

соответствует более сильная система необходимых признаков выполнения сформированной на их основе априорной гипотезы.

Важно подчеркнуть, что принципы Калмана и Тихонова (точнее, выдвигаемые ими требования) взаимно противоречивы, и, следовательно, конкретизация априорной гипотезы того или иного типа всегда связана с компромиссом. В частности, сужение множества B или расширение системы опорных функционалов приводит при прочих равных условиях к менее надежному выполнению принципа Калмана, но более полному выполнению принципа Тихонова для соответствующей гипотезы МОФ.

Существует тесная связь между метрологическим обеспечением задач идентификации и проблемой их регуляризации [6, 7]. Пользуясь терминологией теории регуляризации, можно сказать, что априорные гипотезы содержат в себе так называемую дополнительную качественную и количественную информацию, необходимую для регуляризации. Напритического применения (моделирования) из ОРЗИ $C^v(\bar{x})$ обычно необходимо выделить одну модель. Это выделение естественно подчинить некоторому требованию, например, требованию минимальной сложности или максимальной прогнозирующей способности отбираемой модели. Уточнение и решение подобных задач может рассматриваться в качестве второго этапа идентификации. Ясно, что определенность и роль этого этапа тем выше, чем менее полно для полученного на первом этапе ОРЗИ выполнен принцип Тихонова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калман Р. Е. Идентификация систем с шумами // УМН.— 1985.— 40, вып. 4.
2. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи.— М.: Мир, 1973.
3. Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л. Идентификация систем управления.— М.: Наука, 1974.
4. Современные методы идентификации систем/Под ред. П. Эйкхоффа.— М.: Мир, 1983.
5. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ.— М.: Мир, 1980.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Думова А. А. и др. О многоцелевой проблемно-ориентированной системе обработки результатов экспериментов.— М., 1976.— (Препр./АН СССР. ИИМ; 142).
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 28 апреля 1987 г.

УДК 621.391

О. О. ДРОБАХИН
(Днепропетровск)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ В ВИДЕ СУММЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА ПРОНИ

Модель сигнала в виде суммы экспоненциальных функций с комплексными показателями $p_k = p'_k + jp''_k$, $j = \sqrt{-1}$,

$$f(t) = \sum_{k=1}^L c_k \exp(jp_k t) \quad (1)$$

является одной из наиболее общих. В такой форме представимы временные отклики радиолокационных объектов [1], коэффициенты отражения слоистых структур в частотной и временной областях [2], целые функции [3], которыми описываются изображения, сформированные апертурами конечных размеров [4], сигналы, принимаемые антенными решетками [5]. Параметры p_k выражают характерные особенности объектов. Это позволяет построить эффективные алгоритмы распознавания [1, 2]. Значения p_k могут быть использованы для измерения геометрических размеров объектов, например, толщин слоев в слоистых структурах [6].

Одним из методов определения p_k является метод Прони (МП) [7]. В отсутствие шума МП позволяет точно найти значения p_k , однако наличие шума приводит к резкому возрастанию погрешности их оценивания. Это обуславливает актуальность исследования разрешающей способности (РС), точности оценивания p_k, c_k при использовании различных алгоритмов численной реализации МП.

Пусть $f(t)$ задана (измерена) в эквидистантных точках, т. е. имеет зависимость $f(n\Delta t) = f(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, Δt — шаг дискретизации, N — число отсчетов измеренной зависимости. Метод Прони [7, 8] заключается в решении на первом этапе системы линейных уравнений (СЛУ)

$$F = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} f(0) & f(1) & \dots f(M-1) \\ f(1) & f(2) & \dots f(M) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(N-M-1) & f(N-M) & \dots f(N-2) \\ \hline \bar{f}(N-1) & \bar{f}(N-2) & \dots \bar{f}(N-M) \\ \bar{f}(N-2) & \bar{f}(N-3) & \dots \bar{f}(N-M-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{f}(M) & \bar{f}(M-1) & \dots \bar{f}(1) \end{array} \right) \begin{array}{l} \mathbf{a}^T = \{a_0, a_1, \dots, a_{M-1}\}; \\ \\ \\ \mathbf{f}^T = \{f(M), f(M+1), \dots, \\ \dots, f(N-1)\} \bar{f}(N-M-1), \bar{f}(N-M-2), \dots, \bar{f}(0)\} \end{array} \end{array} \quad (2)$$

