

результатов вычислений от теоретических оценок (см. рис. 5, а) объясняется погрешностями аппроксимации интегралов Френеля в (15).

Найденные методические погрешности могут быть рассчитаны и исключены из результатов измерений. Такая операция была предусмотрена при практической реализации рассмотренного метода [5, 6].

Интерференционная картина колец проецировалась объективом с перестраиваемым коэффициентом увеличения  $3^{\times}$ — $5^{\times}$  на многоэлементный приемник излучения типа ФПЗС 1Л [7], содержащий 500 светочувствительных ячеек, расположенных с шагом 24 мкм. Фотоэлектрический сигнал, полученный с выхода устройства двойной коррелированной выборки [8], подавался на 10-разрядный АЦП и далее в микроЭВМ типа «Электроника 60М» в режиме прямого доступа к памяти. Вводя поправки на методические погрешности, представленные на рис. 5, получим погрешность определения разности фаз интерферирующих волн  $\Delta\epsilon < 1/50$ , что соответствует погрешности измерения положения сферического отражателя  $\lambda/100$ .

Таким образом, рассмотренный метод машинной обработки интерференционной картины при широких функциональных возможностях обеспечивает высокую точность измерений в реальных условиях физического эксперимента.

Несмотря на сравнительную сложность алгоритма обработки, он может использоваться при анализе двумерных изображений и построении контурных карт отражающей поверхности при различных ее положениях с точной привязкой к заданной точке объекта.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коломийцев Ю. В. Интерферометры.— Л.: Машиностроение, 1976.
2. Гуров И. П. Помехоустойчивый фотоэлектрический метод измерения фазовых характеристик интерференционной картины // Метрология.— 1986.— № 7.
3. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана.— М.: Наука, 1979.
4. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.— М.: Мир, 1978.
5. Гуров И. П., Нагибина И. М., Павлова А. Б. Применение метода дискретизации интерференционной картины для измерения перемещений сферической поверхности // Опт-мех. пром-сть.— 1988.— № 9.
6. Гуров И. П., Павлова А. Б. Согласованный фильтр для идентификации положения центра интерференционной картины // Тез. докл. VI Всесоюз. конф. «Проблемы метрологического обеспечения систем обработки измерительной информации».— М., 1987.
7. Аксененко М. Д., Бараночников М. Л. Приемники оптического излучения.— М.: Радио и связь, 1987.
8. Полупроводниковые формирователи сигналов изображения/Под ред. П. Йесперса и др.— М.: Мир, 1979.

*Поступила в редакцию 26 декабря 1988 г.*

УДК 621.391

**А. В. САВИЧ, Я. А. ФОМИН**

*(Москва)*

### **ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ МНОГОАЛЬТЕРНАТИВНОГО РАСПОЗНАВАНИЯ НОРМАЛЬНЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ**

Основной этап синтеза распознающих систем — их оптимизация, обеспечивающая гарантированное качество (достоверность) распознавания при минимальных затратах на обучение и принятие решения. В на-

стоящее время методы оптимизации разработаны только лишь для задач распознавания двух классов [1—5], представляющих на практике, скорее, исключение, чем правило, поскольку подавляющее большинство задач распознавания является, как известно, многоальтернативным (распознавание знаков, букв, цифр, речевых, радио- и электрических сигналов, изображений и т. п.). Настоящая работа посвящена решению задачи оптимизации систем многоальтернативного распознавания нормальных одномерных совокупностей с неизвестными общей дисперсией  $\sigma^2$  и средними значениями  $a_1, a_2, \dots, a_K$  ( $K$  — число распознаваемых классов  $s_1, s_2, \dots, s_K$ ).

В [3] показано, что при многоальтернативном распознавании целесообразно использование правила принятия решения, основанного на критерии максимального правдоподобия. В рассматриваемом случае принимается решение  $\gamma_l$  о том, что  $\{x_i\}_1^n \in s_l$ , если для всех оценок логарифмов отношений правдоподобия  $\widehat{G}_{lj}, j = \overline{1, K}, j \neq l$ , выполняется условие

$$\widehat{G}_{lj} = \sum_{i=1}^n \ln \frac{w_l(x_i, \widehat{a}_l, \widehat{\sigma}^2)}{w_j(x_i, \widehat{a}_j, \widehat{\sigma}^2)} \geq 0. \quad (1)$$

Здесь  $\widehat{a}_r = m_r^{-1} \sum_{t=1}^{m_r} x_t^{(r)}$ ,  $r = \overline{1, K}$ , — оценки максимального правдоподобия неизвестных средних значений  $a_r$ , полученные на этапе обучения по классифицированным выборкам  $\{x_t^{(r)}\}_1^{m_r} \in s_r$ , а  $\widehat{\sigma}^2$  — оценка неизвестной общей дисперсии.

