

## МАШИННАЯ ГРАФИКА\*

УДК 681.3 : 519.6

Ю. А. ТКАЧЕВ  
(Новосибирск)

### ДВА СПОСОБА ИЗОБРАЖЕНИЯ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Введение.** Использование программ, обеспечивающих возможность визуального анализа функциональных зависимостей, т. е. программ, изображающих данные зависимости с помощью графических устройств вывода, имеет богатые традиции. Функции одной переменной принято отображать в виде графиков или, если функция задана только на некотором множестве точек, в виде столбчатых диаграмм. Если при этом выводится дополнительная информация, например расположение осей системы координат, масштаб вдоль них и т. д., то из таких изображений возможно извлечение не только качественной, но и относительно точной количественной информации. Функции двух переменных изображаются картами изолиний в виде столбчатых диаграмм с помощью семейства сечений вдоль одной из координат или в виде проекции поверхности на некоторую плоскость с удалением или без удаления невидимых линий. Возможна также комбинация первого и четвертого способов. Изображения функций двух переменных используются в основном для уяснения качественной картины поведения исследуемой функции.

К настоящему времени написано множество программ, предназначенных для изображения функций одной и двух переменных. Многие из этих программ являются диалоговыми, т. е. позволяют в оперативном режиме выбирать способ отображения анализируемой функции и задавать его параметры, что особенно важно в случае функций двух переменных.

В общем можно считать, что проблема визуального анализа функций одной и двух переменных на сегодняшний день решена.

Изложенное ни в коей мере не относится к функциям трех переменных, хотя актуальность решения данной задачи не вызывает сомнений. Это объясняется, по-видимому, отсутствием или малой распространенностью технических средств отображения. Если для анализа функций меньшей размерности достаточно монохромных векторных дисплеев или даже графопостроителей, то в случае функций трех переменных совершенно необходимо наличие многоцветных (число одновременно отображаемых цветов не меньше 256) растровых устройств высокого разрешения с возможностью выбора из палитры не менее 4000 цветов.

**Модель изображения.** Пусть в области  $\Omega \subset R^3$  задана функция  $f(x, y, z)$ ;  $f: \Omega \rightarrow R$ . Для изображения этой функции предлагается сле-

\* В предлагаемый выпуск журнала «Автоматрия» вошли в основном статьи, подготовленные на основе докладов, сделанных на Всесоюзной конференции по машинной графике (Новосибирск, 31 октября — 3 ноября 1989 г.).

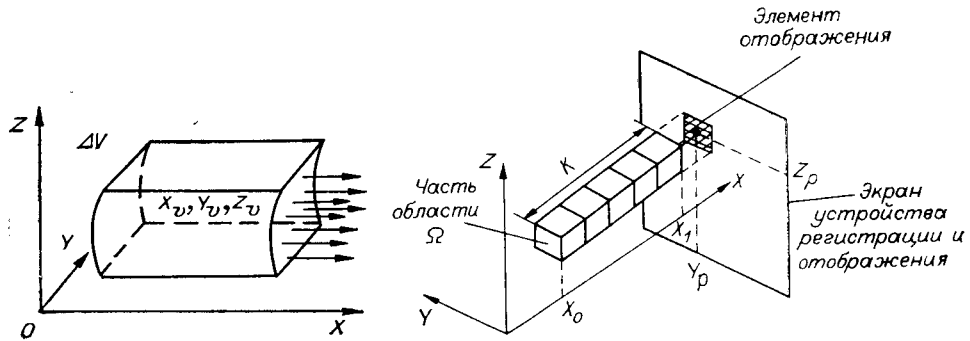


Рис. 1. Излучение частиц в объеме  $\Delta V$  Рис. 2. Часть области  $\Omega$ , воздействующая на один элемент отображения

дующая модель. Область  $\Omega$  заполнена средой, обладающей следующими свойствами:

1. За единицу времени в малом объеме  $\Delta V \subset \Omega$  рождается  $R |\Delta V|$  частиц, имеющих одинаковую по модулю (в силу малости объема  $\Delta V$ ) скорость  $v = \Lambda(f(x_v, y_v, z_v))$ ,  $(x_v, y_v, z_v) \in \Delta V$ ;  $\Lambda: R \rightarrow R$  — заданная функция. Направление скорости совпадает с направлением оси  $Ox$  некоторой системы координат (рис. 1). Заметим, что от положения  $\Delta V$  зависит только скорость вылетающих частиц и не зависит их количество.

