

А. В. АСТАФЬЕВ, В. П. БАКАЛОВ, Н. П. РУССКИХ  
(Москва)

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА  
ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ СИГНАЛОВ  
ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ ИСКАЖЕНИЯХ

Восстановление двумерных сигналов является обратной задачей, часто сводящейся к решению уравнения свертки с неизвестным ядром. В [1] теоретически показана возможность восстановления двумерных сигналов при условии пространственной ограниченности (финитности) функций, описывающих исходный сигнал и искажения. Для восстановления можно использовать прямые методы [2], однако они обладают более высокой чувствительностью к ошибкам измерения и вычисления по сравнению с итерационными. В настоящей работе для решения уравнения свертки при восстановлении двумерных сигналов использован градиентный метод наискорейшего спуска.

Пусть  $S(i)$ ,  $S_1(i)$ ,  $S_2(i)$  — пространственно-ограниченные в общем случае комплексные решетчатые функции обобщенной переменной  $i = (i_1, i_2, \dots, i_N)$ , представляющие искаженный сигнал, неискаженный и искажающую функцию. Тогда

$$S(i) = S_1(i) \otimes S_2(i) = \sum_j S_1(i-j) S_2(j), \quad (1)$$

где  $i_1, i_2, \dots, i_N$  принимают целочисленные значения;  $\otimes$  — символ операции свертки. Условие пространственной ограниченности означает, что  $S_1(i) = 0$  при  $i_1 < N_{1(1)}$ ,  $i_1 > M_{1(1)}$ ,  $\dots$ ,  $i_N < N_{1(N)}$ ,  $i_N > M_{1(N)}$ ;  $S_2(i) = 0$  при  $i_1 < N_{2(1)}$ ,  $i_1 > M_{2(1)}$ ,  $\dots$ ,  $i_N < N_{2(N)}$ ,  $i_N > M_{2(N)}$ .

Процедура решения уравнения свертки в рассматриваемом случае предполагает нахождение оценок  $S_1(i)$  и  $S_2(i)$ , обозначенных как  $\sigma_1(i)$  и  $\sigma_2(i)$ , при многократном последовательном осуществлении итерации, реализуемой по правилу [3]

$$\sigma_{1(2)}^{k+1}(i) = \sigma_{1(2)}^k(i) + \alpha_{1(2)}^k \nabla f_{1(2)}^k(i). \quad (2)$$

Здесь  $\alpha_{1(2)}^k$  — параметр, характеризующий длину шага для  $k$ -й итерации в направлении антиградиента  $\nabla f_{1(2)}^k(i)$ , вычисляемого для принятой целевой функции. При этом индекс 1 соответствует  $\sigma_1(i)$ , индекс 2 —  $\sigma_2(i)$ .

Пусть в качестве целевой функции выбрана

$$f = \sum_i a(i) |S(i) - \sigma(i)|^2, \quad (3)$$

где  $a(i)$  — весовая функция;  $\sigma(i) = \sigma_1(i) \otimes \sigma_2(i)$ . В простейшем случае  $a(i) = 1$ , в более общем — выбор  $a(i) \neq 1$  и  $a(i) > 0$  может привести к существенному улучшению сходимости метода наискорейшего спуска.

Антиградиент  $\nabla f_{1(2)}(i)$  соответствует следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \nabla f_1(i) &= 2a(i) [S(i) - \sigma(i)] \otimes \sigma_2^*(-i); \\ \nabla f_2(i) &= 2a(i) [S(i) - \sigma(i)] \otimes \sigma_1^*(-i), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\sigma_{1(2)}^*(i)$  — функции, комплексно сопряженные  $\sigma_{1(2)}(i)$ .

Производные, определяющие антиградиент, вычисляются по действительным и мнимым частям  $\sigma_1(i)$  и  $\sigma_2(i)$  и затем объединяются. При этом  $\sigma_1(i)$  и  $\sigma_2(i)$  есть искомые переменные для каждого фиксированного значения  $i$  [3].

После преобразований получаем, что

$$\begin{aligned} \nabla f_1(i) &= 2\text{ОПФ}[A(\omega)\sigma_2^*(\omega)]; \\ \nabla f_2(i) &= 2\text{ОПФ}[A(\omega)\sigma_1^*(\omega)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $A(\omega) = \text{ПФ}[a(i) (S(i) - \sigma(i))]$ ;  $\sigma_{1(2)}(\omega) = \text{ПФ}[\sigma_{1(2)}(i)]$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$  — обобщенная пространственная частота; символы ПФ и ОПФ соответствуют процедурам прямого и обратного дискретных преобразований Фурье.