Подставляя в (1) оценки одномерных нормальных плотностей вероятности

$$w_r(x_i, \widehat{a}_l, \widehat{\sigma}^2) = (\widehat{\sigma} \sqrt{2\pi})^{-1} \exp \left\{ -\frac{(x_i - \widehat{a}_l)^2}{2\widehat{\sigma}^2} \right\},$$

приводим правило принятия решения к виду  $\{x_i\}_1^n \in s_l$ , если

$$\widehat{G}_{lj} = (\widehat{a}_l - \widehat{a}_j) \left( \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \widehat{a}_l - \widehat{a}_j \right) \geq 0, \quad j = \overline{1, K}, \quad j \neq l. \quad (2)$$

Из (2) видно, что оценка  $\widehat{\sigma}^2$  общей дисперсии  $\sigma^2$  не влияет на принимаемое при распознавании решение. Из этого следует, что, если дисперсия  $\sigma^2$  одинакова для всех распознаваемых классов, вычислять ее оценку  $\widehat{\sigma}^2$  на этапе обучения нет необходимости, а вероятности  $\alpha_{lj}^{(K)}, \alpha_l^{(K)}, \beta_l^{(K)}$  не изменяются при переходе от случая известной дисперсии  $\sigma^2$  к случаю неизвестной. Здесь  $\alpha_{lj}^{(K)}$  — вероятность принять решение  $\{x_i\}_1^n \in s_l$ , когда на самом деле  $\{x_i\}_1^n \in s_j, j \neq l$ ;  $\alpha_l^{(K)}$  — вероятность отвергнуть правильное решение  $\gamma_l$ ;  $\beta_l^{(K)}$  — вероятность принять неправильное решение  $\gamma_l$ ; верхний индекс у вероятностей указывает на то, что рассматриваются вероятности  $K$ -альтернативного распознавания.

Если обозначить событие  $\widehat{G}_{lj} \geq 0$  через  $A_{lj}$ , то

$$\alpha_{lj}^{(K)} = \Pr \left[ \bigcap_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^K A_{lr} \mid \{x_i\}_1^n \in s_j \right]; \quad (3)$$

$$\alpha_l^{(K)} = \Pr \left\{ \bigcup_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^K A_{rl} \mid s_l \right\} = 1 - \Pr \left\{ \bigcap_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^K \bar{A}_{rl} \mid s_l \right\} = 1 - \alpha_{ll}^{(K)},$$

а для определения вероятностей  $\beta_l^{(K)}$  наиболее удобна формула [3]

$$\beta_l^{(K)} = (K - 1)^{-1} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^K \alpha_{rl}^{(K)}. \quad (4)$$

Для вычисления  $\alpha_l^{(K)}$  можно использовать известное [6] соотношение

$$\Pr \left\{ \bigcup_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^K A_{rl} \mid s_l \right\} = \sum_{t=1}^{K-1} (-1)^{t+1} R_t; \quad (5)$$

$$R_t = \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_1 \neq l}}^{K-t} \sum_{\substack{i_2=i_1+1 \\ i_2 \neq l}}^{K-t+1} \dots \sum_{\substack{i_t=i_{t-1}+1 \\ i_t \neq l}}^K \Pr \left\{ \bigcap_{j=1}^t A_{i_j l} \mid s_l \right\}.$$

Вероятности ошибок распознавания  $\alpha_r^{(K)}, \beta_r^{(K)}, r = \overline{1, K}$ , в общем случае являются функциями величин  $K, n, \sigma^2, m_r, a_r, r = \overline{1, K}$ :

$$\alpha_r^{(K)} = \alpha_r^{(K)}(K, n, \sigma^2, m_1, \dots, m_K, a_1, \dots, a_K);$$

$$\beta_r^{(K)} = \beta_r^{(K)}(K, n, \sigma^2, m_1, \dots, m_K, a_1, \dots, a_K).$$

Оптимизация [4–5] распознающей системы заключается в отыскании объемов выборок  $m_1^*, m_2^*, \dots, m_K^*, n^*$ , минимизирующих некоторый критерий  $H(m_1, m_2, \dots, m_K, n)$  и удовлетворяющих ограничениям  $h_q(m_1, m_2, \dots, m_K, n, \alpha_1^{(K)}, \alpha_2^{(K)}, \dots, \alpha_K^{(K)}, \beta_1^{(K)}, \beta_2^{(K)}, \dots, \beta_K^{(K)}, \Theta_{12}, \dots, \Theta_{1K}, \dots, \Theta_{K-1, K}) \geq b_q, q = \overline{1, Q}$ , на допустимые объемы выборок, вероятности ошибок и соотношения  $\Theta_{rl}$  между параметрами законов распределения  $r$ - и  $l$ -го классов. При решении многих задач в качестве критерия оптимальности синтезируемой системы распознавания целесообразно использовать [4–5] минимальный суммарный объем обучающих и контрольной выборок, необходимых для достижения заданного уровня достоверности распознавания при априорно налагаемом ограничении на нормированные на  $\sigma$  разности между неизвестными средними значениями  $a_r, r = \overline{1, K}$ , которые не должны быть меньше некоторой величины  $\Delta$ , определяемой как разрешающая способность распознающей системы:

$$\rho = m_1 + m_2 + \dots + m_K + n \rightarrow \min;$$

$$\alpha_r^{(K)} \leq \alpha_0;$$

$$\beta_r^{(K)} \leq \beta_0; \quad (6)$$

$$\Delta_{rl}^* = |a_r - a_l|/\sigma \geq \Delta, \quad r, l = \overline{1, K}, \quad r \neq l.$$

В большинстве случаев удобно и целесообразно брать  $m_1 = m_2 = \dots = m_K = m$ . При этом в (6)  $\rho = Km + n$ .

