

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.391

В. Г. ГЕТМАНОВ

(Москва)

ОБ УМЕНЬШЕНИИ ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ДИСКРЕТНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

При исследовании характеристик процессов на специализированных ЭВМ большое значение приобретает требование обеспечения быстродействия алгоритмов обработки. Определение оценок параметров (среднего значения амплитуды, частоты и начальной фазы на заданном интервале времени), как известно, может сводиться к задаче дискретной тригонометрической аппроксимации.

Обычно получение оценок параметров основывается на представлениях во временной области. Для измерения процесса $y_i = y(Ti)$ подбирается модельная синусоидальная функция $y_M(Ti) = a \cos \omega Ti + b \sin \omega Ti$, где T — интервал дискретизации, $i = 0, 1, \dots, N-1$; a, b, ω — параметры модели. Вводится целевая функция — остаточная сумма квадратов $S(a, b, \omega)$:

$$S(a, b, \omega) = \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - a \cos \omega Ti - b \sin \omega Ti)^2.$$

Определение оптимальных параметров связывается с задачей минимизации целевой функции по переменным a, b, ω . Поскольку модельная функция нелинейна по ω , то минимизацию S следует осуществлять прямым методом.

Из [1] оценки параметров a^0, b^0 и частичной остаточной суммы $S(a^0, b^0, \omega)$ при фиксированной частоте ω получаются из необходимых условий экстремума $\partial S/\partial a = 0, \partial S/\partial b = 0$, приводящих к линейной системе

$$\begin{aligned} aa_{11} + ba_{12} &= b_1, \quad aa_{12} + ba_{22} = b_2; \\ a_{11} &= \sum_{i=0}^{N-1} \cos^2 \omega Ti, \quad a_{22} = \sum_{i=0}^{N-1} \sin^2 \omega Ti, \quad a_{12} = \sum_{i=0}^{N-1} \cos \omega Ti \sin \omega Ti; \\ b_1 &= \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos \omega Ti, \quad b_2 = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \sin \omega Ti; \end{aligned} \quad (1)$$

$$a^0 = (b_1 a_{22} - b_2 a_{12})/\Delta, \quad b^0 = (b_2 a_{11} - b_1 a_{12})/\Delta, \quad \Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2; \quad (2)$$

$$S(a^0, b^0, \omega) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i^2 + a^{02} a_{11} + 2a^0 b^0 a_{12} + b^{02} a_{22} - 2a^0 b_1 - 2b^0 b_2. \quad (3)$$

Проделав вычисления по формулам (1)–(3) для нескольких значений частот $\omega = \omega_j$ в окрестности ω_0 — априорно известной средней частоты аппроксимируемого узкополосного процесса, $|\omega_j - \omega_0| < \Delta\omega$ ($j = 1, \dots, m$; $\Delta\omega$ — диапазон подпоиска по частоте), найдем оценки параметров, соответствующие минимуму частичной остаточной суммы по частоте, принимаемые в качестве решения задачи аппроксимации.

Как видно, основное время решения данной задачи аппроксимации при больших N затрачивается на вычисления b_1, b_2 ; расчет a_{11}, a_{12} можно проводить с помощью табличных тригонометрических сумм. Время решения задачи аппроксимации во временной области может быть значительным и приближенно оцениваться следующей формулой: $t_{N_1} = 2N(t_s + t_y)m$, где t_s, t_y — время выполнения операций вычисления синуса и умножения (сложение не учитываем).

Для сокращения времени решения задачи тригонометрической аппроксимации узкополосного процесса предлагается оценивать остаточную сумму в частотной области при условии, что в состав математического обеспечения ЭВМ входит алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). Пусть $F(\omega_k) = \alpha_k + j\beta_k, F_M(a, b,$

$\omega, \omega_k = A_k + jB_k$ являются дискретными преобразованиями Фурье (ДПФ) для измерений процесса и модельной функции, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $\omega_k = \Delta\Omega k$, $\Delta\Omega = 2\pi/N T$. Поскольку аппроксимируется узкополосный процесс, то частотные рассмотрения с несущественной потерей точности можно проводить для номеров дискретных частот, удовлетворяющих неравенствам $k_1 \leq k \leq k_2$, $k_2 - k_1 \ll N$; для $k < k_1$, $k > k_2$ коэффициентами ДПФ изучаемого процесса и модели можно пренебречь, k_1, k_2 — номера граничных гармоник разложения исходного процесса. Оценка остаточной суммы квадратов в частотной области вычисляется на основании следующего соотношения:

$$S(a, b, \omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_2} (\alpha_k - A_k)^2 + (\beta_k - B_k)^2. \quad (4)$$

