

В. К. ЕРОХОВЕЦ, В. Н. КУЗЬМИН, А. Я. КУЛЕШОВ,  
Э. Н. ЛЕОНОВИЧ

(Минск)

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОНТУРОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЦИФРОВОЙ МОДЕЛИ МЕДИЦИНСКОЙ РЕНТГЕНОГРАММЫ

Цифровая модель медицинской рентгенограммы — основа для создания эффективных алгоритмов ее кодирования, проблемного анализа дискретизованной информации и обращения в вычислительной среде. Одним из завершающих этапов построения кусочно-полиномиальной цифровой модели медицинской рентгенограммы, отображающей полутоновое изображение в виде совокупности областей определенной оптической плотности, является аналитическое описание границ этих областей, представляющих в основном замкнутые контуры сложной формы [1].

Для аналитического описания контуров используются различные методы интерполяции. Наиболее простой метод интерполяции плоских контуров линейный. Несмотря на небольшую точность, он довольно часто применяется благодаря своей простоте [2]. Широкое распространение в настоящее время находят методы интерполяции и сглаживания при помощи сплайнов и парабол третьей степени [3—7]. Последние имеют достаточно высокую точность, но дают ненужные флуктуации контура и по этой причине не всегда применимы.

Предлагаемый метод использования кривых второго порядка (коник) дает хорошую интерполяцию на участках с вертикальной касательной, обеспечивает большую плавность и не имеет неконтролируемых флуктуаций. Суть данного метода заключается в следующем. Поскольку аналитическое описание замкнутых контуров сложной формы, имеющих ряд точек перегиба, встречает некоторые затруднения при их представлении в общей системе координат, то на первом этапе аналитического описания таких контуров необходимо выделить однозначные участки (ветви) контура. Математическое описание контуров сложной конфигурации, составленных из трех и более однозначных ветвей и соответствующего числа граничных точек, принципиальных затруднений не вызывает [2]. Под однозначными ветвями контура понимаются такие участки контура, в которых прямая  $x = a$  (где  $a$  определяется значениями аргумента однозначной ветви) пересекает ее только в одной точке. Такие участки определяются граничными точками. Под ними понимаем точки, в которых первые производные  $dx/dy$  равны нулю или достаточно близки к ним. Граничные точки являются начальными и конечными точками соответствующих однозначных ветвей. Для простого замкнутого контура (рис. 1) будут две однозначные ветви: верхняя и нижняя. Алгоритм определения точек  $A$  и  $B$  стыковки однозначных ветвей заключается в проведении параболы второй степени

$$x = ay^2 + by + c \quad (1)$$

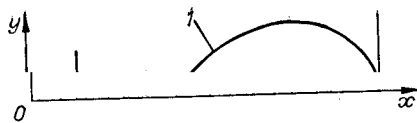


Рис. 1. Иллюстрация определения однозначных ветвей:  
1 — верхняя ветвь; 2 — нижняя ветвь

в системе координат  $xOy$  через 7—10 точек, близких к граничным точкам  $A$  и  $B$ , по методу наименьших квадратов [2]. Координаты граничных точек  $A$  и  $B$  найдем из условия равенства нулю первой производной по  $x$  для параболы второй степени (1):

$$x' = 2ay + b = 0; \quad y = -(b/2a); \quad x = c - (b^2/4a).$$

На втором этапе аналитического описания замкнутого контура сложной формы определяются точки перегиба, которые, как известно [8], локализируются на параболе третьей степени (кубике) в точке, где вторая производная равна нулю:

$$\begin{aligned} y &= a + bx + cx^2 + dx^3; \\ y'' &= 2c + 6dx = 0; \\ x &= -\frac{c}{3d}; \quad y = a + \left( \frac{2c^3 - 9bcd}{27d^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Парабола (2) третьей степени проводится также через 7—10 точек, наиболее близких точке перегиба, по методу наименьших квадратов. Из уравнений кубик определяются также величины первых производных в точках перегиба для последующей интерполяции контура дугами кривых второго порядка (кониками):  $y' = b + (c^2/3d)$ .

