

Ю. А. КАПИТОНОВ, Ю. И. ПАЛАГИН, А. С. ШАЛЫГИН

(Ленинград)

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ И ПРОЦЕССОВ
ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ
С ПОМОЩЬЮ ЯДЕРНЫХ ОЦЕНОК**

Решение вероятностных задач синтеза, оценки эффективности, математического и полунатурного моделирования сложных информационно-измерительных и управляемых систем, систем обработки изображений требует априорной информации о характеристиках случайных полей и процессов [1—3]. Модели двумерных и трехмерных случайных полей (СП) используются для описания свойств оптических изображений облачности и ландшафтов [1—5], рельефа земной и взволнованной морской поверхности [6], турбулентных пульсаций воздушных потоков [7] и других физических факторов. Основной статистической информацией, получаемой в эксперименте, о характеристиках исследуемого поля являются, как правило, данные о математическом ожидании (МО), корреляционной функции (КФ) и одномерном законе распределения [1—5]. Методы моделирования СП по этим характеристикам описаны в [3, 8—10 и др.], оценки КФ исследованы в [11, 12].

В настоящей статье рассматривается задача оценивания плотности распределения. Известно (см. [13]) большое число методов оценивания плотности распределения. Среди непараметрических методов наибольшее распространение получили методы гистограмм и ядер. Исследованию ядерных оценок по независимой выборке посвящены работы [14—17 и др.], где изучались асимптотические свойства: первые два момента, состоятельность, нормальность, вопросы оптимизации оценок. Для стационарных случайных процессов условия состоятельности ядерных оценок получены в [3, 10, 18—23].

В отличие от известных работ здесь исследуются случайные поля $\xi(t)$ конечномерного аргумента $t = (t_1, \dots, t_m) \in R^m$. Показывается, что асимптотическая теория ядерных оценок независимых выборок может использоваться и для многомерных случайных полей. Оцениваются диапазоны длин реализаций, при которых применимы асимптотические соотношения, и приводится сравнение метода ядер и гистограмм. Моменты, смещение и среднее квадратическое отклонение оценок исследуются по точным (а не асимптотическим) формулам, анализируется влияние характеристик поля и параметров обработки на погрешность оценивания плотности распределения.

Ядерная оценка для случайного поля. Первые два момента. Пусть дана реализация СП $\xi(t)$ на m -мерном прямоугольнике $t \in [0, T_1] \times \dots \times [0, T_m]$. Реализация дискретизирована по пространству с шагом $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_m)$, Δ_i — шаг дискретизации по переменной t_i , $(N_i + 1)$ — число дискрет по i -й координате, $T_i = N_i \Delta_i$, $N = \prod_{i=1}^m (1 + N_i)$ — общее число измеренных значений поля. Дискретные значения поля в отличие от непрерывных $\xi(t)$ обозначим с индексом ξ_j , $j = (j_1, \dots, j_m)$, $j_k = 0, 1, \dots, N_k + 1$, $t_k = j_k \Delta_k$. Примем, что СП $\xi(t)$ однородно на уровне двумерных распределений, т. е. плотность распределения $f(x, y; j)$ любой пары ξ_k, ξ_{k+j} не зависит от вектора $K = (K_1, \dots, K_m)$, K_i — целое. Это условие выполняется, в частности, для однородных в узком смысле полей. Требуется по экспериментальной совокупности ξ_j оценить одномерную плотность распределения $f(x)$.

Введем ядерную оценку вида

$$\tilde{f}_N(x) = \frac{1}{Nh} \sum_{j_k=0,1,\dots,N_k} K\left(\frac{x-\xi_j}{h}\right) \quad (1)$$

где $h = h(N)$ — последовательность положительных величин (коэффициенты размытости); $K(z)$, $z \in R^1$ — функция ядра; x — аргумент плотности $f(x)$. Сумма в формуле (1) m -мерная. Относительно коэффициентов $h(N)$ и ядра будем предполагать выполненными условия

$$\text{а) } \lim_{N \rightarrow \infty} h(N) = 0, \quad \text{б) } \lim_{N \rightarrow \infty} Nh(N) = \infty; \quad (2)$$

$$\text{а) } 0 \leq K(z) \leq \sup K(z) < \infty, \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} K(z) dz = 1;$$

$$\text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} K(z) z dz = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(z) z^2 dz = 1. \quad (3)$$