Выражения (4) легко могут быть реализованы в аналоговом вычислителе, так как они означают, что антиградиент  $\nabla f_{1(2)}(i)$  есть взаимная корреляционная функция  $a(i) [S(i) - \sigma(i)]$  и  $\sigma_{2(1)}^*(i)$ . При цифровой реализации метода для антиградиента  $\nabla f_{1(2)}(i)$  удобно использовать выражения (5). Для нахождения  $\alpha^k$ , минимизирующего (3), целесообразно, как показывает анализ, на каждом шаге изменять поочередно в соответствии с (2) лишь одну из функций  $\sigma_1(i)$  или  $\sigma_2(i)$ , а не одновременно

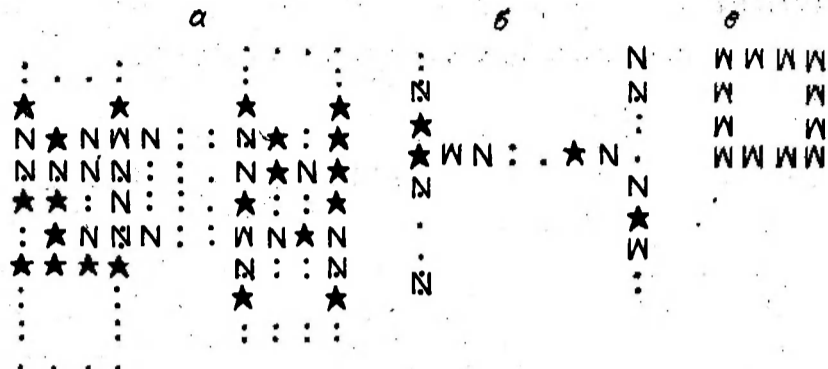


Рис. 1

обе, как это следует из общепринятой интерпретации метода Коши (наискорейшего спуска). В этом случае уравнение

$$\left. \frac{\partial f^{k+1}}{\partial \alpha^k} \right|_{\alpha^k = \alpha_{opt}^k} = 0 \quad (6)$$

для определения  $\alpha_{opt}^k$  оказывается линейным и нахождение  $\alpha_{opt}^k$  существенно упрощается.

В результате решения (6) получим

$$\alpha_{1(2)opt}^k = \frac{\operatorname{Re} \sum_i a(i) [S(i) - \sigma^{(k)}(i)] [\nabla f_{1(2)}^k(i) \otimes \sigma_{2(1)}^k(i)]}{\sum_i a(i) |\nabla f_{1(2)}^k(i) \otimes \sigma_{2(1)}^k(i)|^2} \quad (7)$$

где  $\nabla f_{1(2)}^k(i)$  и  $\sigma_{2(1)}^k(i)$  — функции, комплексно сопряженные  $\nabla f_{1(2)}(i)$  и  $\sigma_{2(1)}(i)$ . Применение (7) позволяет существенно сэкономить время вычислений за счет отказа от определения  $\alpha_{opt}^k$  приближенными итерационными численными методами при одновременном изменении  $\sigma_{1(2)}(i)$ ,  $\sigma_{2(1)}(i)$ .

Использование градиентных ньютоновского и квазиньютоновского методов, требующих вычисления вторых производных [2], явилось бы неоправданным в рассматриваемой ситуации, поскольку для реальных восстанавливаемых сигналов их применение привело бы к существенному увеличению необходимого объема оперативной памяти, не реализуемого в современных ЭВМ средней мощности. Градиентный метод наискорейшего спуска обладает низкой скоростью сходимости в окрестности точки минимума целевой функции  $f$  вследствие малости  $\nabla f_{1(2)}(i)$ . Рассматриваемый подход легко может быть распространен на метод сопряженных градиентов, не требующий вычисления вторых производных и обладающий хорошей сходимостью в окрестности минимума целевой функции. При этом (7) остается справедливым, если принять, что  $\nabla f_{1(2)}(i)$  соответствует сопряженному направлению.

Цифровое моделирование восстановления сигналов методом наискорейшего спуска показывает его эффективность при наличии хотя бы достаточно общих априорных сведений о свойствах сигнала и искажений. Такими априорными сведениями являются, например, условия положительности сигнала и искажающей функции, размеры области по ортогональным осям

$$N_{1(1)}, M_{1(1)}; N_{1(2)}, M_{1(2)}; N_{2(1)}, M_{2(1)}; N_{2(2)}, M_{2(2)},$$

где значения сигнала и искажающей функции могут отличаться от нуля (формула (1)).