и поиске корней $q_k = q'_k + jq''_k$, $k = 1, \dots, M$, полинома степени M с вектором коэффициентов $\mathbf{A} = \{-1, a_{M-1}, \dots, a_0\}$ на втором этапе. Искомые параметры p_k равны $\ln q_k / \Delta t$. При известных p_k поиск c_k сводится к решению СЛУ, составленной согласно (1).

По сути (2) являются уравнениями линейного предсказания (ЛП), которые применяются, в частности, для повышения РС [9]. Верхняя часть СЛУ (2) может рассматриваться как ЛП вперед, а нижняя — как ЛП назад, при этом в общем случае используются комплексно сопряженные величины $(\bar{f}(k))$. Применение полной СЛУ (2) позволяет уменьшить необходимое число отсчетов: действительно, в этом случае требуется N' , равное $3/4 N''$, где N'' — число отсчетов при использовании только верхней части матрицы F для обеспечения возможности решения при заданном M . Однако СЛУ (2) справедлива для случая $p_k'' = 0$, при $p_k'' \neq 0$ может быть использована лишь половина уравнений.

Ограничимся исследованием случая $p_k'' \neq 0$, тогда при $M \geq 2L$ возможно построение решения СЛУ (2) по методу наименьших квадратов (МНК)

$$\mathbf{a} = R^{-1}\mathbf{r}, \quad R = F^T F, \quad \mathbf{r} = F^T \mathbf{f}. \quad (3)$$

В (3) под F и \mathbf{f} понимаются верхние части F и \mathbf{f} из (2), R^{-1} — матрица, обратная R . Матрица R имеет собственные числа λ_k и векторы \mathbf{u}_k .

При наличии шума R переходит в матрицу $R' = R + \varepsilon G$, где G — симметрическая матрица; ε — малая величина, причем в случае белого шума с дисперсией σ^2 для достаточно большого N матрица R' приобретает вид [10] $R + (N-M)\sigma^2 I$, где I — единичная матрица. Матрица R' имеет собственные числа $\mu_k = \lambda_k + \varkappa_k$ и векторы \mathbf{v}_k , для белого шума — $\mu_k = \lambda_k + (N-M)\sigma^2$.

Значения выборочных средних оценок $\langle p_k \rangle$ и дисперсий D_k оценок

Параметры	Модель	$\Delta t=0,25$				$\Delta t=0,31$		
		ПИ1	ПИ2	СВ	ФВ	ПИ1	СВ	ФВ
$\langle p_1' \rangle$	2,0	2,180	1,929	1,950	2,145	2,003	2,021	1,968
D_1'	—	0,016	0,031	0,031	0,016	0,016	0,012	0,017
$\langle p_1'' \rangle$	0,8	0,828	0,832	0,832	0,838	0,812	0,805	0,816
D_1''	—	0,012	0,012	0,012	0,004	0,005	0,003	0,005
$\langle p_2' \rangle$	6,0	6,531	5,935	5,977	6,619	5,939	5,981	5,673
D_2'	—	0,114	0,091	0,091	0,185	0,032	0,021	0,047
$\langle p_2'' \rangle$	0,7	0,968	0,705	0,718	1,150	0,749	0,713	0,797
D_2''	—	0,144	0,041	0,039	0,186	0,043	0,035	0,047
$\langle p_3' \rangle$	8,0	7,954	7,973	7,973	8,004	8,005	8,017	8,079
D_3'	—	0,041	0,020	0,019	0,060	0,014	0,009	0,016
$\langle p_3'' \rangle$	0,75	0,882	0,749	0,757	1,019	0,737	0,742	0,755
D_3''	—	0,064	0,022	0,023	0,178	0,004	0,004	0,004

