

С. А. ДОМБРОВСКИЙ
(Новосибирск)

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КОРРЕКТИРУЮЩИХ КОДОВ В ГОЛОГРАФИЧЕСКИХ ЗУ

В работах [1, 2], где приведены оценки достоверности считывания данных в канале голографической памяти с постоянными и флуктуирующими параметрами, было показано, что вероятность ошибки в канале ГЗУ с постоянными параметрами при типичных характеристиках голограммы (контраст $K \approx 40$; сигнал/шум «единиц» $(C/Ш)_1 \approx 5$; «нулей» $(C/Ш)_0 \approx 2$) и оптимальном пороге различения «единиц» и «нулей» достаточно низка и составляет $\sim 10^{-10}$. Флуктуации характеристик голограмм из-за случайных смещений пучков, формирующих восстановленное изображение, повышают эту вероятность до уровня 10^{-6} — 10^{-7} . Такой уровень ошибок на несколько порядков выше, чем обусловленный требованиями к современным ЗУ (10^{-10} — 10^{-12}).

Известно [3], что один из путей повышения достоверности — применение корректирующих кодов. В [4] предложено использовать такие коды в голографической памяти и дается оценка их эффективности на основе известного выражения [5]:

$$N_{\alpha} \approx \frac{1}{n} C_n^{\alpha+1} \bar{N}_{\text{ош}}^{\alpha+1}, \quad (1)$$

где N_{α} — вероятность ошибки считывания с учетом корректирующих свойств кода; $\bar{N}_{\text{ош}}$ — вероятность ошибочного считывания символа кодированной последовательности; n — длина кодовой комбинации; α — кратность исправляемой или обнаруживаемой ошибки; $C_n^{\alpha+1}$ — число сочетаний. Если $\alpha = 1$, то (1) преобразуется таким образом:

$$N_{\alpha} \approx \frac{1}{n} C_n^2 \bar{N}_{\text{ош}}^2 \quad (2)$$

— и описывает класс корректирующих кодов, исправляющих одиночную ошибку в кодовом слове.

Выражения (1), (2) справедливы только в случае независимости ошибок. Однако в реальном канале голографической памяти, наряду с аддитивными помехами (шум рассеяния, перекрестные шумы), имеются мультипликативные шумы, связанные, например, со случайными смещениями пучков. Из теории передачи дискретных сообщений известно [5], что мультипликативные помехи приводят к корреляционной связи ошибок. Поэтому следует ожидать, что в голографической памяти ошибки коррелированы и выражения (1) и (2) для оценки повышения достоверности несправедливы.

Цель данной работы — оценить эффективность применения корректирующих кодов в канале голографической памяти с флуктуирующими параметрами с учетом корреляции ошибок.

Выражение (2) для эквивалентной вероятности ошибки в случае коррелированных ошибок можно записать в виде [5]

$$N_{\alpha} \approx \frac{1}{n} C_n^2 \bar{N}_{\text{ош}} N(\text{ош}/\text{ош}), \quad (3)$$

$$\bar{N}_{\text{ош}} \approx \frac{\beta e^{\frac{4\sigma_i^2 z_0^2 - 1}{8\sigma_i^4 z_0^2}}}{4\sigma_i^2 z_0^2} \left\{ \Phi\left(\frac{1}{2\sigma_i^2 z_0}\right) + \Phi\left(z_0 - \frac{1}{2\sigma_i^2 z_0}\right) \right\} \quad (4)$$

— безусловная средняя вероятность ошибки считывания в флуктуирующем канале в предположении, что мощности изображений «единиц»

