрицы \mathbf{A}_α :

$$\mu_\alpha^k(i) = \sum_{j=1}^{N_\varphi} |i-j|^k |a_{i,j}|.$$

Способность регуляризирующего алгоритма «подавлять» погрешности правой части охарактеризуем коэффициентом передачи дисперсии этой погрешности. Для нахождения коэффициента предположим, что корреляционная матрица вектора η имеет вид $\sigma_\eta^2 \mathbf{I}$. Положив дисперсию $\sigma_\eta^2 = 1$, вычислим дисперсии проекций $\xi_\alpha(j)$ случайной ошибки решения, кото-

рые и будут определять коэффициенты передачи дисперсии, обозначаемые ниже как $K_\alpha(j)$. Нетрудно показать, что

$$K_\alpha(j) = \sum_{m=1}^{N_\Phi} v_{j,m}^2 r_\alpha^2(m).$$

Если $\alpha = 0$, то выражение

$$K_0(j) = \sum_{m=1}^{N_\Phi} v_{j,m}^2 / \lambda_m^2$$

объясняет низкую устойчивость нормального решения плохо обусловленной СЛАУ ($\lambda_j \approx 0$) к погрешности правой части.

В целом для регуляризирующего алгоритма (4) можно ввести: 1) ширину $\Delta_\alpha = \max \Delta_\alpha(i)$; 2) средний коэффициент передачи дисперсии Δ_α системы чисел $v_{j,m}$ и случайную ошибку решения, и поэтому на можно назвать точностными характеристиками регуляризирующего алгоритма. Использование этих величин позволяет провести анализ полученного решения. Бóльший практический интерес представляет выбор α исходя из заданных точностных характеристик (аналогично выбору параметра сверточного алгоритма вычислительной томографии [5]), однако это предмет другого исследования.

Построение регуляризованного решения с учетом априорной информации. Предположим, что априори известно о принадлежности решения Φ выпуклому множеству Φ , задаваемому системой линейных неравенств:

$$\mathbf{G}\Phi \leq \mathbf{g}, \quad (6)$$

где \mathbf{G} — матрица размером $N_g \times N_\Phi$. Трудность использования такой информации обусловлена тем, что регуляризованное решение определяется через вектор \mathbf{x}_α , при построении которого трудно учесть ограничения (6). Покажем одну возможность эффективного использования априорной информации вида $\Phi \in \Phi$, где множество Φ задается системой неравенств (6).

Введем диагональную матрицу $\mathbf{R}_\alpha = \text{diag} \{r_\alpha(1), r_\alpha(2), \dots, r_\alpha(N_\Phi)\}$ размером $N_\Phi \times N_\Phi$ и вектор $\tilde{\mathbf{y}}_1 = [\tilde{y}(1), \tilde{y}(2), \dots, \tilde{y}(N_\Phi)]^T$, составленный из первых N_Φ проекций вектора \mathbf{y} . Тогда \mathbf{x}_α доставляет минимум функционалу

$$F_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}_\alpha^{-1} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{y}}_1 + \text{const.}$$

Обозначив $\mathbf{D}_\alpha = 2\mathbf{R}_\alpha^{-1}$, $\mathbf{d} = -2\tilde{\mathbf{y}}_1$ и учитывая ограничения (6), приходим к задаче квадратического программирования, а именно:

найти N_Φ -мерный вектор \mathbf{x}_α^* , доставляющий минимум функционалу

$$F_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{D}_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{d} + \text{const} \quad (7)$$

при ограничении $\mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{x} \leq \mathbf{g}$.

Двойственная по Лагранжу задача [6] состоит в максимизации функционала

$$\Psi_\alpha(\boldsymbol{\mu}) = \inf_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{D}_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{d} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{x} - \mathbf{g}) \right\} \quad (8)$$

при ограничении

$$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0},$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — вектор размерности N_g ; $\mathbf{0}$ — нулевой вектор той же размерности. При $\alpha > 0$ матрица \mathbf{D}_α положительно определена, т. е. $\mathbf{x}^T \mathbf{D}_\alpha \mathbf{x} > 0$ для

любого ненулевого вектора x . Поэтому при фиксированном векторе μ функционал $\Psi_\alpha(\mu)$ достигает минимума по x в единственной точке, удовлетворяющей равенству: $D_\alpha x + V^T G^T \mu + d = 0$. Для положительно-определенной матрицы D_α существует обратная матрица $D_\alpha^{-1} = \frac{1}{2} R_\alpha$, и тогда решение этого уравнения имеет вид

$$x = -\frac{1}{2} R_\alpha (-2\tilde{y}_1 + V^T G^T \mu) = x_\alpha - \frac{1}{2} R_\alpha V^T G^T \mu. \quad (9)$$

