

В. Г. ЛИПСКИЙ

(Минск)

### ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ИНТЕГРИРУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ СЖАТИЯ ДАННЫХ

Для сокращения информационной избыточности дискретных представлений измерительных сигналов  $y = f(x)$  ( $x$  — время) широко используются аппроксимационные алгоритмы сжатия данных [1, 2]. Сжатие данных при этом достигается путем кусочной аппроксимации исходных сигналов с заданной погрешностью отрезками известных функций. Задание этих отрезков требует меньше данных, чем, например, представление соответствующих участков сигнала в виде массивов равноотстоящих выборок, получаемых при аналого-цифровом преобразовании.

Перспективными в плане практического использования являются адаптивные алгоритмы сжатия данных на основе анализа текущих показателей сигнала [3], прежде всего из-за простоты реализации, которая обеспечивается косвенным контролем погрешности приближения [4]. Об этом свидетельствует анализ известных решений [5—9].

В [10] изложена методика синтеза интегрирующих алгоритмов сжатия данных. Это алгоритмы указанного выше класса, отличающиеся тем, что основу вычислительного процесса в них составляют операции интегрирования сигнала (поэтому алгоритмы обладают повышенной помехоустойчивостью). Там же в [10] дана рекомендация, сформулированная исходя из экспериментальных результатов, по реализации критерия равномерного приближения. Исследования показали, что ее выполнение не всегда приводит к требуемой погрешности аппроксимации: иногда возможны значения, хотя и незначительно, однако превышающие заданную величину. Необходимо осуществление теоретической оценки предельно возможного в этом случае значения погрешности аппроксимации. Это позволит более обоснованно проводить синтез алгоритмов, а также правильно применять на практике уже синтезированные алгоритмы.

В статье предлагается общий подход к осуществлению оценки погрешности равномерного приближения интегрирующих алгоритмов сжатия данных. На примере анализа известного алгоритма сжатия данных иллюстрируется его применение.

Пусть  $G(x, f(x))$  — функционал погрешности аппроксимируется его применение. Пусть по методике [10] исходя из аналитического выражения аппроксимирующей функции  $y = u(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ .

Сущность аппроксимации с использованием ФПА состоит в следующем. При каждом значении  $x (x \in (0, x_k])$  вычисляется значение  $g(x)$  ФПА и проверяется выполнение условия

$$|g(x)| \leq z(x, \varepsilon), \quad (1)$$

где  $z(x, \varepsilon)$  — модуль приращения ФПА при смещении по оси ординат из точки  $(x, f(x))$  в точку  $(x, f(x) + 0,5\varepsilon)$  или  $(x, f(x) - 0,5\varepsilon)$ ;  $x$  — переменная, монотонно возрастающая от нуля. Если при некотором значении  $x$  неравенство (1) нарушается, то отрезок сигнала  $y = f(x)$ , ограниченный точками  $(0, f(0))$  ( $f(0) = 0$ ) и  $(x_k, f(x_k))$  ( $x_k$  — значение  $x$ , предшествовавшее критическому), заменяется отрезком функции  $y = u(x, c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{nk})$ , ограниченным теми же точками ( $c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{nk}$  — зафиксированные при  $x_k$  значения параметров  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , которые вычисляются параллельно с вычислением значений ФПА).

Требуется оценить сверху модуль погрешности аппроксимации  $\delta(x) = f(x) - u(x, c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{nk})$ , где  $x \in (0, x_k)$ .

Предлагается следующий подход к решению задачи. Решаем уравнение

$$G(x, f(x)) = g(x) \quad (2)$$

относительно  $f(x)$ . Ищем частное решение этого уравнения, проходящее через точки  $(0, 0)$  и  $(x_k, f(x_k))$ , при условии, что в точке  $(x_k, f(x_k))$   $c_1 = c_{1k}, c_2 = c_{2k}, \dots, c_n = c_{nk}$ . Найдя это решение, представим его в виде

$$f(x) = f_{ч0}(x) + \varphi(x, g(x)). \quad (3)$$

Это возможно, поскольку общее решение (2) представляется как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения

$$G(x, f(x)) = 0 \quad (4)$$

и некоторого частного решения  $\varphi(x, g(x))$ , а частное решение (2), получаемое из этого общего решения, есть сумма частного решения  $f_{ч0}(x)$  однородного уравнения (4) и частного решения  $\varphi(x, g(x))$ . Очевидно, что частным решением  $f_{ч0}(x)$  является аппроксимирующая функция  $y = u(x, c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{nk})$ , поскольку согласно [10] (4) — это интегральное уравнение многопараметрического семейства  $y = u(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ .

Преобразуя (3) к виду

$$f(x) - f_{\text{ч0}}(x) = \varphi(x, g(x)),$$

получим в левой части интересующую разность  $\delta(x)$ , т. е.

$$\delta(x) = \varphi(x, g(x)). \quad (5)$$

После этого определяем абсолютное значение левой и правой части (5). Будем иметь

$$|\delta(x)| = |\varphi(x, g(x))|. \quad (6)$$

Оценка модуля погрешности аппроксимации  $|\delta(x)|$  производится на основании выражения (6) путем оценки его правой части исходя из неравенства (1) и известных классических неравенств.

Оценим погрешность аппроксимации алгоритма сжатия данных [7], осуществляющего кусочную аппроксимацию дугами парабол  $y = c_1 x^n$ .

Соответствующий уравнению  $y = c_1 x^n$  ФПА имеет вид

$$G(x, f(x)) = \int_0^x (f'(x)x - nf(x)) dx.$$

Уравнение, аналогичное уравнению (2), запишем в виде

$$\int_0^x (f'(x)x - nf(x)) dx = g(x). \quad (7)$$

Неравенство, аналогичное неравенству (1), имеет вид

$$|g(x)| \leq 0,5\epsilon x, \quad (8)$$

где  $x \in (0, x_h]$ .

Решаем интегральное уравнение (7). Дифференцируя его левую и правую части и осуществляя преобразования, получим дифференциальное уравнение

$$f'(x) - \frac{n}{x} f(x) = \frac{g'(x)}{x}.$$

Его частное решение (а также и решение (7)), проходящее через точку  $(x_h, f(x_h))$ , имеет вид

$$f(x) = \frac{f(x_h)}{x_h^n} x^n + x^n \int_{x_h}^x \frac{g'(x)}{x^{n+1}} dx.$$

Здесь  $f_{\text{ч0}}(x) = c_{1h} x^n = (f(x_h)/x_h^n) x^n$ , а  $\varphi(x, g(x)) = x^n \int_{x_h}^x \frac{g'(x)}{x^{n+1}} dx$ , поэтому

$$\delta(x) = f(x) - \frac{f(x_h)}{x_h^n} x^n = x^n \int_{x_h}^x \frac{g'(x)}{x^{n+1}} dx. \quad (9)$$

После интегрирования по частям интеграла в (9) будем иметь

$$\delta(x) = \frac{g(x)}{x} - \frac{g(x_h)}{x_h^{n+1}} x^n + x^n \int_{x_h}^x \frac{n+1}{x^{n+2}} g(x) dx. \quad (10)$$

Определяя абсолютное значение обеих частей (10) и используя известное неравенство для абсолютных величин, найдем

$$|\delta(x)| \leq \frac{|g(x)|}{x} + \frac{|g(x_h)|}{x_h^{n+1}} x^n + (n+1) x^n \left| \int_{x_h}^x \frac{dx}{x^{n+2}} \right|. \quad (11)$$

С учетом неравенства (8) неравенство (11) запишется в виде

$$|\delta(x)| \leq 0,5\epsilon + 0,5\epsilon \frac{x^n}{x_h^n} + (n+1) x^n \left( 0,5\epsilon \frac{1}{nx^n} - 0,5\epsilon \frac{1}{nx_h^n} \right), \quad (12)$$

где выражение в скобках в правой части — оценка интеграла в (11). Неравенство

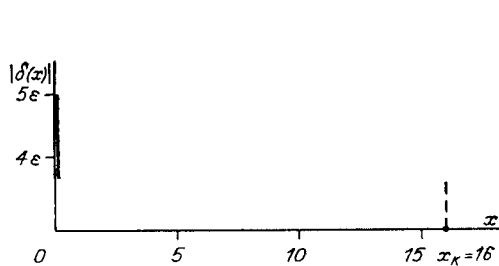


Рис. 1

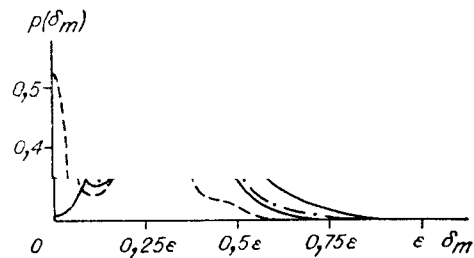


Рис. 2

(12), после приведения подобных, преобразуется к виду

$$|\delta(x)| \leq \varepsilon + \frac{0,5\varepsilon}{n} \left(1 - \frac{x^n}{x_k^n}\right). \quad (13)$$