и «нулей» подчинены распределению Рэлея — Райса, а причиной флуктуации контраста $\sigma_1 = 1/(C/\Pi)_1$; $\sigma_0 = 1/(C/\Pi)_0$ и \bar{P}_1 , \bar{P}_0 — коэффициенты вариаций мощностей и средние мощности изображений «единицы» и «нуля»; z_0 — обобщенное отношение сигнал/шум в отсутствие aberrаций пучков; σ_t^2 — дисперсия случайной величины смещения восстанавливающего пучка относительно голограммы ($t = \xi = \Delta\xi/\omega_s$) или информационного пучка относительно фотоматрицы ($t = x = \Delta x/\omega_s$), $2\omega_s$ и $2\omega_s$ — размеры восстанавливающего и информационного пучков соответственно; $N(\text{ош}/\text{ош})$ — условная вероятность ошибочного считывания второго сигнала в кодовом слове при неправильном считывании первого символа. Если принять, что за время считывания отдельной голограммы величина смещения пучков не меняется, то условную вероятность $N(\text{ош}/\text{ош})$ можно записать [5] в виде

$$N(\text{ош}/\text{ош}) = \int_0^{z_0} N(\text{ош}/z) W_t(z/\text{ош}) dz, \quad (5)$$

где

$$N(\text{ош}/z) \simeq \frac{\beta e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi} z} \quad (6)$$

— условная вероятность ошибки при некотором значении z [1]; $W_t(z/\text{ош})$ — условная плотность вероятности z , если один из символов в кодовом слове считан неправильно. Для нахождения $W_t(z/\text{ош})$ воспользуемся формулой Байеса [6]:

$$W_t(z/\text{ош}) = \frac{W_t(z) N(\text{ош}/z)}{\bar{N}_{\text{ош}}}, \quad (7)$$

здесь

$$W(z) = \frac{\exp\{- (z_0 - z)/(2\sigma_t^2 z_0)\}}{2\sigma_t^2 z_0} \quad (8)$$

— безусловная плотность распределения вероятности величины z при случайных смещениях восстанавливающего и информационных пучков [2].

Подставив значения $W_t(z)$, $N(\text{ош}/z)$, $\bar{N}_{\text{ош}}$ из выражений (8), (6), (4) в (7), получим

$$W_t(z/\text{ош}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z_0 (1 - \sigma_t^2) e^{-\frac{1}{8\sigma_t^4 z_0^2} (-z^2/2 + z/(2\sigma_t^2 z_0))}}{z \left\{ \Phi\left(\frac{1}{2\sigma_t^2 z_0}\right) + \Phi\left(z_0 - \frac{1}{2\sigma_t^2 z_0}\right) \right\}}. \quad (9)$$

С учетом (6) и (9) для $N(\text{ош}/\text{ош})$ имеем

$$N(\text{ош}/\text{ош}) \simeq \frac{\beta e^{-\frac{1}{16\sigma_t^4 z_0^2} z_0} \int_0^{z_0} e^{-\left(z - \frac{1}{4\sigma_t^2 z_0}\right)^2} dz}{\pi z_0 \left\{ \Phi\left(\frac{1}{2\sigma_t^2 z_0}\right) + \Phi\left(z_0 - \frac{1}{2\sigma_t^2 z_0}\right) \right\}}.$$

В последнем выражении медленно меняющиеся функции перед экспоненциальными множителями заменены их средними значениями ($\bar{z} = z_0(1 - \sigma^2)$ и $\beta = \beta(1 - \sigma^2)$) и вынесены из-под знака интеграла.

После вычисления интеграла и некоторых преобразований получим

$$N(\text{ош/ош}) \simeq \frac{\beta \left\{ \Phi \left(\frac{\sqrt{2}}{4\sigma_z^2 z_0} \right) + \Phi \left(\left(z_0 - \frac{1}{4\sigma_z^2 z_0} \right) \sqrt{2} \right) \right\} e^{-\frac{1}{16\sigma_z^4 z_0^2}}}{2\sqrt{\pi} z_0 \left\{ \Phi \left(\frac{1}{2\sigma_z^2 z_0} \right) + \Phi \left(z_0 - \frac{1}{2\sigma_z^2 z_0} \right) \right\}}. \quad (10)$$