Запишем выражения для коэффициентов ДПФ комплексных экспоненциальных функций $e^{j\omega T i}$, $e^{-j\omega T i}$ [2]:

$$\begin{aligned} F\{e^{j\omega T i}\} &= X_{1k} + jY_{1k}, \quad F\{e^{-j\omega T i}\} = X_{2k} + jY_{2k}, \quad i, k = 0, 1, \dots, N-1; \\ X_{sk} &= E_{sk} \cos \varphi_{sk}, \quad Y_{sk} = E_{sk} \sin \varphi_{sk}, \quad E_{sk} = \sin NG_{sk} / \sin G_{sk}; \\ \varphi_{sk} &= G_{sk}(N-1), \quad G_{sk} = ((-1)^{s+1} - \Delta\Omega k) T/2, \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Определим ДПФ для введенной модельной функции, используя известные равенства: $\cos \omega T i = (e^{j\omega T i} + e^{-j\omega T i})/2$, $\sin \omega T i = (e^{j\omega T i} - e^{-j\omega T i})/2j$. Отыскиваемые коэффициенты вычисляются с помощью линейных операций:

$$\begin{aligned} F\{a \cos \omega T i + b \sin \omega T i\} &= A_k + jB_k, \quad i, k = 0, 1, \dots, N-1; \\ A_k &= aA_{1k} + bA_{2k}, \quad B_k = aB_{1k} + bB_{2k}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$A_{1k} = (X_{1k} + X_{2k})/2, \quad B_{1k} = (Y_{1k} + Y_{2k})/2, \quad A_{2k} = (Y_{1k} - Y_{2k})/2, \quad B_{2k} = (X_{2k} - X_{1k})/2.$$

По-прежнему нахождение оптимальных a^0, b^0 при фиксированной частоте ω сводится к задаче минимизации частичной остаточной суммы. Воспользовавшись, как и в первом случае, необходимыми условиями экстремума для S из (4), получим линейную систему

$$\begin{aligned} ac_{11} + bc_{12} &= d_1, \quad ac_{12} + bc_{22} = d_2; \\ c_{11} &= \sum_{k=k_1}^{k_2} (A_{1k}^2 + B_{1k}^2), \quad c_{22} = \sum_{k=k_1}^{k_2} (A_{2k}^2 + B_{2k}^2), \\ c_{12} &= \sum_{k=k_1}^{k_2} (A_{1k}A_{2k} + B_{1k}B_{2k}); \\ d_1 &= \sum_{k=k_1}^{k_2} (\alpha_k A_{1k} + \beta_k B_{1k}), \quad d_2 = \sum_{k=k_1}^{k_2} (\alpha_k A_{2k} + \beta_k B_{2k}). \end{aligned} \quad (7)$$

Оценки параметров и частичная остаточная сумма имеют вид

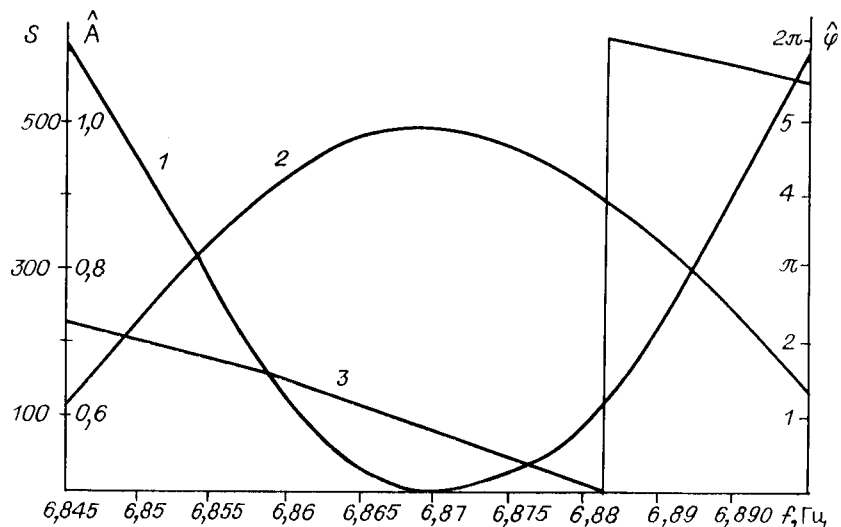
$$a^0 = (d_1 c_{22} - d_2 c_{12})/D, \quad b^0 = (d_2 c_{11} - d_1 c_{12})/D, \quad D = c_{11} c_{22} - c_{12}^2; \quad (8)$$

$$S(a^0, b^0, \omega) = \sum_{k=k_1}^{k_2} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) + a^{02} c_{11} + 2a^0 b^0 c_{12} + b^{02} c_{22} - 2a^0 d_1 - 2b^0 d_2. \quad (9)$$

Затраты времени на вычисление m значений частичных остаточных сумм, включая и время БПФ, выглядят следующим образом (учитываются только операции умножения и взятия синуса в формулах (5)–(9)): $t_{N_2} = t_{\text{БПФ}} + t_{N_{20}}$, где $t_{\text{БПФ}} = 2N \lg_2 N t_y$ — время вычисления БПФ [3]; $t_{N_{20}} = (k_2 - k_1 + 1) [m(8t_s + S1t_y) + 2t_y]$ — оценка времени выполнения операций по формулам (5)–(9).