Для решения поставленной задачи оптимизации необходимо найти выражения для вероятностей ошибок распознавания  $\alpha_r^{(K)}, \beta_r^{(K)}, r = \overline{1, K}$ . Наиболее просто они получаются в случае неограниченно возрастающих объемов обучающих выборок, когда вероятности  $\alpha_r^{(K)}, \beta_r^{(K)}, \alpha_{lr}^{(K)}$  сходятся к значениям соответствующих вероятностей ошибок классификации  $\alpha_r^0, \beta_r^0, \alpha_{lr}^0$  при известных средних  $a_1, a_2, \dots, a_K$  и общей дисперсии  $\sigma^2$ . Полагая без ограничения общности  $-\infty = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_K < a_{K+1} = \infty$ , имеем решение  $\gamma_l$  о том, что  $\{x_i\}_1^n \in s_l$  принимается только в том слу-

чае, когда случайная величина  $z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  удовлетворяет условию

$$(a_l + a_{l-1})/2 \leq z \leq (a_l + a_{l+1})/2,$$

а вероятность ошибки классификации  $\alpha_{lj}^0$ , согласно [7], вычисляется по формуле

$$\alpha_{lj}^0 = F \left[ \frac{a_l + a_{l+1} - 2a_j}{2\sigma} \sqrt{n} \right] - F \left[ \frac{a_l + a_{l-1} - 2a_j}{2\sigma} \sqrt{n} \right]$$

для всех  $l, j = \overline{1, K}$ ,



Теперь система неравенств (8) может быть записана в виде

$$\begin{cases} y_1 y_{k_1+1} < 0; \\ y_r (y_{k_1+1} - y_1 + y_r) < 0, \quad r = \overline{2, k_1}. \end{cases} \quad (9)$$

Множество точек  $(k_1 + 1)$ -мерного евклидова пространства, удовлетворяющих системе (9), может быть представлено в виде двух подмножеств:

$$\begin{cases} y_1 < 0; \\ y_{k_1+1} > 0; \\ 0 < -y_r < y_{k_1+1} - y_1; \\ r = \overline{2, k_1} \end{cases} \quad \text{И} \quad \begin{cases} y_1 > 0; \\ y_{k_1+1} < 0; \\ y_{k_1+1} - y_1 < -y_r < 0; \\ r = \overline{2, k_1}, \end{cases}$$

а вероятность  $P_{r_1 r_2, \dots, r_{k_1} s_l}$  того, что выборка  $\{x_i\}_1^n \in s_l$  и оценки средних  $\widehat{a}_{r_1}, \widehat{a}_{r_2}, \dots, \widehat{a}_{r_{k_1}}$  удовлетворяют системе неравенств (8), может быть вычислена по формуле

$$\begin{aligned} P_{r_1 r_2, \dots, r_{k_1} s_l} &= \int_0^\infty dy_1 \int_{-\infty}^0 dy_{k_1+1} \int_0^{-y_{k_1+1}+y_1} dy_2 \dots \int_0^{-y_{k_1+1}+y_1} w(y) dy_{k_1} + \\ &+ \int_{-\infty}^0 dy_1 \int_0^\infty dy_{k_1+1} \int_{-y_{k_1+1}+y_1}^0 dy_2 \dots \int_{-y_{k_1+1}+y_1}^0 w(y) dy, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{где } w(y) = [(2\pi)^{k_1+1} \det M_y]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y - a_y)^T M_y^{-1} (y - a_y) \right\}.$$

При  $k_1 = 1$  система (9) состоит из одного неравенства

$$G_{r_1 l} = (\widehat{a}_l - \widehat{a}_{r_1}) (z - \widehat{a}_{r_1} - \widehat{a}_l) < 0.$$

В этом случае  $P_{r_1 s_l} = \alpha_{r_1 l}^{(2)}$  — вероятность ошибки двухальтернативного распознавания классов  $s_{r_1}$  и  $s_l$ , выражение для которой получено в [1]:

$$\alpha_{r_1 l}^{(2)} = F \left[ \frac{\Delta_{lr_1}}{\sqrt{1+\tau}} \right] F \left[ -\frac{\Delta_{lr_1}}{\sqrt{2}} \right] + F \left[ -\frac{\Delta_{lr_1}}{\sqrt{1+\tau}} \right] F \left[ \frac{\Delta_{lr_1}}{\sqrt{2}} \right]. \quad (11)$$

