7. **Маликов В. Т., Кожуховский А. Д., Литвин А. И.** Тестовый контроль ЭВМ // Тез. докл. VIII Всесоюз. науч.-техн. конф. «Измерительные информационные системы».— Ташкент: ЦП НТО «ПРИБОРПРОМ», 1987.

Поступило в редакцию 13 октября 1989 г.

УДК 519.24

Я. А. БЕДРОВ

(Ленинград)

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАИБОЛЕЕ ТИПИЧНОЙ КРИВОЙ ПАТТЕРНА

В практике экспериментальных исследований в области физиологии и медицины достаточно часто встречается случай, когда результаты наблюдений могут быть представлены в виде кривых, характеризующих зависимость изучаемого процесса от некоторого параметра (например, времени). Характерной особенностью этих областей экспериментальных исследований является то, что, как правило, результаты экспериментов плохо воспроизводимы. При повторном проведении эксперимента на одном и том же объекте (человек, животное) и особенно при проведении его на разных объектах получаемые кривые (даже при отсутствии ошибок измерения) сохраняют только свои качественные особенности, но не являются количественно одинаковыми.

Простейшими примерами подобных ситуаций могут служить случаи, когда кривые отличаются друг от друга масштабами их значений или масштабами значений аргумента, или сдвигами по оси значений аргумента, или различными комбинациями этих факторов.

Возможной модельной интерпретацией такого поведения кривых будет предположение о том, что они могут быть представлены как результат действия на некоторую исходную кривую $y(t)$ деформирующего оператора, зависящего от случайных параметров. Рассмотрим самый простой случай, когда значения случайных параметров статистически независимы, а их распределения симметричны и одномодальны. Поставим следующий вопрос: дает ли оценка среднего значения, полученная по выборке таких деформированных кривых, представление о некоторой типичной наиболее часто встречающейся кривой?

Ограничимся случаем, когда наблюдаемые кривые гладкие и могут быть достаточно хорошо представлены векторами их значений на некоторой равномерной сетке значений аргумента. Существенными для ответа на поставленный вопрос являются два момента.

1. Факт сохранения при деформациях качественного характера кривых позволяет предположить, что число случайных параметров деформирующего оператора невелико по сравнению с размерностью векторов.

2. Приведенные простейшие примеры возможных деформаций показывают, что деформирующий оператор может быть нелинейным относительно случайных параметров.

Следствиями этих фактов будут следующие утверждения.

Распределение наблюдаемого случайного вектора вырождено, поскольку все его выборочные значения принадлежат некоторому многообразию, размерность которого равна числу случайных параметров.

Только в частных случаях, когда деформирующий оператор линеен относительно случайных параметров, это многообразие будет подпространством линейного пространства.

Поскольку оценка среднего значения — линейная комбинация векторов, принадлежащих этому многообразию, то в общем случае она будет элементом этого многообразия, только если последнее является линейным пространством. Следовательно, если деформирующий оператор нелинеен относительно случайных параметров, то, как правило, оценка среднего не только не будет служить типичным представителем генеральной совокупности, но вообще не станет ей принадлежать.

Наглядным примером, иллюстрирующим этот феномен, служит оценка среднего для кривых, отличающихся случайным сдвигом по оси значений аргумента. Очевидно, что после усреднения особенности профиля отдельных кривых, соизмеримые по ширине с величинами сдвигов, могут полностью исчезнуть.

Чем же заменить это «несостоятельное» среднее значение? Ясно, что при такой интерпретации механизма образования паттерна в качестве такого типичного представителя генеральной совокупности может быть выбрана кривая $\bar{y}(t)$, соответствующая средним значениям случайных параметров. Если считать, что при значениях параметров, равных средним, деформирующий оператор воспроизводит исходную кривую без искажений, то задача оценивания кривой $\bar{y}(t)$ сведется к задаче оценивания кривой $y(t)$ на основании выборки деформированных кривых.

Представляет практический интерес рассмотреть возможные частные постановки этой задачи, при которых ее решение может быть получено с помощью эффективных вычислительных процедур. Ниже приводится одна из таких постановок. Предполагается, что деформирующий оператор может быть представлен в виде степени линейного оператора. Показатель степени является целочисленной случайной величиной с нулевым средним значением, плотность распределения вероятностей которой известна с точностью до значения дисперсии. Задана матрица линейного оператора и интервал возможных значений дисперсии.

В этих предположениях получены условия, при которых задача имеет единственное решение. Рассмотрен метод оценивания, позволяющий свести задачу к нахождению единственного решения нелинейного уравнения с одним неизвестным. Вычисление значений входящей в уравнение нелинейной функции сводится к решению линейной системы.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим функцию $f(t)$, $t \in [0, T]$. Поставим ей в соответствие вектор

$$W = |f(t_1), \ldots, f(t_m)|^T, \; t_1 = 0; \; t_m = T$$

($\{t_i\}_1^m$ — равномерная сетка значений ее аргумента). Пусть

$$\{f_i(t)\}_1^n, \; t \in [0, T],$$

— функции, полученные из $f(t)$ путем линейных деформаций. Будем предполагать, что векторы

$$V_i = |f_i(t_1), \ldots, f_i(t_m)|^T, \; i = 1, \ldots, n,$$

удовлетворяют модели

$$V_i = A^{k_i} W,$$

где A — заданная $m \times m$-матрица, удовлетворяющая условию

$$A^T A = I; \tag{1}$$

$\{k_i\}_1^n$ — выборочные значения целочисленной случайной величины $k(s_0^2)$, для которой $E[k(s_0^2)] = 0$, а плотность распределения вероятностей $P(j, s_0^2)$, $j = p_1, p_1 + 1, \ldots, p_2$, задана с точностью до дисперсии s_0^2.