После установления числа коник, координат узловых точек и уравнений касательных в этих точках необходимо также определить координаты промежуточных точек, находящихся примерно посередине дуг коник. Для этого через все точки каждой из коник методом наименьших квадратов проводится парабола второй степени и для абсциссы средней точки находят из уравнения (1) ординату промежуточной точки.

Для определения кривой второго порядка необходимо, как известно, пять условий: координаты трех точек (двух узловых и одной промежуточной) и значения первых производных в узловых точках [8]:

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0; \quad (3)$$

$$2yy' + axy' + ay + 2bx + cy' + d = 0; \quad (4)$$

$$2y + ax + ayx' + 2bxx' + c + dx' = 0. \quad (5)$$

Если полученное аналитическое описание выделенного участка не удовлетворяет заданной точности интерполяции, то выделенный участок контура дополнительно разбивают и снова производят проверку точности интерполяции.

Рассмотрим предлагаемую методику на конкретном примере описания контуров при построении цифровой модели медицинской рентгенограммы. На рис. 2 приведен замкнутый контур выделенной области ре-

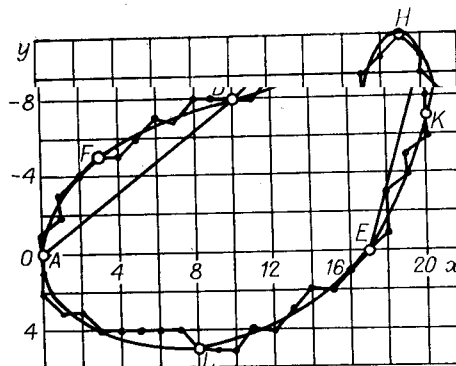


Рис. 2. Интерполяция замкнутого контура выделенной области ПТИ кривыми второго порядка

**Определение координат узловых и промежуточных точек и значений первых производных участков контура**

Координаты	Узловые точки					Промежуточные точки				
	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L
$x$	0	10	17	21	17	3	15	19	20	8
$y$	0	-8	-15	-14	0	-5	-10	-19,5	-7	4,5
$x'$	0									
$y'$		-0,2								

ального полутонового изображения (ПТИ). Сканирование рентгенограммы производилось с помощью автоматического микроденситометра АМД-1 с разрешающей способностью 0,1 мм по двум координатным осям  $Ox$  и  $Oy$ , среднее значение оптической плотности выделенной области принималось равным  $a = 1,05 \pm 0,3D$ .

На первом этапе аналитического описания контура (см. рис. 2) выделим однозначные ветви и определим узловые точки этих ветвей. Замкнутый контур выделенной области ПТИ разбивается на пять участков, определяемых узловыми точками  $A, B, C, D$  и  $E$ , две из которых  $A$  и  $D$  являются граничными.

На втором этапе находятся точки перегиба, а также величины первых производных, необходимые для последующей интерполяции контура кривыми второго порядка, и координаты промежуточных точек. Результаты вычислений приведены в таблице.

Для первой коники нашего примера, ограниченной узловыми точками  $A$  и  $B$  (см. рис. 2), имеем следующие условия (см. таблицу):

$$\begin{aligned} A & (0, 0); x' = 0; \\ F & (3, -5); \\ B & (10, -8); y' = -0,2. \end{aligned}$$

Подставляя эти пять условий в соответствующие уравнения (3)–(5), получим систему линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} e &= 0; \\ c &= 0; \\ -15a + 9b + 3d &= -25; \\ -80a + 100b + 10d &= -64; \\ -10a + 20b + d &= -3,2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

решив которую, найдем значения коэффициентов:  $a = 0,19$ ,  $b = 0,358$ ,  $c = 0$ ,  $d = -8,457$ ,  $e = 0$  первой дуги кривой второго порядка (3), принадлежащей верхней ветви контура, ограниченной узловыми точками  $A$  и  $B$  (см. рис. 2):

$$y^2 + 0,19xy + 0,358x^2 - 8,46x = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) кривой второго порядка следует проверить, подставив значения координат узловых и промежуточных точек  $A, B$  и  $F$ . При  $x = 0$   $y = 0$ ;  $x = 10$   $y = -8$ ;  $x = 3$   $y = -5$ .