Математическое ожидание оценки (1) определяется тем же выражением

$$M \tilde{f}_N(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(z) f(x-hz) dz, \quad (4)$$

что и для независимых наблюдений [14—17]. Поэтому при условиях (2а), (3) оценка асимптотически не смещена, причем условие (3в) гарантирует более высокий (квадратичный) порядок убывания смещения относительно h .

Дисперсия оценки (1) равна

$$\sigma^2[\tilde{f}_N(x)] = \frac{1}{Nh^2} \sum_{j \in D} w(j) R_v(j). \quad (5)$$

Здесь $w(j) = \prod_{k=1}^m [1 - |j_k|/(N_k + 1)]$; $D = [-N_1, N_1] \times \dots \times [-N_m, N_m]$ — m -мерный прямоугольник; $R_v(j) = M v_k v_{k+j} - (M v_k)^2$ — корреляционный момент случайных величин $v_k = K[(x - \xi_k)/h]$. Функция $R_v(j)$ определяется формулой

$$R_v(j) = \begin{cases} h^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(u) K(v) \Delta f(x-hu, x-hv; j) du dv & \text{при } j \neq 0; \\ h \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) f(x-hu) du - h^2 [M \tilde{f}_N(x)]^2 & \text{при } j = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\Delta f(x, y; j) = f(x, y; j) - f(x)f(y). \quad (7)$$

Выделяя в формуле (5) член с номером $j = 0$, с помощью (6) получим выражение

$$\sigma^2[\tilde{f}_N(x)] = \sigma_0^2(N, x) + \Delta \sigma_0^2(N, x), \quad (8)$$

где первое слагаемое

$$\sigma_0^2(N, x) = \frac{1}{Nh} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) f(x-hu) du - h [M \tilde{f}_N(x)]^2 \right\}$$

определяет дисперсию оценки при условии, что ξ_j независимы, а второе слагаемое

$$\Delta \sigma_0^2(N, x) = \frac{1}{N} \sum_{j \in D} w(j) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(u) K(v) \Delta f(x-hu, x-hv; j) du dv$$

учитывает зависимость ординат случайного поля. Здесь и далее штрих у знака суммы означает, что при суммировании член с номером $j = 0$ опущен. Величина $\sigma_0^2(N, x)$ детально исследована в [14—17]. Ее порядок убывания при $N \rightarrow \infty$ равен

$$\sigma_0^2(N, x) \sim \frac{f(x)}{Nh} L, \quad L = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du.$$

Если выполнено условие

$$\lim_{|j| \rightarrow \infty} \Delta f(x, y; j) = 0, \quad (9)$$

где предел равномерен относительно $(x, y) \in R^2$, то имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta \sigma_0^2(N, x) = 0,$$

т. е. оценка (1) состоятельна. Условие (9) означает асимптотическую независимость ординат ξ_k и ξ_{k+j} поля. Если усилить (9), потребовав равномерной сходимости m -мерного ряда

$$\sum_j' \Delta f(x, y; j) = \Phi(x, y), \quad (10)$$

то слагаемое $\Delta \sigma_0^2(N, x)$ будет иметь порядок убывания более высокий (равный C/N), чем величина $\sigma_0^2(N, x)$. Здесь и далее C — некоторая постоянная. При условии (10) асимптотические выражения для моментов ядерной оценки плотности распределения СП оказываются такими же, как и для независимой выборки. Для стационарных случайных процессов впервые этот факт отмечался в [18, 19] и позднее — при различных предположениях относительно процесса — в [3, 10, 21—23]. Для гауссовых случайных полей с КФ $R_{\xi}(j) = \sigma_{\xi}^2 \rho_{\xi}(j)$ можно показать, что условия состоятельности (9), (10) могут быть заменены, как следует из [3], на более простые:

$$\lim_{|j| \rightarrow \infty} \rho_{\xi}(j) = 0; \quad (9a)$$

$$\sum_j |\rho_{\xi}(j)| < \infty. \quad (10a)$$

Здесь σ_{ξ}^2 — дисперсия поля; $\rho_{\xi}(j)$ — нормированная КФ (НКФ).

