

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.676

Д. В. ДОВНАР, К. Г. ПРЕДКО
(Могилев)

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОБЪЕКТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЙ, НЕ ИМЕЮЩИХ ОДНОЗНАЧНОГО РЕШЕНИЯ

Введение. Восстановление объекта по его линейно сформированному изображению в присутствии аддитивного шума обычно связано с решением интегрального уравнения 1-го рода

$$\int_{-S}^S z(\xi) K(x, \xi) d\xi = f(x) + \gamma(x) = F(x), \quad |x| < R, \quad (4)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{M_1})$, $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{M_1}$, $S = (S_1, S_2, \dots, S_{M_1})$,
 $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$, $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_M$, $R = (R_1, R_2, \dots, R_M)$.

При этом правая часть является приближением точного значения $f(x)$ (незашумленного изображения исходного объекта $z(\xi)$; $\gamma(x)$ — погрешность ее задания (шум); $K(x, \xi)$ — квадратично-интегрируемое на $|x| < R$, $|\xi| < S$ ядро уравнения (1); $\|K(x, \xi)\|_{R,S}^2 = \int_{-S}^S \int_{-R}^R K^2(x, \xi) d\xi dx < \infty$.

Неравенства типа $|x| < R$ обозначают $|x_i| < R_i$ для каждого i .

Будем рассматривать решения уравнения (1) в классе $L_2(-S, S)$ — квадратично-интегрируемых на множестве $|\xi| < S$ функций, естественном для оптических объектов. При этом задача определения решения $z(\xi) \in L_2(-S, S)$ по исходным данным $F(x) \in L_2(-R, R)$ обычно оказывается некорректно поставленной, т. е. нарушается одно или несколько требований корректности в L_2 , сформулированных здесь в следующей форме:

1. Для всякого $F(x) \in L_2(-R, R)$ существует решение $z(\xi) \in L_2(-S, S)$.
2. Решение определяется однозначно в $L_2(-S, S)$ по любому $F(x)$.
3. Задача устойчива в L_2 .

В случае $\gamma(x) = 0$ восстановления объекта по его сформированному согласно (1) изображению 1-е требование выполняется всегда, так как заведомо известно, что для всякого изображения $f(x)$ в отсутствие шума существует, по крайней мере, одно решение из $L_2(-S, S)$, а именно объект $z(\xi)$, изображением которого $f(x)$ и является.

Сколько угодно малые ошибки $\gamma(x)$ в регистрации и измерении $f(x)$ могут приводить к сколь угодно большим отклонениям в точном решении уравнения (1) в квадратической метрике, т. е. 3-е требование корректности нарушается практически всегда. Однако в этом случае можно применять методы теории регуляризации [1], с помощью которых строятся приближенные (регуляризованные) решения, обладающие следующи-

— приближенное решение непрерывно стремится к исходному объекту в квадратической метрике при стремлении мощности шума к нулю.

В данной работе нас будет интересовать случай нарушения 2-го требования корректности, т. е. когда одна и та же «точная» функция $f(x)$ может быть изображением множества существенно различных в квадратической метрике объектов. Очевидно, что в этом случае удовлетворить регуляризирующему свойству 2 невозможно без дополнительных условий. Как ни парадоксально, но именно этот случай чаще всего встречается в практике численного восстановления объектов по их изображениям, причем нарушение 2-го требования корректности может быть обусловлено как дискретизацией изображения для введения его в ЭВМ, так и непосредственными свойствами ядра $K(x, \xi)$ (например, в рентгеновской томографии при любом конечном числе углов просвечивания [2]). На практике решаются задачи в естественном для данных физических объектов классе функций из L_2 , для которого не выполняется 2-е требование корректности. Применяемые методы приводят к решениям, для которых регуляризирующее свойство 2 выполняется в том же подклассе, что и 2-е требование корректности. Исследование и поиск дополнительных условий, при которых 2-е требование корректности выполняется, считаются необходимыми для оценки степени соответствия приближенного решения исходному объекту из L_2 [2]. В данной работе предлагается использовать понятие приближенного решения, вообще говоря, не обладающего регуляризирующим свойством 2, но с удобной на практике оценкой степени соответствия исходному объекту. Эта оценка возможна без поиска дополнительных условий, при которых выполнено 2-е требование корректности.

