

БГА-94, не будут превышать $1,96\sigma$, т. е.

$$\begin{aligned}\Delta^{\text{мет}} A_n &\leq 1,96 \sqrt{D[A_n^{**}]}; \\ \Delta^{\text{мет}} W &\leq 1,96 \sqrt{D[W^{**}]}.\end{aligned}\quad (21)$$

Отсюда, подставляя (19), (20), после преобразований получим

$$\begin{aligned}\Delta^{\text{мет}} A_n &\leq 1,96 \cdot 10^{-3} \sqrt{(A_{\text{max}} - A_n)^2 5,3 + A_n^2 8,3}; \\ \Delta^{\text{мет}} W &\leq 7,2 \cdot 10^{-3} W.\end{aligned}\quad (22)$$

Указанные погрешности более чем в 5 раз меньше оцениваемых метрологических характеристик.

Таким образом, предложенный метод достаточным образом метрологически обоснован. Он хорошо поддается автоматизации и существенно повышает производительность поверки и метрологической аттестации амплитудных дискриминаторов импульсов в условиях серийного производства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеев В. В., Хазанов Б. И. Приборы для измерения ионизирующих излучений. Основы теории и проектирования.— М.: Атомиздат, 1972.
2. Верман Б. С., Владимиров Е. Н., Прянишников В. А. Анализ статических погрешностей устройств обработки входных сигналов спектрометров // Изв. вузов. Приборостроение.— 1984.— № 11.
3. Крамер Г. Математические методы статистики.— М.: Изд-во иностр. лит., 1975.
4. Паспорт. Генератор линейно изменяющегося напряжения БГА-93.3.268.011.— М.: Всесоюз. объединение «Изотоп», 1983.
5. Паспорт. Генератор двояных импульсов БГА-94.3.263.010.— Там же.

Поступило в редакцию 15 февраля 1988 г.

УДК 681.325

С. В. ДОЦЕНКО, В. Ю. КАРЛУСОВ
(Севастополь)

СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С УЧЕТОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОБРАБАТЫВАЕМОГО ПРОЦЕССА

В практике обработки измерительной информации широко применяется линейная фильтрация, которая состоит в преобразовании исходного процесса $x(t)$ в выходной процесс $y(t)$ с помощью некоторой заданной весовой функции $h(\tau)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (1)$$

Устройство, осуществляющее операцию (1), в дальнейшем будем называть фильтром-прототипом. Его частотная характеристика определяется выражением

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp\{-j\omega\tau\} d\tau. \quad (2)$$

В силу специфики цифровых устройств непосредственное преобразование (1) не используется на практике. Поэтому разработан ряд методов, по-

© 1990 Доценко С. В., Карлусов В. Ю.

6 Автометрия № 2, 1990 г.

звolyющих проектировать вычислительные процедуры, преобразующие отсчеты входного сигнала $\{x(t)\}$ в отсчеты выходного сигнала $\{y(t)\}$. Такие вычислительные процедуры носят название алгоритмов цифровой фильтрации. Методы их проектирования обычно основываются на аппроксимации весовой функции фильтра-прототипа во временной или частотной области. При этом предъявляемые требования к обеспечению необходимых уровней усиления (затухания) в полосе частот пропускания (подавления) и критерии точности аппроксимации задаются без учета статистических свойств обрабатываемого процесса $x(t)$.

Однако возможен иной подход к синтезу алгоритма фильтрации, учитывающий статистические характеристики фильтруемого процесса $x(t)$. Пусть процесс $x(t)$ является случайным, стационарным, эргодическим. Допустим, что он подвергается фильтрации с помощью рекурсивного цифрового фильтра (НЦФ). Применение НЦФ имеет ряд достоинств [1]: 1) нет необходимости в исследовании устойчивости для НЦФ; 2) фильтры заданного класса способны обеспечить линейность ФЧХ в полосе пропускания; 3) влияние ограниченной разрядности вычислительного устройства и погрешности отдельных операций на точность конечного результата по сравнению с рекурсивным алгоритмом фильтрации незначительно.