Принимая во внимание (10), (4), (3), эквивалентная вероятность ошибочного считывания с учетом корректирующих свойств кода запишется как

$$N_{\text{э}} \simeq \frac{C_n^2 \beta^2 e^{-\frac{4\sqrt{2}\sigma_z z_0 - 1}{8\sigma_z^2}} \left\{ \Phi \left(\frac{1}{2\sigma_z} \right) + \Phi \left(\left(z_0 - \frac{1}{2\sqrt{2}\sigma_z} \right) \sqrt{2} \right) \right\}}{nz_0^2 \sigma_z^4 \sqrt{2\pi}}. \quad (11)$$

При выводе (11) использовалось соотношение для среднеквадратической величины $\sigma_z = \sqrt{2} \sigma_z^2 z_0$ [2].

Если $0 \leq \sigma_z \leq 1/(2\sqrt{2}z_0)$, то эквивалентная вероятность ошибки меняется в пределах

$$\frac{C_n^2 \beta^2 e^{-z_0^2}}{2\pi n z_0^2} \leq N_{\text{э}} \leq \frac{C_n^2 \beta^2 e^{-z_0^2}}{n z_0^2 \sqrt{\pi}}. \quad (12)$$

Нижний предел в (12) соответствует вероятности ошибки считывания в канале ГЗУ с постоянными параметрами. Верхний предел в $\sqrt{\pi} z_0$ раз превышает вероятность ошибки в канале с постоянными параметрами и характеризует канал голографического ЗУ с малыми флуктуациями обобщенного отношения сигнал/шум z . При $\sigma_z > 1/(2\sqrt{2}z_0)$ (канал с большим уровнем флуктуаций z) вероятность ошибки считывания определяется выражением

$$N_{\text{э}} \simeq \frac{C_n^2 \beta^2 e^{-\frac{4\sqrt{2}\sigma_z z_0 - 1}{8\sigma_z^2}}}{n \sigma_z z_0^2 \sqrt{2\pi}}.$$

В качестве иллюстрации оценим эквивалентную вероятность ошибочного считывания для устройства голографической памяти [7], в котором применен корректирующий код Хэмминга (39, 32), исправляющий одиночную ошибку в 39-разрядном слове [8].

На рис. 1 показаны расчетные зависимости достоверности считывания (достоверность $S = -\lg N$) $\bar{S}_{\text{ош}}$, $S(\text{ош/ош})$ и $S_{\text{э}}$ от среднеквадратического отклонения σ_t , характеризующего амплитуду случайных aberrаций пучков. Из рисунка видно, что при малых случайных смещениях пучков ($\sigma_t < 0,1$) эквивалентная вероятность ошибки, как и следует из соотношения (12), пропорциональна квадрату исходной вероятности. По мере увеличения σ_t достоверности $\bar{S}_{\text{ош}}$, $S(\text{ош/ош})$, $S_{\text{э}}$ резко уменьшаются, причем более быстро падает достоверность считывания $S(\text{ош/ош})$. При среднеквадратическом отклонении $\sigma_t > 0,2$ (максимальные смещения пучков в плоскости голограммы и фотоматрицы больше 30% от их размеров) эквивалентная вероятность ошибки $N_{\text{э}}$ мало отличается от исходной $N_{\text{ош}}$.

На рис. 2 приведены экспериментальные и теоретические данные по эффективности применения кода Хэмминга (39, 32), исправляющего одиночную ошибку. По горизонтальной оси на рисунке отложена исходная средняя достоверность считывания $\bar{S}_{\text{ош}}$ символа кодированной последовательности, по вертикальной — достоверность $S_{\text{э}}$ с учетом коррек-