Анализ интегральной среднеквадратической ошибки. Рассмотрим относительную интегральную ошибку

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \{B^2[\tilde{f}_N(x)] + \sigma^2[\tilde{f}_N(x)]\} dx \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx, \quad (11)$$

где $B[\tilde{f}_N(x)] = M\tilde{f}_N(x) - f(x)$ — смещение оценки. Из формул (8), (11) следует, что величина J представима в виде

$$J = J_{\text{нез}} + J_{\text{кор}}, \quad (12)$$

где индексами помечены слагаемые, соответствующие независимым и коррелированным ординатам поля:

$$J_{\text{нез}} = \int_{-\infty}^{\infty} \{B^2[\tilde{f}_N(x)] + \sigma_0^2(N, x)\} dx \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx; \quad (13)$$

$$J_{\text{кор}} = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \sigma_0^2(N, x) dx \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx.$$

Величина $J_{\text{нез}}$ исследовалась в [16] и имеет порядок убывания C_1/Nh . Анализ $J_{\text{кор}}$ показывает, что при условиях (10) или (10a) и $N \rightarrow \infty$ ее порядок равен C/N , т. е. выше, чем у $J_{\text{нез}}$. Поэтому результаты исследо-

ваний [16] при достаточно длинных реализациях применимы и для случайных полей.

Необходимо оценить диапазон длин реализаций полей и процессов, при которых справедлива асимптотическая теория. Рассмотрим гауссово СП с НКФ $\rho_{\xi}(j)$ и ядерную оценку с нормальным ядром

$$K(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}. \quad (14)$$

Функционалы (12), (13) вычисляются в явном виде:

$$J_{\text{нез}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} - \frac{2}{\sqrt{1+h^2/2}} + \frac{1}{Nh} - \frac{1}{N\sqrt{1+h^2}}; \quad (15)$$

$$J_{\text{кор}} = \frac{1}{N} \sum'_{j \in D} w(j) \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+h^2 - \rho_{\xi}(j)}} - \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \right\}. \quad (16)$$

Численные исследования проводились для случайных процессов с НКФ

$$\rho_{\xi}^{(1)}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau \quad (17)$$

и для двумерных СП с НКФ

$$\rho_{\xi}^{(2)}(\tau) = e^{-\alpha_1|\tau_1| - \alpha_2|\tau_2|}; \quad \rho_{\xi}^{(3)}(\tau) = e^{-\sqrt{(\alpha_1\tau_1)^2 + (\alpha_2\tau_2)^2}}. \quad (18)$$

Асимптотически оптимальное значение h и асимптотическое значение J , как следует из [16] и формул (15), (16), равны

$$h_{\text{опт}\infty} = C_2 \sigma_{\xi} N^{-1/5}; \quad C_2 = (4/3)^{-1/5} \approx 1,059;$$

$$J_{\infty} = \frac{3}{16} h^4 + \frac{1}{Nh}. \quad (19)$$

Погрешность асимптотической теории характеризует показатель $\bar{J} = (J - J_{\infty})/J$ 100 %. Из расчетов видно, что эта величина может принимать различные значения в зависимости от длины реализации и степени коррелированности ординат процесса. При $T = 100\tau_k$ (рис. 1) порядок \bar{J} равен ± 40 %. Здесь $\tau_k = 3/\alpha$ — интервал корреляции процесса. Значения $\bar{J} = (10-15)$ % достигаются для процессов при длинах реализации $T \approx \approx 10^5 \tau_k$, для двумерных полей при длинах ребра прямоугольника $T_i \approx \approx 700 \tau_{k_i}$.