Будем называть приближенное решение стабилизированным в среднеквадратической метрике, если оно обладает следующими свойствами.

А. Приближенное решение существует в классе L_2 и устойчиво в квадратической метрике к малым изменениям изображения $F(x)$.

Б. Уклонение приближенного решения от исходной функции в среднеквадратической метрике — монотонно неубывающая функция мощности шума.

1. Алгоритм построения стабилизированного решения и оценка его уклонения от исходного объекта. В случае нарушения 2-го требования корректности задача восстановления объекта является математически неопределенной в L_2 . В такой ситуации представляется полезным использовать методы восстановления приближенных решений с оценкой уклонения от исходных объектов в среднеквадратической метрике, т. е. вычислять среднее значение по множеству наблюдений квадратических ошибок восстановлений отдельных реализаций случайного объекта, обладающего некоторыми, заранее заданными статистическими свойствами.

Пусть каждая реализация случайного объекта может быть представлена в виде разложения по произвольной ортонормированной на $|\xi| < S$ системе базисных функций $\psi_l(\xi)$, $l = 1, 2, \dots$:

$$z(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(\xi), \quad |\xi| < S. \quad (2)$$

Предположим, что случайные объект и шум обладают следующими статистическими свойствами:

- а) $\langle c_k c_l \rangle = \langle c_k^2 \rangle \delta_{ik}$ (некоррелированный объект);
- б) $R_{z\gamma}(\xi, x) = 0$ (объект и шум не коррелированы);
- в) $R_{\gamma\gamma}(x, y) = \gamma^2 \delta(x - y) = \gamma^2 \delta(x_1 - y_1) \dots \delta(x_m - y_m)$ (шум белый, γ^2 — мощность белого шума).

Угловые скобки означают среднее по множеству наблюдений; $R_{z\gamma}(\xi, x)$ — взаимная корреляционная функция по множеству наблюде-

ний; $R_{\gamma\gamma}(x, y)$ — автокорреляционная функция шума по множеству наблюдений. Тогда приближенное восстановление отдельных реализаций объекта по формуле, приведенной в [3],

при $\beta_m^0 = \gamma^2 / \langle c_m^2 \rangle$, $m = 1, 2, \dots$ Здесь

$$\varphi_k(x) = \int_{-S}^S \psi_k(\xi) K(x, \xi) d\xi, \quad (\varphi_k, \varphi_l) = \int_{-R}^R \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx,$$

$$c_l(\beta) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{lm}(\beta) \left[\beta_m + \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) (\varphi_k, \varphi_m) \right]^{-1} \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) (\varphi_k, F); \quad (6)$$

$$Q(\xi, x, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\beta_m + \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) (\varphi_k, \varphi_m) \right]^{-1} \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) \varphi_k(x) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) \psi_k(\xi), \quad (7)$$

а $d_{ln}(\beta)$ рассчитываются по рекуррентной формуле $d_{kk}(\beta) = 1$, $k = 1, 2, \dots$:

$$d_{ln}(\beta) = - \sum_{m=l}^{n-1} d_{lm}(\beta) \left[\beta_m + \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) (\varphi_k, \varphi_m) \right]^{-1} \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) (\varphi_k, \varphi_n), \quad (8)$$

$l = 1, 2, \dots, n-1$; $n = 2, 3, \dots$. При $l > n$ для удобства работы с рядами полагаем $d_{ln}(\beta) = 0$. При этом среднеквадратические ошибки — $\langle \Delta c_l^2(\beta, \gamma^2) \rangle = \langle [c_l(\beta) - c_l]^2 \rangle$ — определения коэффициентов c_l реализаций случайного объекта по формуле (6) тоже имеют минимум при $\beta = \beta^0$, причем вычисляются в этой точке по формуле

$$\langle \Delta c_l^2(\beta^0, \gamma^2) \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^2 \langle c_m^2 \rangle d_{lm}^2(\beta^0) \left[\gamma^2 + \langle c_m^2 \rangle \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta^0) (\varphi_k, \varphi_m) \right]^{-1}, \quad (9)$$