При  $k_1 = 2$  имеем

$$\begin{aligned} P_{r_1 r_2 s_l} &= \int_{-\infty}^0 dy_3 \int_0^\infty dy_1 \int_0^{y_1-y_3} w(y_1, y_2, y_3) dy_2 + \int_0^\infty dy_3 \int_{-\infty}^0 dy_1 \int_{y_1-y_3}^0 \times \\ &\times w(y_1, y_2, y_3) dy_2 = \int_0^\infty dy_1 \int_{-\infty}^\infty dy_3 \int_0^{y_1-y_3} w(y_1, y_2, y_3) dy_2 - \int_0^\infty dy_3 \int_{-\infty}^\infty \times \\ &\times dy_1 \int_0^{y_1-y_3} w(y_1, y_2, y_3) dy_2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{где } w(y_1, y_2, y_3) &= [(2\pi)^3 (3\tau + 1)]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2(3\tau + 1)} [(2\tau + 1)(y_1 - \Delta_{lr_1})^2 + \right. \\ &+ (2\tau + 2)(y_2 - \Delta_{lr_2})^2 + 3(y_3 - \Delta_{lr_1})^2 - 2(\tau + 1)(y_1 - \Delta_{lr_1})(y_2 - \Delta_{lr_2}) - \\ &\left. - 2(y_1 - \Delta_{lr_1})(y_3 - \Delta_{lr_1}) + 4(y_2 - \Delta_{lr_2})(y_3 - \Delta_{lr_1}) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Выделяя в выражении (13) полный квадрат по  $y_2 - \Delta_{lr_2}$ , выполняем в (12) интегрирование по  $y_2$ , а затем, используя доказанное в прило-

жении равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-x^2/2\} F(ax+b) dx = F\left(\frac{b}{\sqrt{1+a^2}}\right),$$

находим после несложных преобразований

$$P_{r_1 r_2 s_l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f_1(z) dz, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{где } f_1(z) = & \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z - \frac{\Delta_{lr_1}}{\sqrt{\tau+1}}\right)^2\right\} \left\{F\left[\frac{1}{\sqrt{2\tau+1}}\left(z - \frac{\Delta_{lr_1}}{\sqrt{\tau+1}} - \right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left.- \sqrt{\tau+1} \Delta_{lr_2}\right)\right] - F\left[-\frac{\tau}{\sqrt{2\tau+1}}\left(z - \frac{\Delta_{lr_1}}{\sqrt{\tau+1}} + \frac{\sqrt{\tau+1}}{\tau} \Delta_{lr_2}\right)\right]\right\} + \\ & + \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z - \frac{\Delta_{lr_1}}{\sqrt{2}}\right)^2\right\} \left\{F\left[\frac{1}{\sqrt{2\tau+1}}\left(z - \frac{\Delta_{lr_1}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \Delta_{lr_2}\right)\right] - \right. \\ & \left. - F\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(z - \frac{\Delta_{lr_1}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \Delta_{lr_2}\right)\right]\right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Полученное выражение позволяет вычислить вероятности ошибок распознавания  $\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}$  в задаче трехальтернативного распознавания ( $K=3$ ) по формуле

$$\alpha_l^{(3)} = \alpha_{r_1 l}^{(2)} + \alpha_{r_2 l}^{(2)} - P_{r_1 r_2 s_l},$$

$$l, r_1, r_2 = \overline{1, 3}, l \neq r_1, l \neq r_2, r_1 \neq r_2,$$

при вычислении вероятности  $\alpha_{r_1 l}^{(2)}$  и  $\alpha_{r_2 l}^{(2)}$  по формуле (14), а  $P_{r_1 r_2 s_l}$  по формулам (14) и (15). Однако уже при  $k_1=4$  существенного упрощения выражения (10) для  $P_{r_1 r_2 r_3 s_l}$  добиться не удастся.

Аналогичные трудности возникают и при вычислении вероятностей ошибок распознавания  $\beta_l^{(K)}$ ,  $l = \overline{1, K}$ . Нетрудно, однако, получить соотношение, значительно облегчающее в большинстве случаев решение задачи оптимизации (6). Поскольку

$$\alpha_{ij}^{(K)} = \Pr\left\{\bigcap_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^K A_{lr} | s_j\right\} \leq \Pr\{A_{lj} | s_j\} = \alpha_{ij}^{(2)},$$

$$\text{то } \beta_l^{(K)} = [1/(K-1)] \sum_{\substack{r=1, \\ r \neq l}}^K \alpha_{lr}^{(K)} \leq \max_{1 \leq r \leq K, r \neq l} \alpha_{lr}^{(2)}.$$

Кроме того, очевидно,  $\alpha_j^{(K)} \geq \alpha_{ij}^{(2)}$  для всех  $j, l = \overline{1, K}, j \neq l$ , и, следовательно,  $\alpha_j^{(K)} \geq \max_{1 \leq l \leq K} \alpha_{ij}^{(2)}$ .