Значения $h_{\text{опт}}$ при конечных длинах реализации определялись численно. Расчеты (примеры — на рис. 2) показывают, что оптимальные значения $h_{\text{опт}}$ дают возможность уменьшить ошибку J по сравнению с $h = h_{\text{опт}\infty}$ при относительно коротких реализациях. Для стационарных процессов величина выигрыша равна (10–40) % при длинах реализации $T/\tau_k \in (5; 50)$ и шагах дискретизации $\Delta t/\tau_k \in (0,05; 0,2)$. Для двумерных полей оптимизация h дает выигрыш порядка (10–20) % на прямоугольниках с длиной ребра $T_i/\tau_{k_i} \in (3; 10)$ и шагах $\Delta_i/\tau_{k_i} \in (0,05; 0,4)$.

Графики поправок к асимптотически оптимальному значению приведены на рис. 3. Для процессов при $T/\tau_k > 50$ и для полей при $T_i/\tau_{k_i} > 10$ для выбора h можно пользоваться формулой (19). При этом отличие $J(h_{\text{опт}})$ от $J(h_{\text{опт}\infty})$ имеет порядок (3–5) %.

Исследовалось влияние шага дискретизации на точность оценивания плотности распределения. Аналогичные исследования для оценок математического ожидания, дисперсии и КФ процессов проводились в [3, 41 и др.]. На рис. 4 приведены примеры расчетов, показывающие существенное (в 2–6 раз) повышение точности ядерных оценок при малых шагах дискретизации. Шаг дискретизации процесса влияет на точность оценки плотности распределения в гораздо большей степени, чем на точность моментных характеристик. Могут быть рекомендованы шаги обработки при использовании ядерной оценки порядка $\Delta \approx 0,1\tau_k$. Дальнейшее уменьшение шага мало влияет на точность оценки.

N	Q	Q_T	\bar{Q}	N	Q	Q_T	\bar{Q}
50	2,17	2,60	17	500	2,95	3,98	33
100	2,39	2,95	19	1000	3,25	4,77	30
200	2,66	3,66	27	5000	4,03	5,15	22

Сравним оценку (4) с методом гистограмм. Оптимальные значения шага гистограммы Δ_r и интегральной ошибки $J_{\text{гопт}}$ получены в [24]. Из [16, 24] следует асимптотическая формула

$$\text{где } Q = \frac{J_{\text{гопт}}}{J_{\text{опт}}} \sim 0,66 N^{2/15} L^{-4/5} \varphi(f), \quad (20)$$

$$\varphi(f) = S_1^{-1/3} S^{1/5}, \quad S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [f'(x)]^2 dx, \quad S = \int_{-\infty}^{\infty} [f''(x)]^2 dx.$$

Функционал $\varphi(f)$ характеризует влияние оцениваемой плотности на величину выигрыша Q ядерной оценки. В таблице приведены значения показателя Q , рассчитанные для различных N по асимптотическому соотношению (20) для нормального ядра ($L = (2\sqrt{\pi})^{-1} \approx 0,282$) и гауссова распределения ($\varphi(f) = (54\pi)^{-1/15} \approx 0,710$), точные значения показателя Q_T и погрешность асимптотических формул $Q = (Q - Q_T)/Q_T$ 100 %.

Представим значения функционала

$$\bar{\varphi}(f) = \varphi(f) / \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right),$$

характеризующего влияние аномальности распределения. Для гамма-распределения $f(x, \alpha, \beta) = \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} / \Gamma(\alpha)$ функционал $\bar{\varphi}(f)$ принимает значения

α	1	2	3	4	5	∞
$\bar{\varphi}(f)$	1,28	0,85	0,80	0,89	0,92	1

Здесь $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция. Расчеты показывают, что для негауссовых процессов величина Q выигрыша ядерной оценки по сравнению с гистограммой может отличаться в пределах (10—30) % от данных, полученных в предположении нормальности.