В отношении величины s_0^2 известно, что

$$s_0^2 \in [s_1^2, s_2^2],$$

где s_1^2, s_2^2 — заданные границы интервала возможных значений дисперсии.

Введем обозначение

$$V(s^2) = A^{k(s^2)}W,$$

где $k(s^2)$ — случайная величина, плотность распределения вероятностей которой равна $P(j, s^2)$. Очевидно, что

$$E[V(s^2)] = M(s^2)W; \quad M(s^2) = E\left[A^{k(s^2)}\right].$$

Рассмотрим матрицу

$$M(s^2) = \sum_{j=p_1}^{p_2} P(j, s^2)A^j.$$

Поскольку в силу [1] $(A^j)^T A^j = I$, $j = p_1, \ldots, p_2$, то в ортонормированном базисе, состоящем из собственных векторов матрицы A, все матрицы $\{A^j\}_{p_1}^{p_2}$ принимают диагональный вид, причем вещественные части их диагональных элементов равны 1. Следовательно, в том же базисе матрица $M(s^2)$ будет диагональной и в силу неотрицательности значений $\{P(j, s^2)\}_{j=p_1}^{p_2}$

$$\det M(s^2) > 0.$$

Введем вектор

$$X(s^2) = M^{-1}(s^2)E[V(s_0^2)].$$

В силу определения

$$X(s_0^2) = W. \tag{2}$$

Будем предполагать, что функция

$$d(s^2) = \|X(s^2)\|_2, \; s^2 \in [s_1^2, s_2^2],$$

где $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма вектора, строго монотонна. Требуется оценить значение вектора W.

Вследствие строгой монотонности функции $d(s^2)$ уравнение

$$d(s_0^2) = \|M^{-1}(s^2)E[V(s_0^2)]\|_2, \; s^2 \in [s_1^2, s_2^2],$$

имеет единственное решение при $s^2 = s_0^2$, а из ортогональности матрицы A и условия [2] следует

$$\|E[V_1]\|_2 = \cdots = \|E[V_n]\|_2 = \|W\|_2 = d(s_0^2).$$

Поскольку величина $d(s_0^2)$ и вектор $E[V(s_0^2)]$ неизвестны, то будем оценивать их с помощью выражений

$$\tilde{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i; \quad \tilde{d}(s_0^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (V_i^T V_i)^{1/2},$$

а в качестве оценки вектора W выберем вектор

$$\tilde{W} = M^{-1}(\tilde{s}_0^2)\tilde{V}, \tag{3}$$

где $\tilde{s}_0^2$ — решение уравнения

$$\tilde{d}(s_0^2) = \|M^{-1}(s^2)\tilde{V}\|_2, \; s^2 \in [s_1^2, s_2^2]. \tag{4}$$

Пример. Для иллюстрации эффективности метода оценивания рассмотрим следующий модельный пример. Значения компонент вектора W зададим выражением

$$W(i) = \sin(2\pi i/7), \; i = 1, \ldots, 7.$$

В качестве матрицы A выберем матрицу оператора сдвига, имеющую вид

$$\underset{7\times 7}{A} = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & I \\ 0 & \\ \hline 1 & 0\cdots 0 \end{array} \right\|.$$

Значения $\{P(j, s_0^2)\}_{j=-3}^{3}$ определялись выражениями

$$P(j, s_0^2) = F((j+0{,}5)D) - F((j-0{,}5)D);$$

$$P(-j, s_0^2) = P(j, s_0^2),\ j = 0, \ldots, 3;$$

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} P_0(x, s^2)\,dx, \quad s_0^2 = 1, \quad D = 7/8,$$

где $P_0(x, s^2)$ — плотность вероятности нормального распределения с нулевым средним и дисперсией s^2.

Для получения показателей $\{k_i\}_1^n$ использовалась выборка статистически независимых значений

$$\{a_i\}_1^n \in N(0, 1)$$

и каждому значению a_i ставилось в соответствие число

$$k_i = j - 4, \text{ если } a_i \in \Delta_j,\ i = 1, \ldots, n,$$

где $\Delta_1 = (-\infty, D-4)$, $\Delta_7 = [-4+6D, \infty)$, $\Delta_j = [-4+(j-1)D, -4+jD)$, $j = 2, \ldots, 6$. Вычислялись векторы $\{V_i\}_1^n$, находилась оценка их среднего и значение $\tilde{d}(s_0^2)$. Задавалась равномерная сетка из 100 значений s^2 в интервале [0,7; 1,3].

В качестве приближенного решения уравнения (4) выбиралось сеточное значение, минимизирующее квадрат невязки. Находилась оценка вектора W по формуле (3) и среднеквадратическая погрешность оценивания $\tilde{\sigma}$. Вычисления повторялись 20 раз при различных статистически независимых выборках $\{a_i\}_1^n$, и находилась оценка среднего $\bar{\sigma}$ для выборки $\{\tilde{\sigma}_i\}_1^{20}$.

Результаты вычислений

n	25	50	100
$\bar{\sigma}$	0,094	0,071	0,054

Приведенные данные показывают, что для получения высокой точности оценивания объем выборки должен быть не менее 100.

Поступило в редакцию 10 июня 1988 г.