Процесс на выходе НЦФ имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x[t - (k - m) T_0], \quad (3)$$

где a_k — коэффициенты фильтра; T_0 — период дискретизации входного процесса; mT_0 — интервал прогноза; N — количество коэффициентов фильтра.

Процесс (3) на выходе НЦФ в общем случае не совпадает с процессом (1) на выходе фильтра-прототипа ни при каких коэффициентах $\{a_k\}$. Однако можно рассчитать коэффициенты $\{a_{0k}\}$, обеспечивающие при заданных T_0 , m и N минимум отличия $z(t)$ и $y(t)$, например, по среднеквадратическому критерию. Средний квадрат отличия процессов (3) и (1) есть

$$\varepsilon^2 = \langle [z(t) - y(t)]^2 \rangle,$$

где $\langle \dots \rangle$ — осреднение по ансамблю.

Подставляя сюда (3) и (1), получим

$$\varepsilon^2 = \sigma_y^2 - 2 \sum_{k=0}^{N-1} W_{k-m} a_k + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_{k-n} a_k a_n, \quad m = \text{const}, \quad (4)$$

$$\text{где} \quad \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau_2 - \tau_1) h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (5)$$

— дисперсия процесса $y(t)$. Входящие в эти формулы величины суть

$$A_k = B(kT_0); \quad (6)$$

$$\text{и} \quad W_k = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau - kT_0) h(\tau) d\tau \quad (7)$$

$$B(\tau) = \langle x(t) x(t + \tau) \rangle$$

— корреляционная функция процесса $x(t)$.

Минимум (4) достигается при $a_k = a_{0k}$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_n} = 0 \quad (n = 0, 1, \dots, N-1). \quad (8)$$

Подстановка (4) в (8) дает систему линейных уравнений для определения $\{a_{0k}\}$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} A_{k-n} a_{0k} = W_{n-m} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1), \quad m = \text{const}. \quad (9)$$

Из этих уравнений видно, что коэффициенты $\{a_{0k}\}$ зависят не только от требуемого вида фильтра-прототипа, но и от статистических свойств фильтруемого процесса. Минимальная величина (4) есть

$$\varepsilon_{\min}^2 = \sigma_y^2 - \sum_{k=0}^{N-1} W_{k-m} a_{0k}. \quad (10)$$

Соотношения (9) и (10) решают задачу синтеза алгоритма фильтрации, учитывающего статистические свойства фильтруемого процесса, и дают оценку близости процесса после такой фильтрации процессу на выходе фильтра-прототипа.

Формулы (5)–(7) ориентированы на использование импульсной характеристики фильтра-прототипа $h(\tau)$. Однако на практике известна в ряде случаев его частотная характеристика $H(\omega)$.

Выразив $h(\tau)$ через $H(\omega)$ с помощью преобразования, обратного (2), и подставив в формулы (5)–(7), найдем

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega; \quad (11)$$

$$W_k = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \bar{H}(\omega) \exp\{-j\omega k T_0\} d\omega; \quad (12)$$

$$A_k = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp\{j\omega k T_0\} d\omega, \quad (13)$$

где $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) \exp\{-j\omega\tau\} d\tau$

есть спектр случайного процесса $x(t)$.

Рассмотрим применение разработанной методики на примере одной из типичных задач цифровой фильтрации — выделения низкочастотных составляющих процесса $x(t)$. Для этой цели идеальным является фильтр с линейной ФЧХ и прямоугольной АЧХ [2]:

$$H(\omega) = \begin{cases} C \exp\{-j\omega\tau_\phi\}, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c; \\ 0, & \omega_c < |\omega|. \end{cases} \quad (14)$$

где C — требуемый коэффициент усиления в полосе пропускания; ω_c — частота среза фильтра; τ_ϕ — его время запаздывания. Импульсная характеристика фильтра-прототипа

$$h(\tau) = \frac{C\omega_c \sin[\omega_c(\tau - \tau_\phi)]}{\pi \omega_c(\tau - \tau_\phi)}$$

существует на всей оси $\tau \in (-\infty, \infty)$, т. е. фильтр (14) нереализуем физически. Однако он может быть в указанном выше смысле заменен физически реализуемым алгоритмом (3).