Для решения СЛУ (3) в рамках МП находит применение ряд алгоритмов: псевдоинверсии (ПИ) [8], выбора в качестве вектора \mathbf{A} собственного вектора \mathbf{v}_{L+1} (СВ) [10], рекуррентный алгоритм МНК [5]. Порядок модели L , как правило, может быть определен по резкому изменению собственных значений матрицы R' [10, 11], собственное число μ_{L+1} позволяет определить κ_k или $(N-L-1)\sigma^2$ для белого шума. Для нахождения a_k используются [12] алгоритмы последовательного оценивания на основе фильтра Калмана и стохастической аппроксимации. Модифицированные варианты [11] этих алгоритмов могут быть применены для поиска p_k . Для численной реализации МП был построен алгоритм, реализующий концепцию винеровской фильтрации (ФВ) [11]. В отличие от метода псевдоинверсии (ПИ1), согласно которому собственные числа матрицы R^{-1} выбираются равными μ_k^{-1} , если $\mu_k > \delta$, и 0, если $\mu_k < \delta$ (δ — малая величина, равная для белого шума $(N-L-1)\sigma^2$), в данном случае собственные числа матрицы F^{-1} принимаются равными $\mu_k^{1/2}/(\mu_k + \kappa_k/s_k)$, где $s_k = (\mathbf{v}_k^T \mathbf{a})^2$, или в предположении, что μ_{L+1} — оценка $\kappa_k = \kappa$, $\mu_k^{1/2}/(\mu_k + \mu_{L+1}/s_k)$. При построении R^{-1} , согласно методу псевдоинверсии (ПИ2), вместо μ_k могут быть использованы значения $\mu_k \div \mu_{L+1}$, для случая $\kappa_k = \kappa = \mu_{L+1}$ это соответствует замене μ_k на λ_k .

Исследование эффективности работы алгоритмов ПИ1, ПИ2, СВ, ФВ было проведено путем численного эксперимента на модели с параметрами: $L = 6$; $p_{1,4} = \{\pm 2, j0,8\}$; $p_{2,5} = \{\pm 6, j0,7\}$; $p_{3,6} = \{\pm 8, j0,75\}$; $c_{1,4} = 2$; $c_{2,5} = 1,3$; $c_{3,6} = 2,5$, отношение сигнал/шум порядка 21 дБ. Некоторые результаты после усреднения по ансамблю реализаций шума с одинаковыми параметрами приведены в таблице. Ни один из алгоритмов не обладает существенными преимуществами перед другими по обеспечению более высокой точности определения p_k . При одном и том же уровне шума, но разных его реализациях в единичном эксперименте более высокая точность может быть достигнута любым из алгоритмов. Результаты, полученные методом ПИ2, практически совпадают с результатами метода СВ. При постоянстве a_k результаты оценивания с помощью метода фильтра Калмана совпадают с результатом винеровской фильтрации [13]. Алгоритмы последовательного оценивания не обеспечивают более высокой точности оценивания p_k по сравнению с алгоритмами ПИ, СВ, ФВ, что подтверждается результатами численного модели-