Для иллюстрации рассмотрим пример восстановления двумерного сигнала. Искаженный сигнал представлен на рис. 1, а. Он является сверткой сигнала (рис. 1, б) со случайными, независимыми, равномерно распределенными в интервале (0—1) отсчетами и силуэтом в виде буквы *H* и искажающей функции (рис. 1, в). Размер поля искаженного силуэта  $16 \times 16$  дискретов. Размеры областей в дискретах:  $N_{1(1)} = N_{1(2)} = 3$ ;  $M_{1(1)} = M_{1(2)} = 10$ ;  $N_{2(1)} = N_{2(2)} = 7$ ;  $M_{2(1)} = M_{2(2)} = 10$ . Восстановление велось в предположении, что неизвестные сигнал и искажающая функция комплексны. В качестве весовой функции использовалась

$$a(i) = |i_1 - i_{10}| + |i_2 - i_{20}| + \alpha_0, \quad (8)$$

где  $i_{10}$ ,  $i_{20}$  — координаты центра искаженного сигнала;  $\alpha_0 = 8$ .

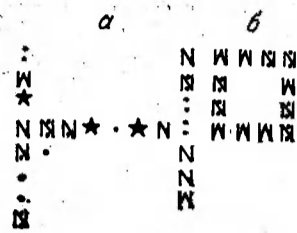


Рис. 2

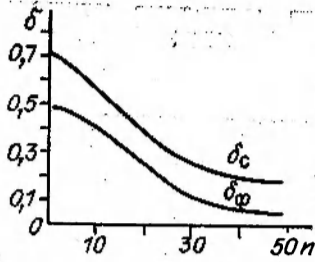


Рис. 3

Функция (8) задает больший вес периферийным точкам искаженного сигнала как более информативным по отношению к силе восстанавливаемого сигнала. Для удовлетворительного восстановления сигнала и искажающей функции (рис. 2, а, б) потребовалось 50 шагов двойных итераций. На рис. 3 показана зависимость от числа итерации  $n$  отклонений нормированных по энергии сигнала и искажающей функции  $\delta_c$  и  $\delta_\phi$  от истинных. При использовании этого метода, как и всех градиентных методов, существенным оказывается наличие хорошего начального приближения. В рассматриваемом случае в качестве начального приближения для восстанавливаемого сигнала использовалась дискретная функция, равная 1 в области, где, по предположению, восстанавливаемый сигнал может быть отличен от нуля. При моделировании было выявлено, что лучшие результаты восстановления имеют место для сигналов, в пространственном спектре которых преобладают низкочастотные составляющие. Кроме того, восстановление комплексных  $S_1(i)$  и  $S_2(i)$  менее эффективно, чем положительных  $S_1(i)$  и  $S_2(i)$ . Результаты моделирования подтвердили, что для восстановления двумерных пространственно-ограниченных сигналов можно использовать градиентные методы при целевой функции, равной взвешенному квадрату отклонения искаженного сигнала от свертки восстанавливаемых сигнала и искажающей функции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бакалов В. П., Русских Н. П. О возможности решения уравнения свертки при известном ядре в случае многомерных пространственно-ограниченных сигналов // Автометрия.— 1985.— № 5.
2. Бакалов В. П., Мартышев Ю. Ю., Русских Н. П. Цифровой алгоритм восстановления пространственно-ограниченного сигнала по свертке с неизвестной искажающей функцией // Автометрия.— 1988.— № 1.
3. Рейлейте Л., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике.— М.: Мир, 1986.— Кн. 1.

Поступило в редакцию 28 июля 1987 г.

УДК 681.3.06

В. Г. СЕЛИВАНОВ  
(Томск)

#### АДАПТАЦИЯ СИСТЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ К УСЛОВИЯМ КОНКРЕТНЫХ СХЕМ РАДИОЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ

В процессе разработки радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) возникает необходимость создавать макет проектируемого аппаратного модуля, чтобы проверить рабочие параметры (задержка, синхронизация и т. д.), произвести отладку и внести в схему возможные изменения. Этап макетирования требует значительных затрат времени и ресурсов. В то же время с помощью системы логического моделирования работы электронных схем можно отследить прохождение сигналов, величины задержек и получить много другой информации, не делая макета [1, 2]. Таким образом может быть устранен целый этап в технологической цепочке разработки производства новых устройств РЭА. Задача создания таких моделирующих систем для верификации разрабатываемых проектов актуальна и привлекает внимание специалистов в этой области [3—6], особенно сложной здесь является временная верификация [7].