Подставляя это решение в (8) и выполнив некоторые преобразования, двойственную по Лагранжу задачу можно сформулировать следующим образом:

найти вектор μ^* размерности N_g , доставляющий минимум функционалу

$$\tilde{\Psi}_\alpha(\mu) = \frac{1}{4} \mu^T G V R_\alpha V^T G^T \mu - \mu^T (-g + G V x_\alpha) + \text{const} \quad (10)$$

при ограничении $\mu \geq 0$.

После вычисления μ^* решение x_α^* задачи (7) находится из выражения

$$x_\alpha^* = x_\alpha - \frac{1}{2} R_\alpha V^T G^T \mu^* \quad (11)$$

и состоит из двух слагаемых: регуляризованного решения x_α , полученного безусловной минимизацией функционала $F_\alpha(x)$, и вектора, зависящего от решения μ^* двойственной задачи (10). Очевидно, что если $\mu^* = 0$, то $x_\alpha^* = x_\alpha$. Введем вектор $q = G V x_\alpha - g$, проекции которого $q(i) \leq 0$, если удовлетворяется i -е ограничение системы (6). Покажем, что если $q(i) < 0$, то $\mu^*(i) = 0$. Предположим обратное, т. е. $\mu^*(i) > 0$. Тогда $(-\mu^*(i)q(i)) > 0$, и, уменьшая $\mu^*(i)$, можно уменьшить величину функционала $\tilde{\Psi}_\alpha(\mu)$, т. е. $\mu^*(i)$ не является уже решением задачи (10). При $q(i) = 0$ $\mu^*(i) \geq 0$, и если $q(i) > 0$ (i -е ограничение не выполняется), то $\mu^*(i) > 0$.

Приведем запись двойственной задачи для распространенного случая, когда решение φ неотрицательно, т. е. $\varphi \geq 0$, $G = -I$, $g = 0$. Тогда

$$\tilde{\Psi}_\alpha(\mu) = \frac{1}{4} \mu^T V R_\alpha V^T \mu + \mu^T V x_\alpha + \text{const},$$

вектор $\mu \geq 0$ имеет размерность N_φ , а $x_\alpha^* = x_\alpha + \frac{1}{2} R_\alpha V^T \mu^*$.

Таким образом, построение регуляризованного решения φ_α^* , удовлетворяющего ограничениям $G\varphi \leq g$ на основе сингулярного разложения матрицы K , можно представить следующими этапами:

вычисление регуляризованного решения x_α ;

проверка ограничений $G V x_\alpha \leq g$;

если выполняются эти ограничения, то $x_\alpha^* = x_\alpha$;

если ограничения нарушаются, то находится решение μ^* двойственной задачи (10) и вычисляется x_α^* по формуле (11);

построение вектора решения $\varphi_\alpha^* = V x_\alpha^*$.

Учет априорной информации, задаваемой системой неравенств (6), делает описанный алгоритм построения φ_α^* нелинейным и обуславливает более высокую разрешающую способность алгоритма (по сравнению с линейным алгоритмом (4)). Результаты приводимого ниже вычислительного эксперимента иллюстрируют это замечание.

Результаты вычислительного эксперимента. Изложенный алгоритм построения регуляризованного решения (включая выбор параметра регуляризации и вычисление характеристик $D_{\varphi, \varepsilon}(j)$, $D_{f, \varepsilon}(j)$, Δ_α , K_α) реализован в виде комплекса SVDSYS, разработанного в Институте теоретической и прикладной механики СО АН СССР и состоящего из взаимо-