Из полученных неравенств следует, что для любого класса  $s_l$  всегда существует класс  $s_j$  такой, что  $\beta_l^{(K)} \leq \alpha_j^{(K)}$ . Последнее соотношение позволяет полностью исключить из рассмотрения при решении задачи оптимизации (6) вероятности ошибок распознавания  $\beta_l^{(K)}$ ,  $l = \overline{1, K}$ , в тех случаях, когда  $\beta_0 \geq \alpha_0$ . Исходя из принципа гарантированной достоверности, состоящего в том, что ограничения на вероятности ошибок распознавания  $\alpha_l^{(K)}$  и  $\beta_l^{(K)}$ ,  $l = \overline{1, K}$ , должны выполняться при любых значениях величин  $\Delta_{lr}$ , согласованных с разрешающей способностью распознающей системы, при решении задачи оптимизации (6) необходимо полагать  $\Delta_{l+1, l}^* = \Delta$  для всех  $l = \overline{1, K-1}$ . Очевидно, в этом случае

$$\max_{1 \leq l \leq K} \alpha_l^{(K)} = \alpha_{\lfloor \frac{K}{2} \rfloor + 1}^{(K)},$$

где  $\lfloor t \rfloor$  — целая часть  $t$ .

Итак, с учетом всех сделанных выводов задачу оптимизации (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho &= Km + n \rightarrow \min; \\ \alpha_{\left[\frac{K}{2}\right]+1}^{(K)}(K, m, n, \Delta) &\leq \alpha_0; \\ \Delta_{l+1, l}^* &= \Delta, \quad l = \overline{1, K-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

В частности, при  $K=3$  имеем

$$\begin{aligned} \rho &= 3m + n \rightarrow \min; \\ \alpha_2^{(3)} &= \alpha_{12}^{(2)} + \alpha_{32}^{(2)} - P_{13s_2} \leq \alpha_0. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{причем } \alpha_{12}^{(2)} = \alpha_{32}^{(2)} &= F\left(\frac{\Delta\sqrt{m}}{\sqrt{1+\tau}}\right) F\left(-\frac{\Delta\sqrt{m}}{\sqrt{2}}\right) + F\left(-\Delta\sqrt{\frac{m}{1+\tau}}\right) \times \\ &\times F\left(\Delta\sqrt{\frac{m}{2}}\right), \end{aligned}$$

а  $P_{13s_2}$  вычисляется по формулам (14) и (15), в которых  $\Delta_{r_1 l} = -\Delta\sqrt{m}$ ,  $\Delta_{r_2 l} = \Delta\sqrt{m}$ . При каждом конкретном значении величины разрешающей способности  $\Delta$  задача оптимизации (17) может быть решена стандартными методами целочисленного программирования [8]. Однако для нее может быть получен и более общий результат. Умножим в (17) критерий  $\rho$  на положительное число  $\Delta$  и перейдем от дискретных переменных  $m$  и  $n$  к непрерывным  $x = m\Delta^2$  и  $y = n\Delta^2$ . Рассмотрим задачу оптимизации

$$\begin{aligned} \rho &= 3x + y \rightarrow \min; \\ 2F\left(\sqrt{\frac{x}{\psi}}\right) F\left(-\sqrt{\frac{x}{2}}\right) &+ 2F\left(-\sqrt{\frac{x}{\psi}}\right) F\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x, y, z) dz = \alpha_0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{где } f(x, y, z) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z + \sqrt{\frac{x}{\psi}}\right)^2\right\} \left\{ F\left[\frac{1}{\sqrt{2\psi-1}}\left(z + \sqrt{\frac{x}{\psi}} - \sqrt{x\psi}\right)\right] - \right. \\ &- F\left[-\frac{\psi-1}{\sqrt{2\psi-1}}\left(z + \sqrt{\frac{x}{\psi}} + \frac{\sqrt{x\psi}}{\psi-1}\right)\right] \left. \right\} + \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z - \sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2\right\} \times \\ &\times \left\{ F\left[\frac{1}{\sqrt{2\psi-1}}\left(z + \sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x}\right)\right] - F\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(z + \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{2x}\right)\right] \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\psi = 2 + 4x/y.$$

Очевидно, что с достаточной для практических применений точностью в качестве решения  $m^*$ ,  $n^*$ -задачи оптимизации (17) можно принять при каждом конкретном значении  $\Delta$  величины

$$m^* = [x_0/\Delta^2] + 1, \quad n^* = [y_0/\Delta^2] + 1, \quad (20)$$

где  $x_0, y_0$  — решение задачи оптимизации (18).