а среднеквадратическая ошибка

$$\rho^2(\beta^0, \gamma^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^2 \langle c_m^2 \rangle \sum_{l=1}^m d_{lm}^2(\beta^0) \left[\gamma^2 + \langle c_m^2 \rangle \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta^0) (\varphi_k, \varphi_m) \right]^{-1}. \quad (10)$$

Видно, что ошибки (9) и (10) зависят лишь от изображений $\varphi_k(x)$ выбранных базисных функций $\psi_k(\xi)$ и статистических условий «а — в», не зависят от конкретных реализаций изображения $F(x)$ и могут быть посчитаны заранее по формулам (9), (10) до восстановления реализаций объекта.

При этом вероятности P квадратических ошибок восстановления одной реализации объекта превысить любую наперед заданную величину a оцениваются по формуле (18.3—13) из [5]

$$P\{ [c_l(\beta^0) - c_l]^2 \geq a \} \leq \langle \Delta c_l^2(\beta^0, \gamma^2) \rangle / a \quad (11)$$

либо

$$P \left\{ \int_{-S}^S [z(\xi, \beta^0) - z(\xi)]^2 d\xi \geq a \right\} \leq \rho^2(\beta^0, \gamma^2) / a. \quad (12)$$

Заметим, что для реализаций случайного объекта сложной формы часто выполняется условие эргодичности, при этом квадратические ошибки восстановления таких реализаций приближенно равны среднеквадратическим (9), (10).

Рассмотрим поведение функций (9), (10) в зависимости от мощности шума γ^2 при нарушении 2-го требования корректности. Согласно теореме 2 из [3], функции $\langle \Delta c_l^2(\beta^0, \gamma^2) \rangle \leq \langle c_l^2 \rangle$, $l = 1, 2, \dots$, и функция $\rho^2(\beta^0, \gamma^2) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle c_i^2 \rangle$ монотонно не возрастают с уменьшением γ^2 . В точке $\gamma^2 = 0$ они не определены в случае нарушения 2-го требования корректности, а в случае его выполнения стремятся к нулю при $\gamma^2 \rightarrow 0$. Следовательно, при выполнении 2-го требования корректности алгоритм восстановления (3) или (4) обладает регуляризирующим свойством 2, а при его нарушении — лишь стабилизирующим свойством Б. При этом стабилизирующее свойство А, очевидно, выполняется ввиду конечности нормы функции (7) для любого $\gamma^2 \neq 0$ [3]:

$$\|Q(\xi, x, \beta^0)\|_{\mathbb{S}, \mathbb{R}}^2 \leq \rho^2(\beta^0, \gamma^2)/\gamma^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} \langle c_i^2 \rangle \right] / \gamma^2.$$

2. Учет дискретизации изображения $F(x)$ для ввода исходных данных в ЭВМ. Предположим, что все интегралы в области изображений $|x| < R$ вычисляются по правилу прямоугольников на равномерной сетке с шагом $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_M)$. Тогда вместо уравнения (1) и статистических свойств «а — в» имеем уравнение с новым ядром и правой частью

$$\int_{-S}^S z(\xi) K_*(x, \xi) d\xi = f_*(x) + \gamma_*(x) = F_*(x), \quad |x| < R, \quad (13)$$

где $K_*(x, \xi) = \sum_{i=1}^L K_i(x, \xi)$ и при $M = 1$ $L = 2R/\Delta x$;

$$K_i(x, \xi) = \begin{cases} K(-R - \Delta x/2 + i\Delta x, \xi) & \text{при } |x + R + \Delta x/2 - i\Delta x| < \Delta x/2; \\ 0,5K(-R - \Delta x/2 + i\Delta x, \xi) & \text{при } |x + R + \Delta x/2 - i\Delta x| = \Delta x/2; \\ 0 & \text{при } |x + R + \Delta x/2 - i\Delta x| > \Delta x/2. \end{cases}$$