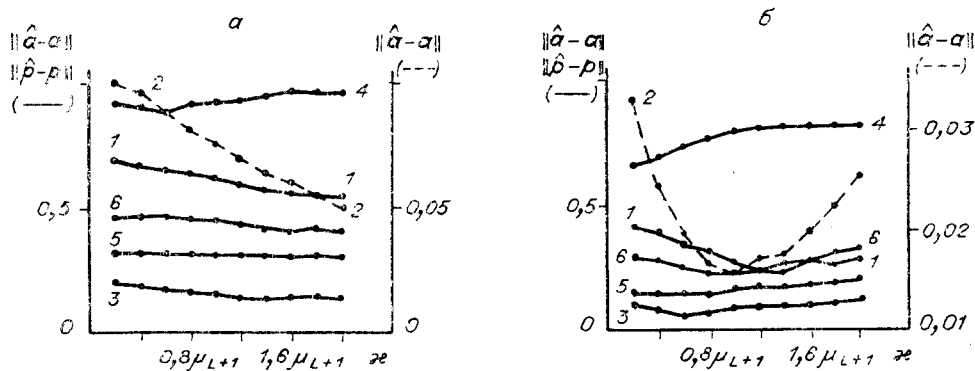


Рис. 1. Нормы векторов $\|\hat{a} - a\|$ и $\|\hat{p} - p\|$ при использовании алгоритма ФВ в зависимости от выбора значения μ для двух реализаций шума с одинаковыми параметрами:

$a - 1$ — норма $\|\hat{a} - a\|_1$, $2 - \|\hat{a} - a\|_2$, $3 - \|\hat{a} - a\|_\infty$, $4 - \|\hat{p} - p\|_1$, $5 - \|\hat{p} - p\|_2$, $6 - \|\hat{p} - p\|_\infty$;
 b — нумерация аналогична

рования. На этом же основании может быть сделан вывод о том, что алгоритм [5] также не имеет преимуществ.

В настоящее время наиболее последовательно разработаны алгоритмы, минимизирующие среднеквадратическую погрешность, однако, как показано в [11] для простейшего примера при $L = 2$, минимизация (в указанном смысле) погрешности определения a_k не является достаточной для обеспечения минимума погрешности определения p_k .

На рис. 1 представлены значения норм [14] для разностей векторов \hat{a} и a , \hat{p} и p (векторы a и p имеют компонентами модельные значения a_k и p_k , \hat{a} и \hat{p} — результаты определения a_k и p_k методом ФВ) в зависимости от значения μ , выраженного в долях μ_{L+1} . Для различных реализаций шума с одинаковыми параметрами имеют место отличия в характере изменения погрешностей: в первом случае (рис. 1, а), несмотря на уменьшение всех норм для $\hat{a} - a$ (причем для $\|\hat{a} - a\|_2$ уменьшение двукратное), нормы $\|\hat{p} - p\|_2$, $\|\hat{p} - p\|_\infty$ практически неизменны, а для $\|\hat{p} - p\|_1$ отмечается некоторый рост; во втором случае (рис. 1, б), несмотря на наличие ярко выраженного минимума для $\|\hat{a} - a\|_2$, норма $\|\hat{p} - p\|_1$ монотонно растет, а $\|\hat{p} - p\|_2$ практически постоянна. Результаты метода ФВ более точны, чем метода ПИ, по крайней мере для некоторых областей изменения μ , но наивысшую точность обеспечивает метод СВ.

Действенным средством повышения точности определения является оптимальный выбор Δt . Значение $\Delta t = \pi/2p'_1$ для модели при $L = 2$ обеспечивает наименьшее значение числа обусловленности матрицы R [15] и наименьшую погрешность определения p_k при заданной погрешности для a_k [11]. Данные таблицы иллюстрируют важность выбора Δt , при $\Delta t = 0,25$ $\|\hat{p} - p\|_1$, $\|\hat{p} - p\|_2$, $\|\hat{p} - p\|_\infty$ составили после усреднения \hat{p} по ансамблю реализаций шума $0,517$, $0,075$, $0,147$, а при $\Delta t = 0,31 - 0,301$, $0,03$, $0,109$ соответственно. Значение $\Delta t = 0,31 \approx \pi/2p'_+$, где p'_+ — среднее от ожидаемых p'_k , близко к оптимальному.