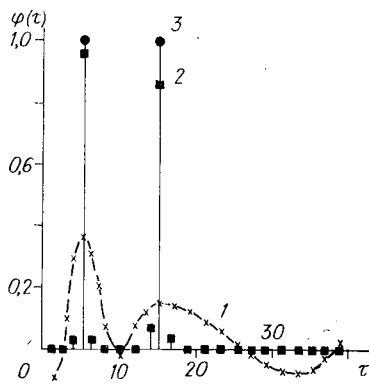
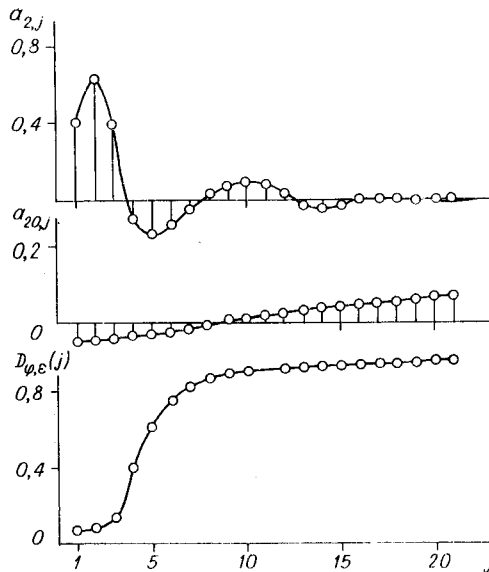


Рис. 1. Векторы решений:

1 — решение Φ_α ; 2 — Φ_α^* ; 3 — точное решение Φ

Рис. 2. Элементы матрицы рассеяния Δ_α и значения характеристики $D_{\Phi, \varepsilon}(j)$



связанных подпрограмм, написанных на алгоритмическом языке Фортран-IV. Приведем некоторые результаты применения этого комплекса в вычислительном эксперименте по решению интегрального уравнения

$$\int_1^{40} \exp(-t/\tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in [1, 40]_2 \quad (12)$$

возникающего при интерпретации экспериментальных данных, полученных при исследовании потоков жидкостей фотон-корреляционным методом [7]. Уравнение аппроксимировалось СЛАУ (1) с $N_\varphi = 24$, $N_f = 60$. Максимальное сингулярное число $\lambda_{\max} = 30$, минимальное — $\lambda_{\min} = 10^{-12}$. Отношение $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 3 \cdot 10^{13}$ характеризует плохую обусловленность аппроксимирующей матрицы \mathbf{K} . Искомое решение $\varphi(\tau) \geq 0$ задавалось в виде двух сдвинутых импульсов единичной амплитуды (рис. 1), а соответствующая правая часть искажалась шумом с относительным уровнем 1 %.

Первоначально строился вектор регуляризованного решения Φ_α (см. рис. 1). Параметр α выбирался из критерия оптимальности [4]. Так как при построении Φ_α априорная информация $\Phi \geq 0$ не учитывалась, то часть проекций вектора Φ имеет отрицательные значения. На рис. 2 приведены элементы 2-й и 20-й строк матрицы рассеяния Δ_α , которые показывают, что степень искажения, вносимая регуляризацией, различна и увеличивается по мере возрастания τ (или индекса j проекций вектора решения). Для величины $\varepsilon = 10^{-3}$ размерность $n_\varepsilon = 16$, а соответствующие значения $D_{\Phi, \varepsilon}(j)$ приведены на рис. 2. Видно, что для $j > 6$ проекции регуляризованного решения Φ_α имеют дефект, близкий к единице, а следовательно, и плохую информационную обеспеченность. Эти два факта характерны для регуляризованных решений уравнения (12).

На рис. 1 показано решение Φ_α^* , построенное с учетом априорной информации $\Phi \geq 0$. При этом параметр регуляризации был уменьшен на два порядка, так как учет положительности вносит дополнительную «регуляризацию» решения. Видно, что Φ_α^* достаточно хорошо приближает точное решение. Затраты машинного времени (ЭВМ БЭСМ-6) для построения решения Φ_α^* и вычисления характеристик $D_{\Phi, \varepsilon}(j)$, $D_{f, \varepsilon}(j)$, $\Delta_\alpha(j)$, $K_\alpha(j)$ составили ~ 70 с.

Автор считает приятным долгом выразить благодарность А. Н. Намочкину за участие в вычислительном эксперименте.

3. Форсайт Дж., Макольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений.— М.: Мир, 1980.
4. Воскобойников Ю. Е., Мицель А. А. Построение устойчивого решения плохо обусловленных систем алгебраических уравнений при случайных погрешностях в исходных данных // Автометрия.— 1982.— № 2.
5. Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г. Разрешающая способность и синтез одного класса алгоритмов вычислительной томографии // Электронное моделирование.— 1986.— № 6.
6. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы.— М.: Мир, 1982.
7. Photon Correlation Technique in Fluid Mechanics // Proc. of the 5th. Intern. Conf./ Ed. E. O. Schultz.— Dubois: Springer-Verlag, 1983.

Поступила в редакцию 22 января 1987 г.