Интегральное преобразование (13) приводит к ступенчатой функции $f_*(x) = \sum_{i=1}^L f_i(x)$:

$$f_i(x) = \begin{cases} f(-R - \Delta x/2 + i\Delta x) & \text{при } |x + R + \Delta x/2 - i\Delta x| < \Delta x/2; \\ 0,5f(-R - \Delta x/2 + i\Delta x) & \text{при } |x + R + \Delta x/2 - i\Delta x| = \Delta x/2; \\ 0 & \text{при } |x + R + \Delta x/2 - i\Delta x| > \Delta x/2, \end{cases}$$

причем $f(x_i) = f_*(x_i)$, где $x_i = -R - \Delta x/2 + i\Delta x$. Аналогично строятся ступенчатые изображения базисных функций. Интегралы от произведений таких функций, очевидно, вычисляются точно по правилу прямоугольников. Таким образом, реально на ЭВМ вместо уравнения (1) при статистических условиях «а — в», решается уравнение (13) с измененными статистическими условиями «б и в»:

$$\text{б*) } \langle \gamma_i c_k \rangle = 0;$$

$$\text{в*) } \langle \gamma_i \gamma_k \rangle = \gamma_*^2 \delta_{ik}, \quad \gamma_i = \gamma(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, L,$$

где γ_*^2 — дисперсия ошибки с нулевым средним при определении значений $f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, L$.

Приближенное решение уравнения (13) дается формулой (3) или (4) при

$$\varphi_h(x) = \int_{-S}^S \psi_h(\xi) K_*(x, \xi) d\xi, \quad (\varphi_h, \varphi_l) = \sum_{i=1}^L \varphi_h(x_i) \varphi_l(x_i) \Delta x. \quad (14)$$

Непосредственной проверкой по схеме из [3] можно убедиться, что при обозначениях (13) и статистических условиях «а, б*, в*» среднеквадратические ошибки $\langle \Delta c_l^2(\beta) \rangle$ и $\rho^2(\beta)$ имеют минимум при

$$\beta_m = \beta_m^* = \gamma_*^2 \Delta x / \langle c_m^2 \rangle, \text{ причём для } M = 1, 2, \dots; \Delta x = \Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_M$$

$$\langle \Delta c_l^2(\beta^*, \gamma_*^2) \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{lm}^2(\beta^*) \langle c_m^2 \rangle \gamma_*^2 \Delta x}{\Delta x \gamma_*^2 + \langle c_m^2 \rangle \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta^*) (\varphi_k, \varphi_m)}; \quad (15)$$

$$\rho^2(\beta^*, \gamma_*^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta x \gamma_*^2 \langle c_m^2 \rangle \sum_{l=1}^m d_{lm}^2(\beta^*)}{\Delta x \gamma_*^2 + \langle c_m^2 \rangle \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta^*) (\varphi_k, \varphi_m)}; \quad (16)$$

$$\|Q_*(\xi, x, \beta^*)\|_{R,S}^2 \leq \rho^2(\beta^*, \gamma_*^2) / \Delta x \gamma_*^2. \quad (17)$$

Отличие формул (15)–(17) от соответствующих в п. 1 обусловлено качественным отличием статистического условия «в*» от статистического условия «в». Дело в том, что условие «в» физически не реализуемо, но его применение оправдывается тем, что среднеквадратическая ошибка восстановления, связанная только с шумом в статистической модели «в», больше среднеквадратической ошибки, связанной с реальным шумом, с площадью под стационарной автокорреляционной функцией, равной γ^2 . Статистическое условие «в*» пригодно лишь для $\Delta x_k > a$, где a — расстояние между отсчетами, при котором корреляция шума уже заметна. Таким образом, если Δx_k берется меньше a — промежутка корреляции шума, следует пользоваться формальным статистическим условием «в'» — дискретным аналогом условия «в»:

$$в') \langle \gamma_i \gamma_k \rangle = \gamma^2 \delta_{ik} / \Delta x,$$

где под γ^2 понимается площадь под стационарной автокорреляционной кривой реального шума. Тогда, очевидно, формальный вид $\beta_m^0 = \gamma^2 / \langle c_m^2 \rangle$ и ошибок (9), (10) сохраняется и $\|Q_*(\xi, x, \beta^0)\|_{R,S}^2 \leq \rho^2(\beta^0, \gamma^2) / \gamma^2$.