Смещение и дисперсия при конечной длине реализации. Для гауссова случай-

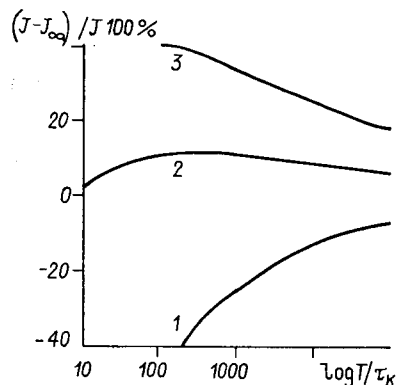


Рис. 1. Зависимость величины $(J - J_\infty)/J$ 100 % от объема измерений случайного процесса с НКФ $\rho_\xi(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ при различных шагах дискретизации:

$$1 - \Delta = 1\tau_k, \quad 2 - 0,2\tau_k, \quad 3 - 0,1\tau_k$$

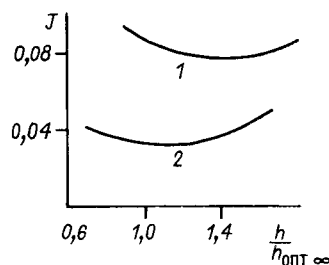


Рис. 2. График зависимости интегральной квадратической ошибки от коэффициента размытости:

1 — для случайного процесса с $\rho_\xi(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $T = 5\tau_k$, $\Delta = 0,1\tau_k$; 2 — для случайной величины $N = 50$

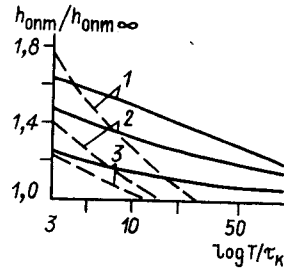


Рис. 3. Графики поправок $h_{\text{опт}}/h_{\text{опт}\infty}$ для случайных процессов (сплошная линия) с НКФ $\rho_{\xi}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, случайных полей $\rho_{\xi}(\tau) = \rho_{\xi}^{(1)}(\tau)$ (штриховая линия) при различных шагах дискретизации: $1 - \Delta = 0,05\tau_h$, $2 - 0,1\tau_h$, $3 - 0,2\tau_h$

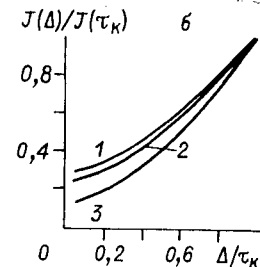
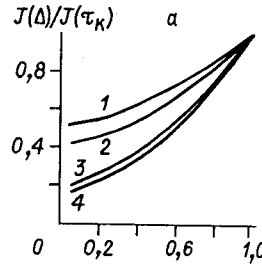


Рис. 4. Графики зависимости отношения $J(\Delta)/J(\tau_k)$ от шага дискретизации при различных длинах реализации: a — случайный процесс: $1, 3 - T = 20\tau_h$, $2, 4 - 50\tau_h$, $\rho_{\xi}(\tau) = \rho_{\xi}^{(1)}(\tau)$; $1, 2 - \beta = 0$, $3, 4 - \beta = 3/\alpha$; b — двумерное случайное поле: $\rho_{\xi}(\tau) = \rho_{\xi}^{(2)}(\tau)$; $1 - T_i = 3\tau_{h_i}$, $2 - 5\tau_{h_i}$, $3 - 10\tau_{h_i}$

ного поля и ядра вида (14) математическое ожидание и составляющие дисперсии определяются формулами

$$M \tilde{f}_N(x) = [\sigma_{\xi}^2 2\pi (1 + \bar{h}^2)]^{-1/2} \exp[-\bar{x}^2/2(1 + \bar{h}^2)]; \quad (21)$$

$$\sigma_0^2(N, x) = \frac{1}{\sigma_{\xi}^2 N h} \left\{ \frac{\exp[-\bar{x}^2/(2 + \bar{h}^2)]}{2\sigma_{\xi}^2 \pi \sqrt{2 + \bar{h}^2}} - \sigma_{\xi} \bar{h} [M \tilde{f}_N(x)] \right\}; \quad (22)$$

$$\Delta\sigma_0^2(N, x) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi}^2 N} \sum_{j \in D}' w(j) \left\{ \frac{\exp[-\bar{x}^2/(1 + \bar{h}^2 + \rho_{\xi}(j))]}{\sqrt{(1 + \bar{h}^2)^2 - \rho_{\xi}^2(j)}} - \exp[-\bar{x}^2/(1 + \bar{h}^2)]/(1 + \bar{h}^2) \right\}, \quad (23)$$