Аналогичным образом определяются уравнения кривых второго порядка для других четырех участков:

верхнего участка контура, ограниченного узловыми точками  $B$  и  $C$ :

$$\begin{aligned} (y + 8)^2 + 31,5(y + 8) - 2,5(x - 10)(y + 8) + 0,1(x - 10)^2 + \\ + 6,3(x - 10) = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

участка контура, ограниченного узловыми точками  $C$  и  $D$ :

$$(y + 15)^2 - 0,5(x - 17)(y + 15) + 7,625(x - 17)^2 - 30,25(x - 17) = 0; \quad (9)$$

нижней ветви контура, ограниченной узловыми точками  $A$  и  $E$ :

$$1,78y^2 + xy + x^2 - 17x = 0; \quad (10)$$

Рис. 3. Гистограмма погрешностей интерполяции

нижней ветви, ограниченной узловыми точками  $E$  и  $D$ :

$$y^2 + 3,94y(x - 17) + 9,16(x - 17)^2 + 12,74y + 12,24(x - 17) = 0. \quad (11)$$

Следует отметить, что дуги, отыскиваемые каждым из пяти уравнений (7) — (11), выходят за пределы двух определяющих их точек. Нас же интересуют дуги, ограниченные только этими узловыми точками. Поэтому для аналитической алгоритмизации построения контура следует ввести дополнительные условия, позволяющие выделить только интересующие участки коник. Эти условия будут следующими:

$$y_{AB} \leq -\frac{8}{10}x; \quad y_{BC} \geq -x + 2; \quad y_{CD} \leq \frac{x - 77}{4}; \quad y_{DE} \geq \frac{-7x + 119}{2}; \quad y_{AE} \geq 0.$$

Рассмотрим применение дополнительных условий при решении уравнения первой коники:

$$y^2 + 0,19xy + 0,358x^2 - 8,46x = 0 \text{ при } x = 5 \quad y^2 + 0,95y - 33,3 = 0; \\ y_1 = 5,3 \text{ и } y_2 = -6,25.$$

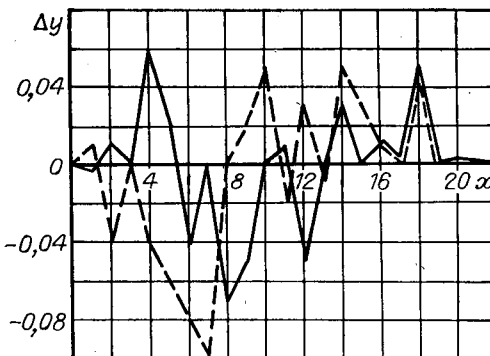
Первое решение уравнения нас не удовлетворяет, так как оно не отвечает неравенству  $y_{AB} \leq -0,8x$ . Таким же образом учитываются остальные условия при решении уравнений (8) — (11).

Эти пять дуг коник образуют замкнутый обвод контура выделенной области ПТИ с условием, что в узловых точках  $A, B, C, D$  и  $E$  соблюдается непрерывность первой производной. При этом обвод строится как бы в два этапа. На первом этапе методом наименьших квадратов отыскиваются граничные и промежуточные точки, значения производных в граничных точках. На втором этапе интерполяционным методом определяются уравнения дуг коник, составляющих сложный обвод. В общем случае для нахождения уравнения коники необходимо решать систему из пяти линейных уравнений для каждой дуги.

Оценка погрешности интерполяции ПТИ производилась вычислением разности  $\Delta y$  между ординатами матрицы бинарного представления ПТИ и его аналитического описания кривыми второго порядка для фиксированных значений  $x$ . Из рис. 3 видно, что для данного случая максимальная абсолютная погрешность не превышает величины  $\Delta y = 0,10$  мм. Это значение является вполне допустимым для задач медицинской практики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ероховец В. К., Кулешов А. Я., Леонович Э. Н., Лутович В. П. Повышение точности и сокращение информационной избыточности автоматической дискретизации полутоновых изображений // Автоматизированные системы обработки изображений (АСОИЗ-86).— М.: Наука, 1986.
2. Кузьмин В. Н. Приближенный метод интерполяции плоских контуров, заданных табличным способом // Вычислительная техника в машиностроении.— Минск: ИТК АН БССР, 1973.
3. Василенко В. А. Сплайн-функции. Теория, алгоритмы, программы/ Отв. ред. Г. И. Марчук.— Новосибирск: Наука, 1983.
4. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения.— М.: Мир, 1972.
5. Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелов В. А. Сплайны в инженерной геометрии.— М.: Машиностроение, 1985.
6. Воскобойников Ю. Е. Построение сглаживающих кубических сплайнов при машинной обработке результатов эксперимента // Автометрия.— 1979.— № 4.