Возможно дальнейшее повышение эффективности предлагаемого алгоритма. Пусть искомая модельная функция принимается комплексной: $y_M(Ti) = A e^{j(\omega T i + \varphi)}$. Построим исходный узкополосный процесс до комплексного; если реализация процесса имеет большую длительность, то коэффициенты ДПФ для комплексного процесса с достаточной точностью связаны с коэффициентами ДПФ исходного процесса следующим образом: $a_k = \alpha_k + \beta_k$, $b_k = \beta_k - \alpha_k$. В данном случае выражение для ДПФ модельной комплексной экспоненциальной функции записывается в более простом виде [2], чем для обычной модельной синусоидальной функции, и формулы (5)–(9) значительно упрощаются. И далее процесс оптимизации остаточной суммы осуществляется почти аналогично.

Рассмотрим пример построения модели с помощью предлагаемого алгоритма аппроксимации в частотной области для функции $y_i = A \cos(\omega_0 T i + \varphi)$, $A = 1$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, $f_0 = 6,87$ Гц, $T = 0,01$ с, $\varphi = 0,8$, $i = 0, 1, \dots, 4095$. Номер гармоники, соот-



ветствующей максимуму спектральной плотности, определяется по формуле $k_0 = \text{ent}(f_0 NT)$ (ent — целая часть); зададим номера граничных гармоник: $k_1 = k_0 - \Delta k$, $k_2 = k_0 + \Delta k$, $\Delta k = 5$. Проведем вычисления в соответствии с формулами (5)–(9) и найдем оценки параметров модели $\hat{A} = (a^{0^2} + b^{0^2})^{1/2}$, $\hat{\varphi} = \text{arctg}(-b^0/a^0)$. На рисунке представлены графики $S(a^0, b^0, \omega)$ (кривая 1), \hat{A} (2), $\hat{\varphi}$ (3) в зависимости от частоты $f = \omega/2\pi$. Видно, что минимальное значение частичной остаточной суммы соответствует $\hat{f}^0 = 6,87$ Гц, $\hat{A}^0 = 1$, $\hat{\varphi}^0 = 0,8$. Полученные оценки практически не отличаются от исходных параметров.

Проведем оценки времени решения задач аппроксимации при $N = 4096$, $m = 11$, $k_2 - k_1 + 1 = 11$, $t_s \approx 10t_y$. Для вычислений во временной области после подстановки исходных данных в формулы оценок имеем $t_{N_1} = 0,945 \cdot 2^{20} t_y$; для вычислений в частотной области получается, что $t_{N_2} = 0,872 \cdot 2^{17} t_y$. Во втором случае время работы алгоритма почти в 10 раз меньше.

Работа с данным алгоритмом аппроксимации в частотной области подтвердила проведенную оценку быстродействия. Применение алгоритма оказывается особенно эффективным при проведении массовой обработки на специализированных ЭВМ, оснащенных специпроцессором БИФ, осуществляющим преобразование процессов в укороченной двухбайтовой разрядной сетке и при микропрограммном управлении, благодаря чему достигается высокое быстродействие операции БИФ, тогда как обычные арифметические операции, которые производятся в полной разрядной сетке (с использованием, например, алгоритмического языка Бейсик), выполняются с малой скоростью (имеется в виду специализированная ЭВМ типа «Шлюригат» [4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами.— М.: Мир, 1973.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.— М.: Мир, 1978.
3. Введение в цифровую фильтрацию/Под ред. Р. Боггера и А. Константинодиса.— М.: Мир, 1976.
4. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях.— М.: Мир, 1983.— Т. 2.

Поступило в редакцию 21 апреля 1986 г.

УДК 681.3.06

А. А. ЯНТИМИРОВ
(Новосибирск)

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАСТРОВЫХ ГРАФИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

Введение. В Институте автоматики и электрометрии СО АН СССР разработан ряд растровых графических устройств, управляемых микроЭВМ семейства «Электроника 60». В этот ряд входят интерактивные дисплеи нескольких видов и прецизионные выводные лазерные устройства. Полное использование их многообразных возможностей требует разработки сложного программного обеспечения. Вместе с