где $\bar{x} = (x - m_{\xi})/\sigma_{\xi}$, m_{ξ} — математическое ожидание; $\bar{h} = h/\sigma_{\xi}$. Смещение равно

$$B[\tilde{f}_N(x)] = [\sigma_{\xi}^2 2\pi]^{-1/2} \exp[-\bar{x}^2/2] \times \times \{ \exp[\bar{x}^2 \bar{h}^2/2(1 + \bar{h}^2)]/(1 + \bar{h}^2)^{-1/2} - 1 \}. \quad (24)$$

Расчеты проводились по формулам (21)–(24), значение h выбиралось оптимальным по критерию J , шаг дискретизации $\Delta = 0,1\tau_h$.

На рис. 5 приведены графики относительного смещения

$$K_B(x) = B[\tilde{f}_N(x)]/f(x)$$

для процессов и полей с НКФ (17), (18). Для оптимальных значений h величина смещения зависит от корреляционных характеристик. Расчеты показывают, что для процессов при $T > 100\tau_h$ и двумерных случайных полей при $T_i > 5\tau_{h_i}$ смещенностью

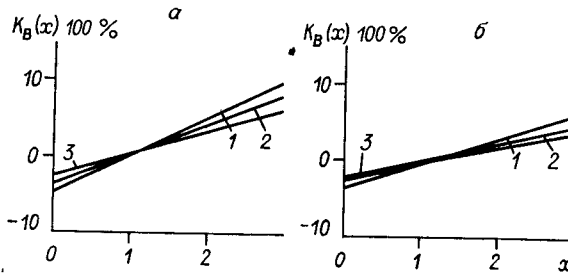


Рис. 5. Относительное смещение оценки: a — случайные процессы с длинами реализации: $1 - T = 20\tau_h$, $2 - 50\tau_h$, $3 - 100\tau_h$; b — двумерное случайное поле: $1 - T_i = 3\tau_{h_i}$, $2 - 5\tau_{h_i}$, $3 - 10\tau_{h_i}$

оценки можно пренебречь, $K_B(x) < 5\%$.

Статистический разброс ядерной оценки характеризуется величина $K_{\sigma_0}(x) = \sigma[\tilde{f}_N(x)]/M\tilde{f}_N(x)$.

На рис. 6 представлены графики $K_{\sigma_0}(x)$. Для процессов с НКФ (17) при $\beta = 0$ неравенство

$$K_{\sigma_0}(x) < \varepsilon = 5\%$$

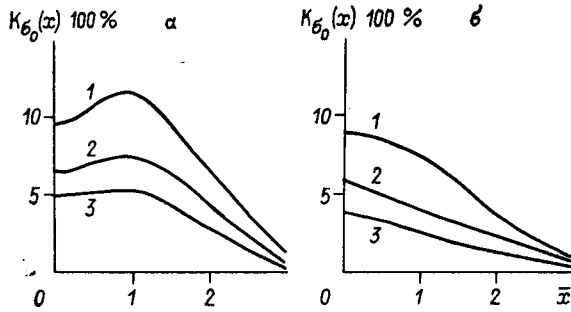


Рис. 6. Относительное среднее квадратическое отклонение оценки при различных длинах реализации:

a — случайный процесс с НКФ $\rho_{\xi}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$: $1 - T_i = 20\tau_h$, $2 - 50\tau_h$, $3 - 100\tau_h$; b — двумерное случайное поле с НКФ $\rho_{\xi}(\tau) = \rho_{\xi}^{(2)}(\tau)$: $1 - T_i = 5\tau_{h_i}$, $2 - 10\tau_{h_i}$, $3 - 20\tau_{h_i}$