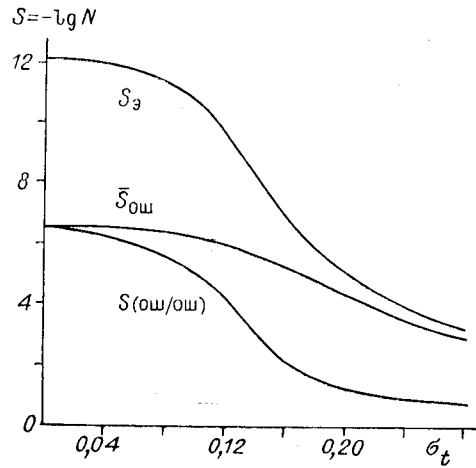


Рис. 1

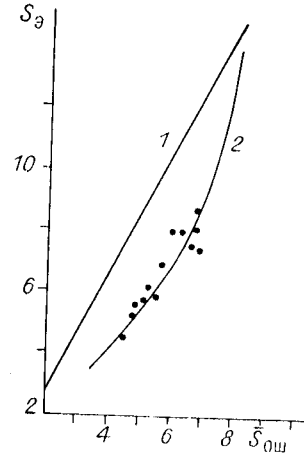


Рис. 2

тирующих свойств кода. Результаты эксперимента нанесены точками, сплошные линии 1, 2 соответствуют достоверности считывания без учета и с учетом корреляционных свойств ошибок и получены из выражений (2) и (3) соответственно. Эксперименты по считыванию проводились на массиве (320 голограмм) реальных данных (текстовый файл) в устройстве [7]. Дефектные голограммы в процессе чтения исключались. Исходная средняя достоверность считывания при характеристиках отдельной типичной голограммы (контраст $K=27$; сигнал/шум «единиц» $(C/Ш)_1=5$ и «нулей» $(C/Ш)_0=2$) и максимальных смещений пучка в плоскости голограммы 20% ($\sigma_t=0,15$) составляла $\bar{S}_{0ш}=8$. Изменение достоверности $\bar{S}_{0ш}$ производилось путем внесения дополнительных аберраций в плоскости голограммы или фотоматрицы. Из графика (см. рис. 2) видно, что зависимость (3) (кривая 2), учитывающая корреляционную связь ошибок, хорошо описывает экспериментальные результаты. В то же время зависимость (2) (кривая 1) превышает экспериментальные данные на несколько порядков. Эти результаты доказывают корреляцию ошибок в флуктуирующем канале голографической памяти и свидетельствуют о применимости полученных выражений для оценки эффективности корректирующих кодов в ГЗУ.

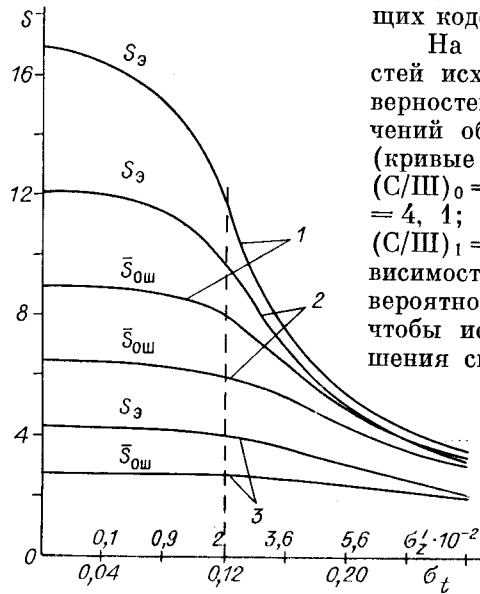


Рис. 3

На рис. 3 приведены графики зависимостей исходной $\bar{S}_{0ш}$ и эквивалентной S_3 достоверностей считывания от σ_t для различных значений обобщенного отношения сигнал/шум z_0 (кривые 1 для $z_0=6$ ($K=30$; $(C/Ш)_1=5$; $(C/Ш)_0=2, 5$), 2 — $z_0=5$ ($K=25$; $(C/Ш)_1=4, 1$; $(C/Ш)_0=2, 5$), 3 — $z_0=3$ ($K=10$; $(C/Ш)_1=3, 3$; $(C/Ш)_0=2, 0$)). Графики зависимостей показывают, что для получения вероятности ошибки $10^{-10}-10^{-12}$ требуется, чтобы исходное значение обобщенного отношения сигнал/шум было больше 5, а коэффициент вариации ($\sigma'_z = \sigma_z/z_0$) этой величины из-за случайных смещений пучков не превышал 2% (максимальные смещения пучков не должны превышать 15% от их размеров). Например, пусть диаметр голограммы составляет 100 мкм, а ее информационная емкость — 10^3 бит. Это соответствует поверхностной