2. Движущиеся частицы могут поглощаться средой, а именно: если через грань  $\Delta S$  объема  $\Delta V = \Delta S \Delta X$  прошло  $N$  частиц, имеющих скорость  $v_1$ , то из них в этом объеме поглотится  $NP(v_1, v_v) \Delta X$  частиц, где  $v_v = \Lambda(f(x_v, y_v, z_v))$ ,  $(x_v, y_v, z_v) \in \Delta V$ ;  $P: R^2 \rightarrow R$  — заданная функция (коэффициент поглощения).

Рожденные в области  $\Omega$  и вышедшие за ее пределы частицы попадают в устройство регистрации и отображения, которое представляет собой плоский экран, составленный из независимых элементов отображения. Каждый элемент отображения имеет площадь  $\Delta S$  и под воздействием попадающих на него частиц приобретает цвет  $\lambda$  и яркость  $J$  в соответствии с формулами

$$J = C_1 (\sum n_i / \Delta S);$$

$$\lambda = C_2 (\sum n_i v_i / \sum n_i),$$

где  $n_i$  — число частиц, имеющих скорость  $v_i$  и попавших на этот элемент отображения за единицу времени. Константы  $C_1$  и  $C_2$  служат для согласования размерностей.

Определим зависимость цвета и яркости элемента отображения от функций  $f$ ,  $\Lambda$  и  $P$ . Для этого рассмотрим ту часть области  $\Omega$ , проекция которой вдоль оси  $Ox$  на экран устройства регистрации совпадает с элементом отображения (рис. 2). Пусть  $\Delta S$  — площадь элемента отображения,  $(y_p, z_p)$  — координаты его центра.

Разобьем интересующую нас часть области  $\Omega$  вдоль оси  $Ox$  на  $K$  равных блоков объемом  $\Delta S \Delta X$ ;  $\Delta X = (x_1 - x_0) / K$ . Полагая, что в  $i$ -м блоке рождаются частицы, имеющие скорость  $v_i = \Lambda(f(x_0 + \Delta x / 2 + (i-1)\Delta x, y_p, z_p))$ , подсчитаем число частиц  $n$ , дошедших до элемента отображения (ЭО):

$$n = \sum_{i=1}^K n_i,$$

где  $n_i$  — число частиц, рожденных в  $i$ -м блоке и дошедших до ЭО. Видно, что

$$n_1 = R \Delta S \Delta X (1 - P(v_1, v_2) \Delta X) (1 - P(v_1, v_3) \Delta X) \times \dots$$

$$\dots \times (1 - P(v_1, v_K) \Delta X);$$

$$n_2 = R \Delta S \Delta X (1 - P(v_2, v_3) \Delta X) \times \dots \times (1 - P(v_2, v_K) \Delta X);$$

$$\vdots$$

$$n_K = R \Delta S \Delta X.$$

Таким образом, яркость  $J$  и цвет  $\lambda$  элемента отображения определяются по формулам

$$J = C_1 \sum_{i=1}^K R \Delta X_i \prod_{j=1}^K (1 - P(v_i, v_j) \Delta X_j);$$

$$J = C_1 R \int_{x_0}^{x_1} \exp \left[ - \int_q^{x_1} P(\Lambda[f(q, y_P, z_P)], \Lambda[f(x, y_P, z_P)]) dx \right] dq; \quad (1)$$

$$\lambda = C_3 \frac{R \int_{x_0}^{x_1} \Lambda[f(q, y_P, z_P)] \exp \left[ - \int_q^{x_1} P(\Lambda[f(q, y_P, z_P)], \Lambda[f(x, y_P, z_P)]) dx \right] dq}{J}.$$

Переобозначив

$$L(x) = \Lambda(f(x, y_P, z_P));$$

$$Q(x_1, x_2) = P(\Lambda[f(x_1, y_P, z_P)], \Lambda[f(x_2, y_P, z_P)]),$$

формулы (1) можно переписать в виде

$$J = C_1 R \int_{x_0}^{x_1} \exp \left[ - \int_q^{x_1} Q(q, x) dx \right] dq;$$

$$R \int_{x_0}^{x_1} L(q) \exp \left[ - \int_q^{x_1} Q(q, x) dx \right] dq$$

$$\lambda = C_3 \frac{\quad}{J}. \quad (2)$$

К сожалению, непосредственное использование формул (2) в настоящее время не представляется возможным, так как уже при растре  $300 \times 300$  элементов отображения для построения всего изображения требуется совершить около 4 млрд (!) умножений без учета затрат на вычисление значений функций  $f$ ,  $\Lambda$ ,  $P$  в каждой из 2,7 млн точек.