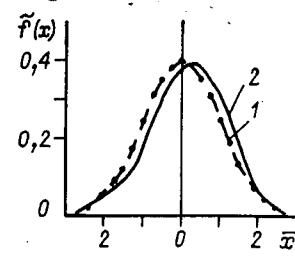


Рис. 8. Ядерные оценки плотности распределения случайного поля яркости:

штриховая линия — плотность нормального закона

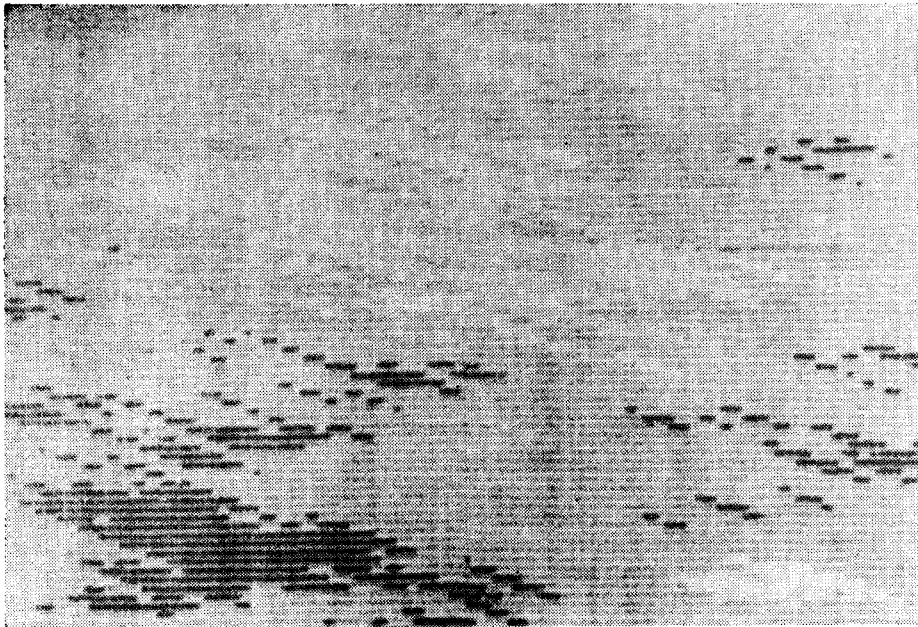


Рис. 7. Пример реализации двумерного случайного яркостного поля

достигается при $T > 100\tau_h$, для двумерных случайных полей — при $T_i > 10\tau_{h_i}$. Приведем значения величины $K_{\beta}(\bar{x}) = \sigma_{\beta}[\tilde{f}_N(\bar{x})] / \sigma_0[\tilde{f}_N(\bar{x})]$, где $\sigma_{\beta}[\tilde{f}_N(x)]$; $\sigma_0[\tilde{f}_N(x)]$ — среднее квадратические отклонения оценки (1) для процессов с НКФ (17) при $\beta = 3$ и $\beta = 0$:

\bar{x}	0	1	2	3
$T = 50 \tau_h$	0,9	0,75	0,9	0,9
$T = 100 \tau_h$	0,95	0,5	0,6	0,75

Для процессов с осциллирующими НКФ погрешность оценивания плотности уменьшается в 1,2—2 раза.

Пример 1. Моделировались на ЭВМ реализации оптических изображений полей облачности $V_{\Delta\lambda}(x, y)$, $(x, y) \in R^2$. Двумерное яркостное поле $V_{\Delta\lambda}(x, y)$ считалось нормальным с заданными пространственной НКФ и математическим ожиданием [4, 5]. Использовался метод параметрических моделей [8, 9]. Изображения типового фонового ансамбля при-

оптимальных значений коэффициента размытости приемлемы и для существенно более коротких реализаций порядка $T/\tau_k > 50$, $T_i/\tau_{k_i} > 10$.