Допустим, что процесс $x(t)$ имеет экспоненциальную корреляционную функцию вида

$$B(\tau) = \sigma^2 \exp(-|\tau|/\tau_x), \quad (15)$$

где σ^2 — его мощность; τ_x — характерный временной масштаб. Спектральная плотность такого процесса

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\tau_x}{1 + (\omega\tau_x)^2}. \quad (16)$$

Подстановка (14), (15) и (16) в формулы (6) и (11)–(13) для рассматриваемого случая даст выражения

$$\sigma_y^2 = \frac{2C^2\sigma^2}{\pi} \arctg \gamma;$$

$$\frac{\pi W_k}{2C\sigma^2} = \begin{cases} \frac{\gamma}{D} \int_0^D \frac{\cos x dx}{1 + \left(\frac{\gamma}{D}x\right)^2}, & D \neq 0; \\ \arctg \gamma, & D = 0; \end{cases}$$

$$A_k = \sigma^2 \exp \{-|k|\beta/\gamma\}.$$

Здесь $\alpha = \omega_c \tau_\Phi$; $\beta = \omega_c T_0$; $\gamma = \omega_c \tau_x$; $D = |\alpha - k\beta|$.

На ЭВМ были проведены расчеты по определению коэффициентов $\{a_{0k}\}$ и минимальной относительной среднеквадратической ошибки ϵ^2/σ^2 . При этом положено $\alpha = 0$, т. е. отсутствие задержки в полосе пропускания фильтра, и $C = 1$. Варьировалось отношение шага дискретизации T_0 к характерному масштабу процесса τ_x . Результаты численных расчетов при количестве коэффициентов фильтра $N = 7$ и опережении $m = 3$ для различных γ отражены на рисунке. Кривые имеют минимумы. Их наличие можно объяснить следующим образом. При малых значениях отношения T_0/τ_x отсчеты входного процесса сильно коррелированы и практически повторяют друг друга, при этом НЦФ работает как фильтр, имеющий всего один отсчет, погрешность обработки процесса таким фильтром велика. Она уменьшается с ростом T_0 , но до определенного его значения. При больших T_0 начинает сказываться шум «перепутывания частот», который вновь увеличивает эту погрешность [3]. Поэтому естественно ожидать нахождение оптимального значения отношения T_0/τ_x , обеспечивающего минимум ϵ^2/σ^2 , что фактически и имеет место. Это отношение находилось следующим образом. Для заданной величины $\gamma = \omega_c \tau_x$, зависящей от частоты среза фильтра ω_c и характерного временного масштаба τ_x фильтруемого процесса, определялось такое $\beta_{\text{опт}} = (\omega_c T_0)_{\text{опт}}$, которое минимизирует величину (10). Отсюда легко найти оптимальное отношение периода временной дискретизации процесса к его характерному масштабу $(T_0/\tau_x)_{\text{опт}} = \beta_{\text{опт}}/\gamma$ и оптимальное отношение круговых частот дискретизации и среза $(\omega_0/\omega_c)_{\text{опт}} = 2\pi/\beta_{\text{опт}}$.

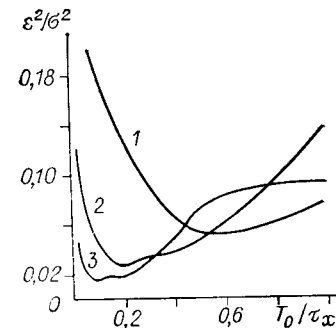
Найденные величины вместе с соответствующими им значениями минимального квадрата относительной погрешности $(\epsilon^2/\sigma^2)_{\text{min}}$ отличия процессов на выходах цифрового фильтра и фильтра-прототипа для различных значений γ представим следующим образом:

	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
$\left(\frac{T_0}{\tau_x}\right)_{\text{опт}}$	1,112	0,584	0,294	0,187	0,137	0,109	0,060
$\left(\frac{\epsilon^2}{\sigma^2}\right)_{\text{min}}$	0,058	0,051	0,036	0,028	0,022	0,018	0,0156
$\left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)_{\text{опт}}$	11,300	10,753	10,628	11,181	11,449	11,496	17,271

Отсюда следует, что оптимальные параметры рассматриваемого цифрового фильтра зависят от статистической структуры фильтруемого процесса.