Таким образом, для любого уравнения типа (1) или при дискретизации изображения типа (13) можно оценить среднеквадратические ошибки восстановленных по формуле (6) значений коэффициентов c_l , $l = 1, 2, \dots$, и общую среднеквадратическую ошибку восстановленного по формуле, например, (4) случайного объекта.

3. Статистические критерии качества восстановления случайного объекта. Под задачей восстановления случайного объекта здесь понимается задача приближенного решения уравнения (1) или (13) при соответствующих статистических условиях типа «а — в», которым должны удовлетворять статистические классы случайных шумов и искомым в форме (2) реализаций случайных объектов.

В дальнейшем будем иметь в виду, что последующие формулы, получаемые для статистического условия «в», верны и для условия «в*», если под γ^2 понимать $\Delta x \gamma_*^2$.

Вместо среднеквадратических ошибок $\rho^2(\beta^0, \gamma^2)$ и $\langle \Delta c_l^2(\beta^0, \gamma^2) \rangle$, рассмотренных в предыдущих разделах, для удобства оценки неопределенности задачи восстановления рассмотрим безразмерные относительные ошибки $\rho^2(\beta^0, \gamma^2) / \sum_{k=1}^{\infty} \langle c_k^2 \rangle$, $\langle \Delta c_l^2(\beta^0, \gamma^2) \rangle / \langle c_l^2 \rangle$ и монотонные функции от них. Они представляют интерес как статистические характеристики неопределенности этой задачи и являются монотонными ограниченными сверху единицей функциями γ^2 . При этом существуют

$\lim_{\gamma^2 \rightarrow 0} \langle \Delta c_l^2(\beta^0, \gamma^2) \rangle / \langle c_l^2 \rangle = A_l < 1$ и $\lim_{\gamma^2 \rightarrow 0} \rho^2(\beta^0, \gamma^2) / \sum_{l=1}^{\infty} \langle c_l^2 \rangle = A < 1$, причём если 2-е условие корректности выполняется, то $A = A_l = 0$ для всех $l = 1, 2, \dots$, а если нет, то возможны и ненулевые значения этих пределов. Статистическая природа таких характеристик позволяет использо-

вать понятие «информации» для оптического изображения. Будем называть количеством информации о восстановленном по формуле (6) коэффициенте c_i величину

возможности восстановления именно методом (3), и поэтому ее можно понимать как статистический критерий качества восстановленного по методу (3) случайного объекта при $\beta = \beta^0$, при котором среднеквадратическая ошибка $\langle \Delta c_i^2(\beta, \gamma^2) \rangle$ минимальна. Введем для удобства новый менее подробный статистический критерий качества восстановленного по методу (3) случайного объекта

$$I(\gamma^2) = \ln \left[\sum_{i=1}^{\infty} \langle c_i^2 \rangle / \rho^2(\beta^0, \gamma^2) \right], \quad (19)$$

который будем называть количеством средней информации о восстановленном по формуле (3) случайном объекте. Слово «средняя» здесь применяется потому, что относительная среднеквадратическая ошибка восстановления случайного объекта равна среднему с весом $\langle c_i^2 \rangle$ значению относительных среднеквадратических ошибок восстановления коэффициентов его разложения (2).

Предложенные статистические критерии качества восстановления случайного объекта удовлетворяют интуитивному понятию «количества информации» и могут служить для принятия решения об использовании уравнения типа (1) или (13) в задаче восстановления независимо от того, удовлетворяется 2-е требование корректности или нет.