Это и есть искомая оценка погрешности приближения на интервале аппроксимации  $(0, x_k)$ .

На рис. 1 представлена графическая интерпретация полученного результата. Кривой *a* ограничены допустимые значения  $|\delta(x)|$  при  $n = 1/8$ , кривой *b* — при  $n = 1/2$ , кривой *c* — при  $n = 1$ , кривой *d* — при  $n = 3$ . Видно, что погрешность аппроксимации при  $x$ , близких к нулю, будет всегда больше, чем при  $x$ , близких к  $x_k$ .

Более грубая оценка  $\delta(x)$  получается из (13) с учетом того, что  $x \leq x_k$ :  $|\delta(x)| \leq \varepsilon + 0,5\varepsilon/n$ . Из этого выражения следует, например, что при кусочно-линейной аппроксимации ( $n = 1$ ) возможно максимальное значение  $|\delta(x)| = 1,5\varepsilon$ , т. е. погрешность равномерного приближения будет не более  $1,5\varepsilon$ . Аналогично оценивается погрешность приближения и при других значениях  $n$ .

На основе предложенного подхода была произведена оценка погрешности равномерного приближения для алгоритма сжатия данных на основе кусочной аппроксимации полиномами  $y = c_1x + c_2x^2$  [10]. Получено, что на интервале аппроксимации  $(0, x_k)$  погрешность  $|\delta(x)|$  оценивается неравенством

$$|\delta(x)| \leq 6,5\varepsilon - 2\varepsilon \frac{x}{x_k} - 1,5\varepsilon \frac{x^2}{x_k^2}.$$

Погрешность равномерного приближения (максимально возможное значение  $|\delta(x)|$  на интервале аппроксимации) для указанного алгоритма при ограничении значений ФПА неравенством  $|g(x)| \leq 0,5\varepsilon x^2$  будет не более  $6,5\varepsilon$ .

В заключение необходимо отметить следующую особенность интегрирующих алгоритмов сжатия данных. В процессе обработки погрешность приближения на интервале аппроксимации не обязательно достигает предельного значения, получаемого путем предложенной оценки. Реально получается, что вероятность достижения предельного значения погрешности для широкого класса сигналов весьма мала. Например, для упомянутых выше алгоритмов при обработке данных аналого-цифрового преобразования случайного гауссова сигнала экспериментально были найдены функции  $p(\delta_m)$  плотности распределения вероятностей модуля максимальной погрешности  $\delta_m$  на интервале аппроксимации, показанные на рис. 2: кривая 1 соответствует алгоритму [10], кривая 2 — алгоритму [7] при  $n = 2$ , кривая 3 — алгоритму [7] при  $n = 1$ , кривая 4 — алгоритму [7] при  $n = 1/2$ . Видно, что вероятность  $P$  получения значения  $\delta_m > \varepsilon$  для этих алгоритмов уже близка к нулю,

поскольку  $P(\delta_m > \varepsilon) = 1 - \int_0^\varepsilon p(\delta_m) d\delta_m$  и значение интеграла в правой части этого вы-

ражения близко к 1. Указанную особенность, полное представление о которой дают функции плотности распределения вероятностей, аналогичные приведенным, следует учитывать при реализации достоверных показателей приближения [11].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдеев Б. Я., Антолюк Е. М., Долинов С. Н. и др. Адаптивные телеизмерительные системы. — Л.: Энергоиздат, 1981.
2. Орищенко В. И., Санников В. Г., Свириденко В. А. Сжатие данных в системах сбора и передачи информации. — М.: Радио и связь, 1985.
3. Мановцев А. П. Основы теории радиотелеметрии. — М.: Энергия, 1973.