7. Липский В. Г. Метод аппроксимации плоских кривых дугами парабол // Там же.— 1986.— № 1.  
 8. Кузьмин В. Н. Комбинированный метод интерполяции гладких плоских контуров // Вычислительная техника в машиностроении.— Минск: ИТК АН БССР, 1973.

Поступила в редакцию 4 мая 1987 г.

## ГАУССОВЫХ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Задача статистического оценивания спектральных плотностей однородных случайных полей рассматривалась ранее в [1—4] (см. также [5, § 5.1] и [6, гл. V, § 8]). В настоящей статье, как и в [4], будем предполагать, что исследуемое случайное поле  $\xi(\mathbf{k}) = \xi(k_1, k_2)$  задано на двумерной целочисленной решетке  $\mathbf{Z}^2$  и, кроме того, является гауссовым. Как и в работах [3—5], оценку спектральной плотности  $f(\lambda_1, \lambda_2)$  случайного поля  $\xi(\mathbf{k})$  будем искать в виде сглаженной (по аргументу  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ) периодограммы. Основные отличия настоящей статьи от предшествующих работ состоят в следующем:

1. Оцениваемая спектральная плотность  $f(\lambda_1, \lambda_2)$  предполагается достаточно гладкой функцией, т. е. имеющей частные производные всех интересующих нас порядков. Это предположение позволяет нам использовать при построении оценок спектральной плотности  $f(\lambda)$  знакопеременные весовые функции, обеспечивающие во многих случаях существенное уменьшение ошибки оценивания. Возможность учета априорных предположений относительно гладкости функции  $f(\lambda)$  при построении ее статистических оценок была отмечена ранее в [2].

2. Как и в работе [4], строим и исследуем оценки спектральной плотности  $f(\lambda)$  по неограниченно расширяющейся прямоугольной реализации случайного поля  $\xi(\mathbf{k})$ , однако в тех случаях, когда рост одной из сторон реализации существенно отстает от роста другой ее стороны, вводим домножение исходной реализации на треугольное окно данных, сглаживающее края всех сечений реализации, параллельных ее короткой стороне. Сглаживание краев реализации позволяет нам уменьшить смещение периодограммы (ее определение см. ниже) и вместе с ним средний квадрат ошибки оценивания спектральной плотности  $f(\lambda)$ .

Итак, пусть  $\xi(\mathbf{k})$ ,  $k \in \mathbf{Z}^2$ , — гауссово однородное случайное поле со средним значением (математическим ожиданием)  $\langle \xi(\mathbf{k}) \rangle = 0$  и спектральной плотностью  $f(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\lambda_i \in \Pi = (-\pi, \pi]$ ,  $i = 1, 2$ . Будем предполагать, что функция  $f(\lambda_1, \lambda_2)$ , будучи продолженной периодическим образом (по обоим аргументам) на всю плоскость (совокупность пар вещественных чисел)  $\mathbf{R}^2$ , имеет все интересующие нас частные производные. Пусть нам даны значения случайного поля  $\xi(k_1, k_2)$  в точках  $(k_1, k_2)$ , где  $k_i = 1, \bar{N}_i$ , причем  $N_i = N_i(n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $i = 1, 2$ , и

$$N_1 \leq N_2, N_2 \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Оценку значения спектральной плотности  $f(\lambda)$  в некоторой точке  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ , где  $\omega_i \in \Pi$  и  $0 \leq \omega_2 \leq \pi$ , будем искать в виде

$$f_n(\omega) = h^{-2} \iint_{\mathbf{R}^2} w\left(\frac{\lambda_1 - \omega_1}{h}\right) w\left(\frac{\lambda_2 - \omega_2}{h}\right) I_n(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (2)$$