4. Численные примеры. Рассмотрим некоторые примеры, демонстрирующие простоту и конструктивность предложенных критериев для оценки качества восстановления случайного объекта. Пусть изображение $F(y)$ на отрезке $|y+a| < R$ получилось в результате размытия исходного объекта $z(\xi)$ прямолинейным движением на величину $2a$ за время экспозиции. Сделав замену $x = y + a$, получим уравнение для определения $z(\xi)$ в виде

$$\frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} z(\xi) d\xi = F(x), \quad |x| < R. \quad (20)$$

Пусть для определенности

$$z(\xi) = \begin{cases} z(\xi), & |\xi| \leq S; \\ 0, & |\xi| > S. \end{cases}$$

При $S < R - a$ решение уравнения (20) единственно в классе квадратично интегрируемых функций [7]. Рассмотрим более трудный и часто встречающийся на практике случай $S \geq R + a$. Тогда, как нетрудно убедиться непосредственной подстановкой в (20), любой объект

$$z_H(\xi) = z(\xi) + \sum_{k=1}^{N_1} \left(a_k \cos \frac{k\pi\xi}{a} + b_k \sin \frac{k\pi\xi}{a} \right) \text{Rect} \frac{\xi}{S} = z(\xi) + G(\xi),$$

где $\text{Rect} x = \begin{cases} 1, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$ имеет то же самое изображение $F(x)$ на отрезке $|x| < R \leq S - a$, что и объект $z(\xi)$ для произвольных a_k, b_k, N_1 . Поскольку значения объекта в точках $|\xi| > R + a$ не вносят согласно (20) никакого вклада в изображение $F(x), |x| < R$, достаточно рассмот-

реть случай $S = R + a$, переписав уравнение (20) в виде

$$\frac{1}{2a} \int_{-S}^S z(\xi) \operatorname{Rect} \frac{x-\xi}{a} d\xi = F(x), \quad |x| < R, \quad S = R + a. \quad (21)$$

(3) случайном объекте от γ^2 рассчитывается по формулам (19), (10) и показана на рис. 1.

Отметим, что на практике возможно восстановление лишь в конечной системе базисных функций $\psi_l(\xi)$, $l = 1, 2, \dots, N$. При этом, если выполняется условие $\sum_{l=N+1}^{\infty} \langle c_l^2 \rangle \ll \rho^2(\beta^0, \gamma^2)$, выбор N из условия

$$\sum_{l=N+1}^{\infty} \langle c_l^2 \rangle \leq \varepsilon \gamma^2 \|K(x, \xi)\|_{R,S}^2 \quad (22)$$

гарантирует, что ошибка в вычислении ряда (10) путем суммирования первых N членов не будет превышать 100% для любых базисных функций. Однако, как правило, получаемое из этой формулы значение N оказывается сильно завышенным для большинства используемых базисных функций. Поэтому с целью экономии машинного времени выбор значения N здесь осуществлялся путем сравнения абсолютных величин вычисляемых коэффициентов $c_l(\beta)$ пробной реализации случайного объекта так, чтобы удовлетворить условию $\sum_{l=1}^{\infty} c_l^2(\beta) \gg \sum_{l=N+1}^{\infty} c_l^2(\beta)$.

Как показывают численные эксперименты с различными ядрами $K(x, \xi)$, качественное соответствие восстановленного объекта исходному получается при $I(\gamma^2) > 2,5$. Таким образом, если мощность шума $\gamma^2 < 10^{-3}$, можно использовать уравнение (21) и выбранные базисные функции для восстановления случайного объекта, удовлетворяющего статистическому условию «а». Более детальные характеристики $I_l(\gamma^2)$ позволяют определить базисные функции, для которых возможны наибольшие ошибки при вычислении коэффициентов и которые, следовательно, могут быть использованы для выбора системы базисных функций. Например, в нашем случае нет смысла выбирать в качестве базисной периодическую с периодом $2a$ функцию $\psi_l(\xi)$, ортогональную константе, так как и расчетное значение $I_l(\gamma^2)$ для соответствующего ей коэффициента равно нулю, и восстановленный по формуле (6) коэффициент $c_l(\beta^0) = 0$ для любого $\gamma^2 > 0$, т. е. информация о коэффициенте при такой функции в задаче восстановления отсутствует.