поверхностной

плотности упаковки данных 10^5 бит/мм². Пусть также размер восстанавливающего пучка $2\omega_a = 80$ мкм, а размер информационного пучка $2\omega_b = 200$ мкм. Тогда, чтобы обеспечить уровень ошибок 10^{-10} при обобщенном отношении $(C/Ш) \geq 5$, максимальные смещения не должны превышать 12 мкм для восстанавливающего и 30 мкм для информационного пучков соответственно.

Отметим, что выражение (14) для эквивалентной вероятности ошибки N_0 получено в предположении, что режим фотосчитывания выбирается оптимальным для каждого значения обобщенного отношения сигнал/шум (z), т. е. порог $I_{\text{пор}}$ различения «единиц» и «нулей» для каждой текущей голограммы устанавливается в соответствии с выражением [4]

$$I_{\text{пор}} = \bar{I}_T \left\{ 1 - \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}_H} \left(\frac{\sigma'_0 + \sigma'_1}{\sigma'_0 + \sqrt{K} \sigma'_1} \right)^2 \right\}^2,$$

где \bar{I}_T , \bar{E}_H — средние темновой ток и энергия насыщения фотоматрицы; \bar{E}_1 — средняя энергия «единицы». В случае отклонения режима фотосчитывания от оптимального эффективность кода Хэмминга будет значительно ниже приведенных оценок и требования к случайным смещениям пучков возрастут.

Таким образом, на основе методов теории передачи дискретных сообщений получены выражения для оценки эффективности применения корректирующих кодов в канале голографического ЗУ с флуктуирующими параметрами. Путем сравнения теоретических и экспериментальных данных доказана корреляция ошибок в голографической памяти. Показано, что такие коды обеспечивают уровень ошибок 10^{-10} – 10^{-12} , необходимый в современных ЗУ, при условии, если обобщенное отношение сигнал/шум больше 5 (контраст $K \geq 25$, $(C/Ш)_1 \geq 4$, $(C/Ш)_0 \geq 2$), коэффициент вариации этой величины $\sigma'_z < 2\%$ ($\sigma_t < 0,1$), а режим фотосчитывания (порог различения, время накопления) устанавливается оптимально для каждого значения z (каждой текущей голограммы).

Автор выражает благодарность Е. Ф. Пену, В. А. Домбровскому и А. Н. Потанову за полезные обсуждения, а также Т. Н. Мантушу, Н. Н. Вьюхиной, А. А. Блоку, А. П. Литвинцевой и И. Б. Татарниковой за помощь в постановке экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Домбровский В. А., Домбровский С. А., Пен Е. Ф. Достоверность считывания информации в ГЗУ с постоянными параметрами при безызбыточном кодировании двоичных данных // Автометрия.— 1988.— № 6.
2. Домбровский С. А. Достоверность считывания в канале голографического ЗУ с флуктуирующими параметрами // Там же.— 1989.— № 1.
3. Питерсон У. Коды, исправляющие ошибки.— М.: Мир, 1964.
4. Винокуров В. С., Аксельрод А. А. Применение корректирующих кодов для повышения надежности записи и считывания информации в голографических запоминающих устройствах // Вопр. радиозлектроники. Сер. общетехн.— 1981.— Вып. 5.
5. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений.— М.: Сов. радио, 1963.
6. Вентцель Е. Ф. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1969.
7. Ванюшев Б. В., Волков А. В., Гибин И. С. Устройство хранения и считывания цифровых данных в голографической системе архивной памяти // Автометрия.— 1984.— № 3.
8. Вьюхина Н. Н., Литвинцева А. П., Мантуш Т. Н. и др. Программные средства для исследований, отладки и тестирования ГЗУ // Там же.

Поступила в редакцию 29 января 1988 г.