Численные эксперименты для модели с $L = 2$ показали, что наблюдается практически линейная зависимость дисперсий оценок p_k от дисперсии налагаемого шума, однако для разных значений N , p_k коэффициенты пропорциональности отличаются. Смещение с ростом σ также возрастает, но зависимость носит более сложный характер. Абсолютные значения дисперсий для оценок p_k и p_k сравнимы по значению. Погрешности определения $p_{1,4} = \pm 2$ по моделям с $L = 2$ и $L = 6$ практически совпали. При $p_k = 0$ обеспечиваются более точные оценки по сравнению со случаем $p_k \neq 0$ не только при постоянном уровне шума,

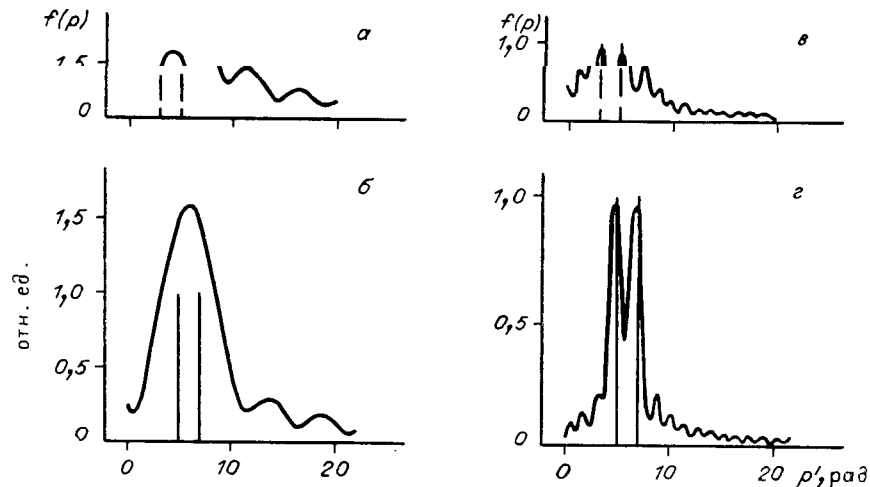


Рис. 2. Спектры суммы двух косинусов, полученные при помощи ДПФ и МП, в зависимости от значения p'_+ ($\Delta t = 0,05$, $p'_2 = p'_1 + 2$):
 а — $N = 25$, $p'_+ = 4$; б — $N = 25$, $p'_+ = 6$; в — $N = 100$, $p'_+ = 4$; г — $N = 100$, $p'_+ = 6$;
 сплошные линии — оценки получены МП; штриховые — местоположения p'_k для случая, когда оценки МП получены не были

когда изменяется отношение сигнал/шум, но и при постоянном отношении сигнал/шум.

Значение p_k , определенное по функции, представляющей среднее от совокупности реализаций, несколько точнее $\langle p_k \rangle$, полученного усреднением набора p_k , вычисленных по каждой из этих реализаций. В отсутствие шума МП позволяет определить p'_k с точностью на одну цифру больше по сравнению с количеством значащих цифр в исходных данных.

При исследовании МП под разрешением удобно понимать случай, когда для модели с $L = 4$ p_k могут быть найдены с погрешностью не более наперед заданной, например 1%. В отличие от спектрального анализа при помощи дискретного преобразования Фурье (ДПФ) [7], для которого РС однозначно определяется величиной $T = N\Delta t$, а с ростом L ухудшается, для МП значимым является параметр $p'_+\Delta t$. Для постоянного L , начиная с некоторого достаточно большого N (или T), РС метода Прони не изменяется, в этом случае применение МП целесообразно. Указанные особенности иллюстрируются данными рис. 2.