Рис. 2 иллюстрирует восстановление произвольной реализации случайного объекта $z(\xi)$ по фрагменту его размытого согласно (20) изображения $F(x)$, $|x| < R$. Видно, что восстановленный объект заметно лучше соответствует исходному, чем размытое изображение $F(x)$, несмотря на неединственность решения уравнения (20) в L_2 при указанных для этого случая условиях.

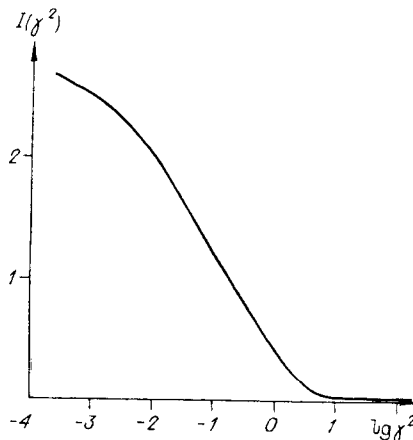


Рис. 1. Среднее количество информации в зависимости от γ^2

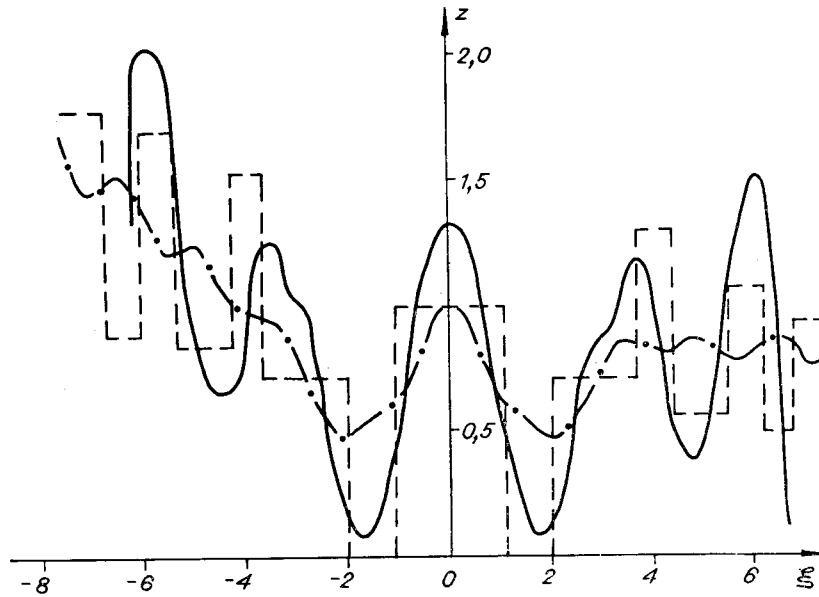


Рис. 2. Восстановление фрагмента равномерно сдвинутого объекта:
штриховая линия — исходный объект $z(\xi)$; штрихпунктирная — равномерно сдвинутый согласно (20) объект $F(\xi)$ (изображение); сплошная — результат восстановления при $a = 1$, $S = 7,3$, $R = 6,3$, $N = 30$

Следующий пример иллюстрирует влияние количества средней информации $I(\gamma^2) < 2,5$ на качество восстановления ограниченного по пространству $|\xi| < S$ оригинала по фрагменту его изображения, полученного с помощью двустороннего преобразования Лапласа

$$\int_{-S}^S z(\xi) \exp(-x\xi) d\xi = F(x), \quad |x| < R.$$

Здесь в качестве базисных выбирались функции $\psi_l(\xi) = \cos[(l-1)\pi\xi/S]$, $l = 1, 2, \dots, 30$, условие «а» для разрывных реализаций: $\langle c_m^2 \rangle = m^{-2}$, $m = 1, 2, \dots$