Учитывая изложенное, предлагается изображать функцию  $f(x, y, z)$  в виде набора поверхностей одинакового уровня  $f(x, y, z) = f_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Будем считать, что на малом участке  $\Delta S$  поверхности уровня  $f_i$  за единицу времени рождается  $R|\Delta S| \cos(\alpha)$  частиц, имеющих скорость  $v_i = \Lambda(f_i)$  и движущихся в направлении  $\mathbf{m}$  (рис. 3),  $\alpha$  — угол между вектором нормали  $\mathbf{n}$  к  $\Delta S$  и направлением движения частиц. Таким образом, наибольшее число частиц, рождающихся на участке  $\Delta S$ , движется по нормали к участку, и их число уменьшается с ростом угла вылета относительно нормали к участку.

Кроме того, как и раньше, предполагается, что наряду с излучением частиц имеет место и их поглощение, а именно: из  $N$  частиц, имеющих скорость  $v_i$ , на поверхности  $f_j$  поглощаются  $NP(v_i, v_j)$  частиц.

Как и раньше,  $\Lambda: R \rightarrow R$  и  $P: R^2 \rightarrow R$  — заданные функции.

Как и раньше, движущиеся частицы попадают на экран устройства регистрации и отображения, причем регистриру-

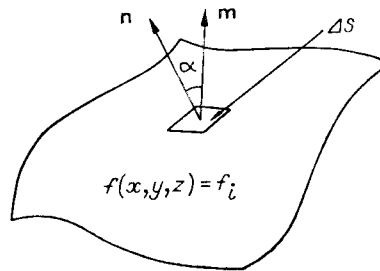


Рис. 3. Излучение частиц с поверхности

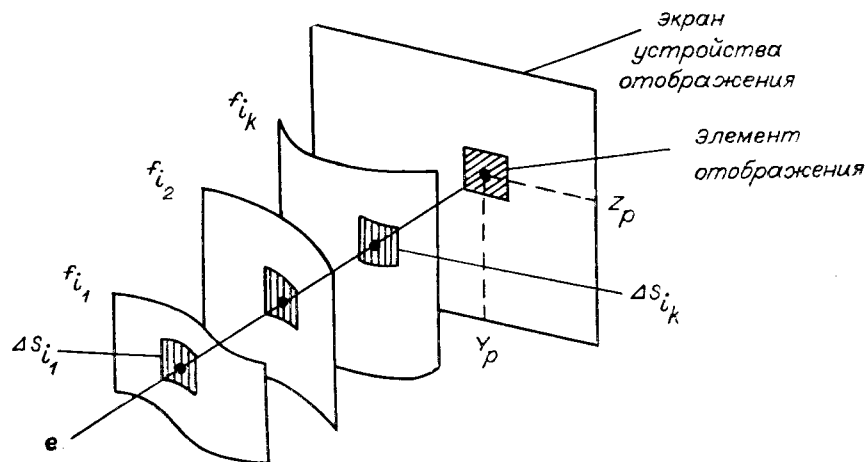


Рис. 4. Участки поверхности, воздействующие на один элемент отображения

ются только те частицы, вектор скорости которых перпендикулярен плоскости экрана.

Пусть луч  $e$ , перпендикулярный плоскости экрана и проходящий через центр элемента отображения  $(y_p, z_p)$ , пересекает поверхности  $f_{i_1}, \dots, f_{i_k}$  в точках  $(x_{i_j}, y_{i_j}, z_{i_j})$ ,  $j = 1, \dots, k$  (рис. 4). Обозначим через  $\Delta S_{i_j}$  часть поверхности уровня  $f_{i_j}$ , проекция которой на экранную плоскость вдоль  $e$  совпадает с рассматриваемым элементом отображения. В силу малости размеров ЭО можно считать, что

$$|\Delta S_{i_j}| = \frac{|\Delta S|}{\cos(\alpha)},$$

где  $|\Delta S|$  — площадь ЭО;  $\alpha$  — угол между  $e$  и вектором нормали к поверхности  $f_{i_j}$  в точке  $(x_{i_j}, y_{i_j}, z_{i_j})$ .

Таким образом, яркость  $J$  и цвет  $\lambda$  элемента отображения определяются по формулам

$$J = C_1 \sum_{i=1}^K R \prod_{j=i+1}^K (1 - P(v_i, v_j));$$

$$\lambda = \left[ C_3 \sum_{i=1}^K v_i R \prod_{j=i+1}^K (1 - P(v_i, v_j)) \right] J,$$

где  $v_m = \Lambda(f_{i_m})$ .

**Заключение.** На основе второй модели изображения предполагается разработать диалоговую программу анализа трехмерных скалярных функций, которая будет позволять в оперативном режиме задавать функции  $\Lambda$ ,  $P$ , менять набор изображаемых поверхностей уровня, ракурс и другие параметры изображения.

Поступила в редакцию 17 января 1990 г.