Уменьшение шага дискретизации до уровня $\Delta = 0,1\tau_k$ позволяет повысить точность ядерной оценки в 2—6 раз. Для процессов, близких к гауссовым, смещенность оценки можно пренебречь при длинах реализации $T > 100\tau_k$, а для полей — при $T_i > 5\tau_k$. При длинах реализации $T > 100\tau_k$ для процессов и $T_i > 10\tau_{k_i}$ для полей относительное среднеквадратическое отклонение оценки не превышает 5 %.

Более высокая точность ядерной оценки позволяет решать задачи экспериментальной обработки случайных полей и процессов по значительно более коротким реализациям, чем методом гистограмм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левшин В. Л. Обработка информации в оптических системах неинтеграции.— М.: Машиностроение, 1978.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений.— М.: Мир, 1982.— Ч. 2.
3. Шалыгин А. С., Палагин Ю. И. Прикладные методы статистического моделирования.— Л.: Машиностроение, 1986.
4. Сергеев Д. А., Януш Д. А. Статистические методы исследования природных объектов.— Л.: Гидрометеониздат, 1976.
5. Фираго В. А., Ханок Б. Ю., Долинин В. В. Естественные фоновые помехи в окнах прозрачности атмосферы (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика.— 1984.— Т. XXVII, № 11.
6. Давидан И. П., Лопатухин Л. И., Рожков В. А. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс.— Л.: Гидрометеониздат, 1978.
7. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, 1967.— Ч. 2.
8. Палагин Ю. И. Синтез параметрических представлений при математическом моделировании векторных случайных полей и процессов // АиТ.— 1983.— № 41.
9. Палагин Ю. И. Негармонические модели параметрических представлений случайных процессов и полей // Автометрия.— 1985.— № 4.
10. Shaligin A. S., Palagin Y. I., Malyshev I. A. Control, accuracy and reliability of a statistical simulation of nonstationary system // Стохастические системы: Сб. тр. симп. ИФАК.— Москва; Вильюс, 1986.
11. Виленин С. Я. Статистическая обработка результатов исследования случайных функций.— М.: Энергия, 1979.
12. Палагин Ю. И., Шалыгин А. С. Исследование законов распределения оценок корреляционных функций стационарных процессов по экспериментальным данным // Автометрия.— 1982.— № 6.
13. Шапиро Е. И. Непараметрические оценки плотности вероятности в задачах обработки результатов наблюдений. (Обзор) // Зарубеж. радиоэлектрон.— 1976.— № 2.
14. Rozenblatt M. Remarks on some nonparametric estimate of a density function // Ann. Math. St.— 1956.— V. 27, N 3.— P. 832.
15. Parzen E. The estimation of a probability density function and the mode // Ann. Math. St.— 1962.— V. 33, N 3.— P. 1065.
16. Епанечников В. А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятности и ее применение.— 1969.— Т. XIV, вып. 4.
17. Педарая Э. А. Непараметрическая оценка плотности вероятности и кривой регрессии.— Тбилиси: ТбилиГУ, 1983.
18. Rozenblatt M. Density estimates and Markov sequences // Nonparametric Techniques in Stat. Inference.— Cambridge: Univ. Press., 1970.
19. Rozenblatt M. Curve estimates // Ann. Math. St.— 1971.— V. 42, N 6.— P. 4815.
20. Roussas G. Nonparametric estimation of the transition distribution function of a Markov process // Ann. Math. St.— 1969.— V. 40, N 4.— P. 1386.
21. Кошкин Г. М., Тарасенко Ф. П. Об одном критерии согласия для слабозависимой выборки // Математическая статистика и ее приложения.— Томск: ТГУ, 1976.— Вып. IV.
22. Кошкин Г. М. Непараметрическое оценивание плотности стационарного процесса // Статистические измерения и применение микромашинных средств в измерениях: Тр. Всесоюз. симп.— Ленинград; Вильюс: ВНИИЭЦ, 1982.
23. Добровидов А. В. Непараметрические методы нелинейной фильтрации стационарных случайных последовательностей // АиТ.— 1983.— № 6.
24. Scott D. W. On optimal and data based histograms // Biometrika.— 1979.— V. 66, N 3.— P. 605.

Поступила в редакцию 1 декабря 1986 г.