На рис. 3 показаны результаты восстановления оригинала по 40 равноотстоящим отсчетам изображения. Количество средней информации $I(\gamma^2)$ о восстановленном по 40 отсчетам оригинале при $R = 5$ $\Delta x \gamma_*^2 = 10^{-4}$ оказалось $I(10^{-4}) = 2,36$, и результат восстановления относительно неплох. Однако если брать то же количество равноотстоящих отсчетов при $R = 1$, то количество средней информации заметно уменьшается и даже при $\Delta x \gamma_*^2 = 10^{-7}$ составляет $I(10^{-6}) = 1,96$. Более того, при дальнейшем уменьшении $\gamma^2 = \Delta x \gamma_*^2$ до 10^{-7} $I(\gamma^2)$ практически не меняется, что объ-

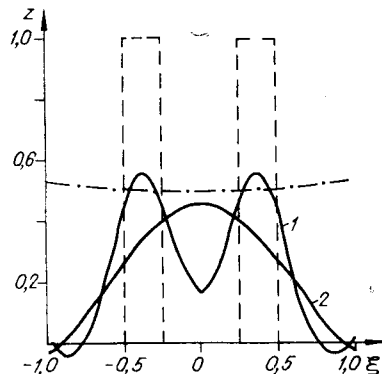


Рис. 3. Обращение преобразования Лапласа:

штриховая линия — оригинал $z(\xi)$; штрихпунктирная — изображение $F(\xi)$ оригинала $z(\xi)$; сплошная — результаты восстановления: 1 — при $R = 5$, $\Delta x = 0,25$, $\gamma^2 = 10^{-4}$; 2 — при $R = 1$, $\Delta x = 0,05$, $\gamma^2 = 10^{-6}$

ясняется неоднозначностью обращения в L_2 дискретизированного, согласно (13), преобразования Лапласа. При этом результат восстановления (кривая 2) также практически не меняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1986.
2. Хелгасон С. Преобразование Радона.— М.: Мир, 1983.
3. Довнар Д. В., Предко К. Г. Использование ортогонализации изображений базисных функций для регуляризованного восстановления сигнала // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1986.— 26, № 7.
4. Dovnar D. V., Predko K. G. The method for digital restoration of object distorted by linear system // Acta Polytech. Scand. Appl. Phys. Ser.— 1985.— 1, N 149.— P. 138.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.— М.: Наука, 1978.
6. Фриден Б. Улучшение и реставрация изображения // Обработка изображений и цифровая фильтрация.— М.: Мир, 1979.
7. Довнар Д. В., Предко К. Г. Метод устранения прямолинейного равномерного смаза изображения // Автометрия.— 1984.— № 6.

Поступила в редакцию 7 мая 1987 г.

УДК 535.36 : 771.537

О. В. ДУБОВИК, В. А. ЛОЙКО

(Минск)

ШУМОВЫЕ СВОЙСТВА СРЕДЫ ДЛЯ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИЯМИ ЧИСЛА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Большинство известных в настоящее время подходов к анализу шумовых свойств дисперсных сред, регистрирующих оптическое изображение, основывается на распределении Пуассона. Полученные в них результаты относятся к случаю разреженных систем, в которых расстояния между неоднородностями велики в сравнении с их размерами. Работ, посвященных плотноупакованным слоям, когда среднее расстояние между частицами близко к величине их среднего размера, сравнительно немного. Основная сложность анализа шумовых свойств таких систем связана с необходимостью знания статистики распределения числа частиц. Поскольку она неизвестна, то приходится искать косвенные пути, используя различные приближенные подходы [1—9]. В данной работе рассмотрена среднеквадратическая гранулярность дисперсного слоя на основе функции распределения числа частиц, полученной для модели абсолютно твердых сфер. Изложенные результаты могут использоваться для оптимизации шумовых характеристик фотослоев, телеэкранов, фототермопластиков и других систем воспроизведения оптического изображения.

Рассмотрим дисперсию коэффициента пропускания слоя, содержащего дискретные неоднородности:

$$\sigma_T^2 = \bar{T}^2 - \bar{T}^2. \quad (1)$$

Здесь

$$\bar{T} = \sum_{N=0}^{N_{\max}} P_N(S) T(N, S),$$

$T(N, S)$ — пропускание участка поверхности площади S , на котором на-