Действительно, если частота среза фильтра-прототипа ω_c постоянна, то величина γ может изменяться только за счет изменения характерного масштаба процесса τ_x , а это, как показано выше, влечет за собой изменения как $(\epsilon^2/\sigma^2)_{\text{опт}}$, так и $\omega_{\text{опт}}$.

Полученные результаты позволяют правильно выбрать частоту дискретизации в зави-



Зависимости среднего квадрата погрешности цифрового фильтра от периода дискретизации:

1 — $\gamma = 1$; 2 — 3; 3 — 6

симости от частоты среза фильтра-прототипа и характерного масштаба процесса и оценить погрешность его обработки. Видно, что в рассмотренных случаях оптимальная частота дискретизации на порядок превышает частоту среза фильтра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник.— М.: Радио и связь, 1985.
2. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и реализация: Пер. с англ./Под ред. И. Н. Теплюка.— М.: Мир, 1982.
3. Кузьмин И. В., Кедрус В. А. Основы теории информации и кодирования.— Киев: Вища шк., 1977.

Поступило в редакцию 24 июня 1987 г.

УДК 535.4 : 778.38

Б. ДУБИК, М. ЗАЙОНЦ, Е. НОВАК

(Вроцлав, Польша)

ФОКУСИРУЮЩЕЕ КИНОФОРМНОЕ ЗЕРКАЛО

В настоящее время все большее внимание оптиков привлекают киноформные оптические элементы [1]. Они характеризуются низким весом из-за своей малой толщины и возможностью дешевой массовой копки, а в принципе могут с успехом заменять традиционную рефракционную оптику во многих применениях.

Особый интерес вызывает возможность создать киноформное фокусирующее зеркало, которое могло бы совместить две функции — отражение света и его фокусировку. Иначе говоря, сферическая волна, расходящаяся из одной точки, должна трансформироваться в другую волну, скажем, тоже сферическую, центр кривизны которой находится в другой точке. Киноформное зеркало можно создать в виде плоского элемента, отражающего свет, на поверхности которого нанесен микрорельеф определенной геометрии. Глубина рельефа должна обеспечить фазовый сдвиг между лучами, отраженными в разных местах киноформа в пределах $0 - 2\pi$, а топология рельефа — дать в результате дифракции требуемую трансформацию световой волны.

Киноформное зеркало в отличие от трансмиссионного элемента (киноформной линзы) можно изготовить из любого материала, выбирая его в соответствии с технологическими возможностями производства или специальными требованиями, например высокой устойчивостью к излучению. Хорошим примером может здесь служить киноформное зеркало для фокусировки мощного инфракрасного излучения CO_2 -лазера [2]. Требуемый высокий коэффициент отражения нетрудно получить благодаря тонкой металлической пленке, которую можно нанести также и на поверхность таких материалов, типичных для микроэлектроники, как, например, GaAs или Si. Кроме того, в случае киноформных зеркал толщина и форма подложки не влияют на качество изображения.

С другой стороны, при применении киноформного зеркала источник волны, падающей на зеркало, и точка фокусировки отраженного света не должны лежать на одной оси, перпендикулярной плоскости зеркала. Это требование существенно влияет на геометрию рельефа киноформа. Как известно, фокусирующий киноформ имеет зонную структуру и для его изготовления нужно знать форму и расположение границ этих зон (форма фазового профиля зоны известна). В случае фокусировки параллель-