Приведем оптимальные значения  $x_0, y_0, \rho_0$  для задачи трехальтернативного распознавания ( $K=3$ ) при требованиях к достоверности распознавания  $1 - \alpha_0 = 0-0,999$ :

$1 - \alpha_0$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,999
$x_0$	400	361	531	764	1155	1214	1281	1357	1445	1548	1675	1844	2 083	2 495
$y_0$	400	688	999	1462	2334	2476	2635	2821	3036	3302	3632	4059	4 683	5 804
$\rho_0$	400	1771	2592	3754	5799	6118	6478	6892	7371	7946	8657	9591	10 932	13 289

При  $K > 3$  точное решение задачи оптимизации (16) затруднено ввиду сложности вычисления вероятности ошибки распознавания

$$\alpha_{\left[\frac{K}{2}\right]+1}^{(K)}(K, m, n, \Delta) = \alpha_l^{(K)}.$$

Приближенное решение задачи (16) можно получить, воспользовавшись очевидным соотношением

$$\alpha_i^{(3)} \leq \alpha_i^{(K)} \leq \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^K \alpha_{ri}^{(2)}, \quad (21)$$

где  $\alpha_i^{(3)}$  — вероятность ошибки трехальтернативного распознавания классов  $s_i, s_{i-1}, s_{i+1}$ . В силу условия  $\Delta_{i+1,l}^* = \Delta$  классы  $s_1, s_2, \dots, s_{i-2}, s_{i+2}, \dots, s_K$  удалены от класса  $s_i$  существенно дальше классов  $s_{i-1}$  и  $s_{i+1}$ , их вклад в вероятность ошибки  $\alpha_i^{(K)}$  значительно ниже и, следовательно, можно положить

$$\alpha_i^{(K)} \approx \alpha_i^{(3)}. \quad (22)$$

Более того, поскольку повышение достоверности распознавания  $1 - \alpha_0$  при постоянном  $\Delta$  может быть обеспечено только за счет увеличения  $m$  и  $n$ , а асимптотическое значение  $\alpha_i^0$  вероятности ошибки  $\alpha_i^{(K)}$ , как было установлено выше, определяется только классами  $s_{i-1}$  и  $s_{i+1}$ , то с ростом  $1 - \alpha_0$  точность приближенной формулы (22) возрастает.

Таким образом, задачу оптимизации (16) можно аппроксимировать задачей

$$\begin{aligned} Km + n &\rightarrow \min; \\ \alpha_i^{(3)}(m, n, \Delta) &\leq \alpha_0 \end{aligned} \quad (23)$$

и получить для дискретной задачи (23) непрерывный аналог

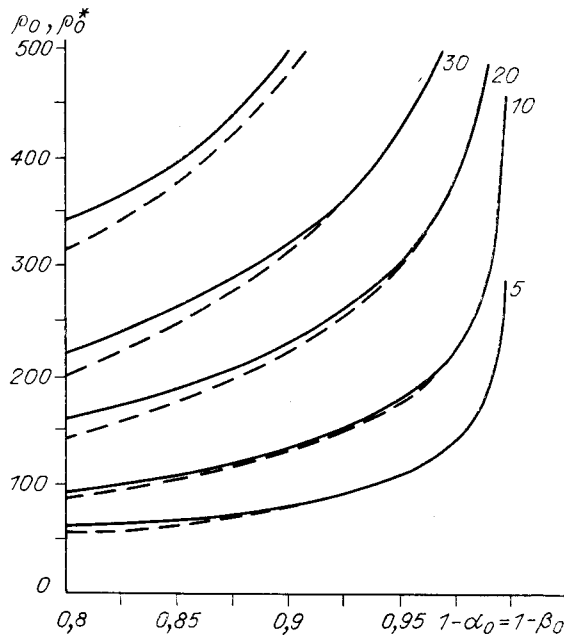
$$\begin{aligned} \rho_1 = Kx + y &\rightarrow \min; \\ 2F\left(\sqrt{\frac{x}{\psi}}\right)F\left(-\sqrt{\frac{x}{2}}\right) + 2F\left(-\sqrt{\frac{x}{\psi}}\right)F\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x, y, z) dz &= \alpha_0, \end{aligned} \quad (24)$$

где функции  $f(z, x, y)$  и  $\psi$  вычисляются по формулам (19), а решение  $m^*, n^*$ -задачи оптимизации (23) при каждом конкретном  $\Delta$  вычисляется через решение  $x_0, y_0$ -задачи оптимизации (24) по формулам (20).

Оптимальные значения  $x_0, y_0, \rho_0$  для задачи (23) при  $1 - \alpha_0 = 0,9 - 0,99$  и  $K = 5, 10, 15, 20, 30, 50$  приведены в таблице.

Оценить точность, с которой решение задачи (23) приближает точное решение задачи оптимизации (16), можно, в частности, рассмотреть еще одну задачу оптимизации, которая получается из задачи (16), если в ней заменить  $\alpha_i^{(K)} \left[ \frac{K}{2} \right] + 1$  соответствующей верхней оценкой из соотношения (21). Такая задача оптимизации в непрерывных переменных записывается в виде

$$\begin{aligned} \rho_1 = Kx + y &\rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^{K_0} \varphi_i [F(i\sqrt{x/\psi})F(-i\sqrt{x/2}) + & \\ + F(-i\sqrt{x/\psi})F(i\sqrt{x/2})], & \end{aligned} \quad (25)$$