Численные эксперименты по исследованию точности определения c_k из СЛУ (1) при p_k , оцененных МП, были проведены на модели $2 \exp(-\alpha t) \cos 2t$, α изменялось от 0 до 0,7. Дисперсия оценок $|c_k|$ практически линейно зависит от σ^2 аддитивно добавляемого шума. Наличие $p''_k \neq 0$ приводит к росту дисперсии и смещения оценок по сравнению со случаем $p''_k = 0$, однако изменение σ от 0,05 до 0,1 оказывает малое влияние. Исходя из определенных значений смещения средних $\langle |c_k| \rangle$, оптимальным является число отсчетов ~ 20 . Усреднение по совокупности реализаций позволяет эффективно устранить шум. Результат, полученный по усредненной реализации при $p''_k \neq 0$, много точнее среднего оценок c_k , найденных по той же совокупности реализаций.

Исследования точности оценок $|c_k|$ от выбора Δt показали, что при равных $T = N\Delta t$ смещения средних для $|c_k|$ практически совпадают, од-

нако для меньших Δt дисперсии несколько меньше. Указанное соотношение справедливо для N , лежащих в пределах от 10 до 20, и $p_k'' = 0$, с ростом N до 50 результат изменяется, при $p_k'' \neq 0$ для малых Δt и $N = 50$ оценки особенно сильно ухудшаются. Наиболее точные результаты были получены при $\Delta t = \pi/2p_+'$, где $l = 0,8-0,65$, значение $\Delta t = \pi/2p_+'$ в данном случае не является оптимальным. При $\Delta t = \pi/2p_+'$, где $l < 0,3$, наблюдается резкое снижение точности, обусловленное, очевидно, значительными погрешностями определения p_k при малых Δt .

Погрешность определения величин c_1 для $p_1' = 0$ при изменении Δt в широких пределах практически не меняется. Для модели с $p_1' = 0$, $p_2' \neq 0$ наиболее точные оценки достигаются при $\Delta t \approx \pi/2p_2'$.

С целью уменьшения размерности обрабатываемых матриц возможно формирование K сегментов длиной M с последующим поэлементным суммированием этих сегментов; таким образом, вместо обработки зависимости из N значений обрабатывается зависимость из M значений ($N = MK$). При $p_k'' = 0$ такая процедура не искажает значений $|c_k|$, при $p_k'' \neq 0$ могут быть определены только p_k . В частности, при $N = 150$ и $M = 10$, $K = 15$ смещение p_1' составило $5 \cdot 10^{-5}$ и $1,8 \cdot 10^{-4}$, дисперсии $-8 \cdot 10^{-6}$ и $1 \cdot 10^{-5}$, для $|c_1|$ те же параметры $-3,6 \cdot 10^{-3}$, $1,1 \cdot 10^{-3}$, $1 \cdot 10^{-4}$, $1,4 \cdot 10^{-5}$ соответственно.

Метод Прони в отсутствие шума позволяет выделять p_k' для компоненты меньшей амплитуды ($L = 4$) при отношении амплитуд менее 30 дБ (в отдельных случаях до 50 дБ в зависимости от фазовых соотношений и интервала дискретизации). Численное моделирование было проведено на языке Фортран на ЭВМ ЕС 1050. Результаты исследования РС зависят от числа значащих цифр, которыми оперирует машина, поэтому при использовании других ЭВМ могут быть получены отличающиеся результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чжань Л. Ч., Моффэт Д. Л., Питерс Л. Определение характеристик подповерхностных объектов // ТИИЭР.— 1979.— 67, № 7.
2. Дробахин О. О. Автоматизация процесса распознавания сигналов дефектоскопа на основе модели линейного предсказания // Дефектоскопия.— 1985.— № 10.
3. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент.— М.: Наука, 1983.
4. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике.— М.: Физматгиз, 1962.
5. Джавадов Г. Г., Сычев М. И. Оценка угловых координат источников излучения методом спектрального анализа // Радиотехника.— 1987.— № 2.
6. Борулько В. Ф., Дробахин О. О. Метод синтезирования временных импульсов как средство измерения параметров неоднородностей в радиотрактах // Радиотехнические измерения в диапазонах высоких частот (ВЧ) и сверхвысоких частот (СВЧ): Всесоюз. конф. Тез. докл.— Новосибирск: СНИИМ, 1984.
7. Кей С. М., Марпл С. Л. Современные методы спектрального анализа // ТИИЭР.— 1981.— 69, № 11.
8. Тафтс Д. У., Кумаресан Р. Оценивание частот суммы нескольких синусоид. Модификация метода линейного предсказания, сравнимая по эффективности с методом максимального правдоподобия // ТИИЭР.— 1982.— 70, № 9.
9. Зеленков А. В. Об увеличении разрешения импульсов в аддитивных сигналах с помощью обратной фильтрации и линейного предсказания // Автметрия.— 1985.— № 2.
10. Van Blaricum M. L., Mitra R. Problems and solutions associated with Prony's method for processing transient data // IEEE Trans. on Antennas and Propagation.— 1978.— AP-26, N 1.
11. Дробахин О. О., Короткая В. Г. Применение метода Прони для толщинометрии слоистых диэлектриков // Дефектоскопия.— 1987.— № 5.
12. Гибсон Дж. Д. Адаптивное предсказание в системах дифференциального кодирования речи // ТИИЭР.— 1980.— 68, № 4.