4. Витих В. А., Якимаха В. П. Применение структурных моделей сигналов для получения оценок погрешностей при адаптивной дискретизации // Автометрия.— 1972.— № 3.
5. Федоренко М. П., Тормышев Ю. И. Методы линеаризации сложных форм траекторий // Электрон. моделирование.— 1980.— № 2.
6. А. с. 1201861 СССР. Устройство для передачи данных со сжатием/Н. Н. Хрисанов.— Оpubл. 30.12.85. Бюл. № 48.
7. Липский В. Г. Метод аппроксимации плоских кривых дугами парабол // Автометрия.— 1986.— № 1.
8. А. с. 1251130 СССР. Устройство для аппроксимации функций/В. Г. Липский.— Оpubл. 15.08.86. Бюл. № 30.
9. А. с. 970421 СССР. Устройство для сжатия информации/О. А. Башкиров.— Оpubл. 30.10.82. Бюл. № 40.
10. Липский В. Г. Синтез аппроксимационных алгоритмов сжатия данных, использующих приближенный контроль погрешности аппроксимации // Вопр. радиоэлектроники. Сер. ОВР.— 1985.— Вып. 6.
11. Ольховский Ю. Б., Новоселов О. Н., Мановцев А. П. Сжатие данных при телеизмерениях.— М.: Сов. радио, 1971.

*Поступило в редакцию 13 августа 1987 г.*

УДК 629.7.018

А. В. ЛОГИНОВ, М. Я. МЕШ, И. М. ОВЧИННИКОВ, В. В. ПРОКЛОВ,  
А. Л. ШЛИФЕР, Г. А. ЮДИН  
(Новосибирск — Ташкент)

### ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА НА ОСНОВЕ АКТИВНЫХ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ КОЛЬЦЕВЫХ СТРУКТУР

В процессе многократного прохождения оптического импульса по волоконному световоду (ВС) происходит накопление изменений его параметров, которое используется для измерения характеристик ВС: дисперсии [1] и длины [2]. В то же время большинство известных световодных датчиков физических величин основано на модуляции параметров световодного тракта. Использование этих датчиков в составе активной волоконно-оптической кольцевой структуры (АВОКС) позволяет повысить чувствительность средства измерения. Однако вопросы измерения внешних воздействий с помощью АВОКС остаются малоизученными.

Приведенные в данной работе результаты обобщают возможности использования АВОКС в качестве базового элемента измерительных устройств.

В отличие от режима хранения информации в АВОКС [3], когда регенерируются амплитуда, форма и частота следования импульсов, в целях измерений один из перечисленных параметров сигнала не должен восстанавливаться. Тогда приложенное к световоду измеряемое воздействие приводит к изменению не восстанавливаемого в регенераторе параметра импульсного сигнала.

Использование в качестве параметра, чувствительного к измеряемому воздействию, амплитуды или формы импульса при аналоговой регенерации сигнала приводит к существенному ограничению точности и диапазона измерений, так как в этом случае реализация широкополосных аналоговых измерительных устройств является весьма сложной задачей. Напротив, выбор для этой цели частоты следования импульсов позволяет избежать указанных недостатков, поскольку в данном случае применимы цифровые методы регенерации и регистрации сигнала.

При запуске одиночного импульса в АВОКС число  $N$  его регенераций за время  $t$  составит

$$N = t/(ln/c + \tau_{эл}), \quad (1)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме;  $n$  — показатель уменьшения групповой скорости излучения в световоде;  $\tau_{эл}$  — задержка импульса в электронном тракте АВОКС;  $l$  — длина световода. Изменение числа импульсов, прошедших через регенератор в одном цикле измерения при  $\tau_{эл} = \text{const}$ , составляет

$$dN = - \frac{ct}{(ln + c\tau_{эл})^2} \left[ l_r \frac{\partial n_r}{\partial x} + n_r \frac{\partial l_r}{\partial x} \right] dx, \quad (2)$$

здесь  $n_r$  и  $l_r$  — соответственно показатель преломления и длина чувствительного участка оптического тракта, которые необходимо модулировать при многократном режиме измерений. Заметим, что в большинстве известных и используемых волоконно-оптических датчиков [4] внешнее воздействие преобразуется в изменение параметров оптического сигнала (фазу, разность фаз) при деформациях световода и (или) за счет фотоупругого эффекта, т. е. при изменении  $l$  и  $n$ . Это позволяет