1- $\alpha_0$	K = 5			K = 10			K = 20			K = 30			K = 50		
	$x_0$ 100	$y_0$ 100	$\rho_0$ 100	$x_0$ 100	$y_0$ 100	$\rho_0$ 100	$x_0$ 100	$y_0$ 100	$\rho_0$ 100	$x_0$ 100	$y_0$ 100	$\rho_0$ 100	$x_0$ 100	$y_0$ 100	$\rho_0$ 100
0,80	699	1 712	5 207	634	2 176	8 516	587	2 836	14 576	566	3 343	20 324	566	3 343	20 324
0,90	1060	2 704	8 004	962	3 395	13 015	892	4 379	22 219	862	5 434	30 956	862	5 434	30 956
0,91	1114	2 867	8 437	1012	3 590	13 710	939	4 623	23 403	907	5 417	32 626	907	5 417	32 626
0,92	1175	3 048	8 923	1067	3 811	14 481	991	4 897	24 717	957	5 738	34 447	957	5 738	34 447
0,93	1245	3 257	9 482	1131	4 065	15 375	1050	5 214	26 214	1013	6 103	36 497	1013	6 103	36 497
0,94	1325	3 503	10 128	1204	4 362	16 402	1117	5 587	27 927	1079	6 531	38 908	1079	6 531	38 908
0,95	1421	3 798	10 903	1291	4 720	17 630	1198	6 036	29 996	1157	7 036	41 748	1157	7 036	41 748
0,96	1538	4 169	11 859	1396	5 137	19 133	1297	6 592	32 532	1251	7 722	45 259	1251	7 722	45 259
0,97	1690	4 655	13 105	1535	5 157	21 107	1425	7 320	35 820	1376	8 527	49 800	1376	8 527	49 800
0,98	1911	5 349	14 904	1732	6 605	23 925	1605	8 394	40 494	1550	9 758	56 251	1550	9 758	56 251
0,99	2288	6 604	18 044	2074	8 085	28 825	1914	10 368	48 648	1854	11 868	67 484	1854	11 868	67 484
0,999	3716	10 361	28 941	3313	12 684	45 814	3049	16 267	77 247	2907	18 620	105 839	2907	18 620	105 839

где  $K_0 = \left[ \frac{K}{2} \right]$ ,  $\psi = 2 + 4x/y$ ,  $\varphi(i) =$   
 $= \begin{cases} 1, & \text{если } i = K_0, K = 2j, j = 2, 3, \dots; \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

При  $\alpha_0 = 0,9$  значения  $\rho_0$  и  $\rho_0^*$  практически не отличаются друг от друга. Таким образом, с достаточной для практических приложений точностью решение задачи оптимизации (23) в наиболее важной области  $1 - \alpha_0 \geq 0,9$  принимается в качестве решения задачи оптимизации (16).

Полученные результаты позволяют найти оптимальные объемы выборок  $m$  и  $n$  при синтезе систем распознавания  $K$  нормальных совокупностей с неизвестными общей дисперсией  $\sigma^2$  и средними значениями  $a_j$ ,  $j = \overline{1, K}$ , задавшись только значениями параметров  $K$ ,  $\alpha_0$  и  $\Delta$  по таблице, выводам и формулам (20), а при отсутствии соответствующих значений  $K$  и  $\alpha_0$  в выводах и таблице, решив задачу оптимизации (23) и воспользовавшись формулами (20).

Рассмотрим в качестве примера обобщение на случай  $K$  сигналов приведенной в [1] задачи оптимизации системы распознавания двух стохастических нормальных случайных сигналов. Пусть сигналы  $s_j(t)$ ,  $j = \overline{1, K}$ , характеризующиеся неизвестными средними  $a_{c_j}$  и общей дисперсией  $\sigma_c^2$ , распознаются на фоне аддитивного независимого от них нормального шума  $\xi(t)$  с нулевым средним и интенсивностью  $\sigma_{ш}$ . Для определения оптимальных объемов выборок  $m^*$  и  $n^*$  необходимо зафиксировать число  $K$  распознаваемых сигналов, требуемую достоверность распознавания  $1 - \alpha_0$  и величину

$$\Delta = \min_{l,r} \frac{|a_l - a_r|}{\sqrt{\sigma_c^2 + \sigma_{ш}^2}}$$

Если, как и в [1], на фоне шума с единичной дисперсией распознается сигнал с той же дисперсией и средними значениями, отличающимися на 0,5, то  $\Delta = 1/2\sqrt{2}$ . Пусть теперь требуется синтезировать оптимальную систему распознавания пяти сигналов, в кото-

рой вероятности любых ошибок распознавания не должны превышать 0,1. По таблице при  $K=5$  и  $1-\alpha_0=0,9$  находим  $x_0=10,6$ ,  $y_0=27,04$  и по формуле (20) определяем оптимальные значения  $m^*=4$ ,  $n^*=10$  параметров интересующей нас системы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим интеграл