13. Сейдж Э., Меле Дж. Теория оценивания и ее приложения в связи и в управлении. — М.: Связь, 1976.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974.
15. Kulr R. W. An optimum sampling procedure for the use with Prony's method // IEEE Trans. on Electromagnet. Compatibility. — 1981. — EMC-23, N 2.

Поступила в редакцию 7 января 1987 г.

УДК 681.3

П. И. БАЛАБАНОВ, В. Д. ФИЛЕВ

(София, Болгария)

ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

В ряде случаев возникает необходимость измерения амплитуды $A_u(f_x)$ сложного переменного сигнала $u(t)$, соответствующей конкретной частоте f_x . Для решения таких задач, являющихся по существу, частотно-избирательным методом измерения напряжения, можно использовать метод дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

В математическом смысле задача сводится к определению оценки значения функции $|F_u(f)|$ для $f = f_x$, где

$$F_u(f) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (1)$$

При использовании ДПФ математической моделью процедуры частотно-избирательного измерения напряжения может служить выражение

$$A_u(f_k)_д = \left| [N \cdot F_g(0)]^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} u(i) g(i) W^{ik} \right|. \quad (2)$$

где $\{g(i)\}_{i=0, \dots, N-1}$ — временной ряд, изображающий использованную функцию окна в дискретном виде; $|F_g(0)| = |F_g(f)|_{f=0} = \mathcal{F}[g(t)]$; \mathcal{F} — оператор преобразования Фурье; N — число членов рядов $\{u(i)\}$ и $\{g(i)\}$, определяющее размерность ДПФ.

Если задано такое k , при котором $f_k = kf_0$, и удовлетворено условие $|f_k - f_x| = \min$, то в этом случае $A_u(f_k)_д$ является оценкой неизвестной амплитуды $A_u(f_x)$.

Можно доказать, что с использованием требуемых программных и технических средств относительная погрешность измерения γ определяется главным образом погрешностью $\gamma_{T_д}$ вследствие ограничений $u(t)$ во времени при помощи функции окна, т. е. справедливо

$$\gamma = \gamma_{T_д} \leq \left| A_u(f_x) F_g(0) \right|^{-1} \left[\left| \int_0^{f_x - \varepsilon} F_u(f) F_g(f_k - f) df + \int_{f_x + \varepsilon}^{f_T} F_u(f) F_g(f_k - f) df \right| \right] + \left| F_g(f_k - f_x) F_g(0)^{-1} - 1 \right|, \quad (3)$$

где ε — бесконечно малая величина.

Из (3) следует, что погрешность γ может быть представлена двумя составляющими: $\gamma_{T_д}$, обусловленной наличием других частотных компонент $A_u(f_i)$ с частотами f_i в спектре напряжения $u(t)$, и $\gamma_{T_д}''$ — по-