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} F(ax+b) dx.$$

Полагая  $\tilde{y} = ax/\sqrt{2}$  и  $y = -\tilde{y}$ , нетрудно найти, что

$$J = \frac{1}{2|a|\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-y^2/2\} [F(y\sqrt{2}+b) + F(-y\sqrt{2}+b)] dy.$$

Поскольку при любом  $t$  согласно [9] функция  $F(t)$  может быть разложена в ряд по  $t$ , выражение

$$J = \frac{1}{2} [F(b+y\sqrt{2}) + F(b-y\sqrt{2})]$$

преобразуется к виду

$$J_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b^{2j-1}}{2^{2j-1}(2j-1)!} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{(k-1)!(2k-2j)!} y^{2k-2j}.$$

Учитывая далее, что

$$\begin{aligned} \frac{(2k-2)!}{(2k-2j)!} y^{2k-2j} &= \frac{\partial^{2j-2}}{\partial y^{2j-2}} y^{2k-2}; \\ \frac{\partial^{2j-2}}{\partial y^{2j-2}} y^{2k-2} &= 0 \quad \text{при } k < j \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} y^{2k-2}}{(k-1)!} = \exp\{-y^2\},$$

а  $\exp\{-y^2\} \frac{\partial^{2j-2}}{\partial y^{2j-2}} (\exp\{-y^2\}) = H_{2j-2}(y)$  — полином Эрмита, получаем

$$J_1 = \frac{1}{2} + \frac{\exp\{-y^2\}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b^{2j-1}}{2^{j-1}(2j-1)!} H_{2j-2}(y).$$

И наконец, зная [9], что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(1+a^{-2})y^2\} H_{2j-2}(y) dy = \sqrt{\frac{\pi}{1+a^{-2}}} \frac{(2j-2)!}{(j-1)!} \left(\frac{1}{1+a^{-2}} - 1\right)^{j-1},$$

находим

$$J = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(b/\sqrt{1+a^2})^{2j-1}}{2^{j-1}(2j-1)(j-1)!} = F\left(\frac{b}{\sqrt{1+a^2}}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} F(ax+b) dx = F\left(\frac{b}{\sqrt{1+a^2}}\right).$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фомин Я. А., Савич А. В. Оптимизация временных параметров системы распознавания одномерных нормальных совокупностей // Радиотехника.— 1984.— 39, № 11.
2. Фомин Я. А., Савич А. В. Оптимизация системы распознавания многомерных совокупностей // Радиотехника.— 1985.— 40, № 12.
3. Фомин Я. А., Тарловский Г. Р. Статистическая теория распознавания образов.— М.: Радио и связь, 1986.
4. Безродный Б. Ф., Савич А. В., Фомин Я. А. Оптимизация системы распознавания одномерных нормальных совокупностей // Автометрия.— 1987.— № 5.
5. Фомин Я. А., Савич А. В. Оптимизация системы распознавания гауссовских апсамблей с разными ковариационными матрицами // Радиотехника.— 1987.— 42, № 7.
6. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники.— М.: Радио и связь, 1989.
7. Володин И. Н. Оценки необходимого объема наблюдений в задачах статистической классификации // Теория вероятностей и ее применение.— 1977.— 22, вып. 2, 4.
8. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях.— М.: Мир, 1974.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.

*Поступила в редакцию 10 октября 1988 г.*

УДК 535.4 : 621.391

**П. В. ПОЛЯНСКИЙ**

*(Черновцы)*

### **О СОГЛАСОВАННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ ГОЛОГРАММЫ**

Одной из актуальных в приложениях особенностей голографической записи информации является возможность восстановления изображения объекта-эталона по его фрагменту. До сих пор такая возможность рассматривалась применительно к пропускающей безопорной голограмме, используемой в качестве согласованного фильтра когерентного коррелятора. Специфика традиционно обсуждаемой методики заключается в искажении координатного распределения интенсивностей в корреляционном поле вследствие того, что на фантомное изображение считывающей части объекта (первый дифракционный порядок) наложено поле этой же части, прошедшее сквозь голограмму без рассеяния (нулевой порядок). Распределение яркостей в выходной плоскости коррелятора определяется соотношением амплитуд и фаз компонентов изображающего поля нулевого и первого порядков. В большинстве случаев фантомное изображение отсутствующего фрагмента объекта характеризуется значительно меньшей яркостью, чем изображение считывающей части, так что для фоторегистрации выходного сигнала его составляющую, соответствующую считываемому фрагменту, приходится ослаблять с помощью фильтров [1]. Лишь в случае негативной записи возможно иное распределение интенсивностей, причем правильная яркостная тонопередача имеет место при некотором определенном соотношении размеров и амплитуд считывающей и отсутствующей частей объектной сцены [2].

Как показано в [3, 4], изображение объекта-эталона с правильной яркостной тонопередачей независимо от типа голограммы (амплитудная или фазовая) и величины считываемого фрагмента может быть получено при использовании в качестве согласованного фильтра нелинейной внеосевой голограммы. В этом случае, однако, необходимо формирование гомоцентрического опорного источника и выполнение условий максимизации яркости отклика второго порядка. В данной работе исследуем