

Поступила в редакцию 26 октября 1989 г.

УДК 535.317.1

Е. И. ТОЛКОВА

(Горький)

УСЛОВИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ СЛАБОСВЕТЯЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА МЕТОДОМ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ НА ЗРАЧКЕ

При наземном наблюдении удаленного оптического источника возникает задача построения его изображения, свободного от искажений, вносимых атмосферой в проходящую световую волну. Существуют две группы методов восстановления изображения, одни из которых оперируют спекл-структурами в плоскости изображения (спекл-интерферометрия), другие — интерференционными картинками, локализованными на зрачке [1]. Применение последних основывается на известной теореме Ван Циттерта — Цернике, согласно которой поперечная комплексная функция когерентности (КФК) поля $E(\mathbf{r}, t)$ с волновым числом k , определяемая как

$$\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = E\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \bar{E}\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right),$$

является фурье-спектром интенсивности $O(\beta)$ в плоскости пространственно-некогерентного излучателя, удаленного на расстояние L в однородной среде:

$$\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \exp\left(-ik \frac{\mathbf{R}\mathbf{r}}{L}\right) \iint O(\beta) \exp(ik\mathbf{r}\beta) d\beta.$$

Для построения КФК был предложен прибор, называемый ниже модифицированным интерферометром Майкельсона, создающий интерференционную картину наложением двух изображений входного зрачка, повернутых относительно друг друга на 180° [2]. Интерферометр строит все фурье-компоненты изображения на частотах от 0 до D/λ , где D — диаметр телескопа, λ — длина волны излучения с единичной по модулю оптической передаточной функцией (ОПФ), тогда как модуль ОПФ спекл-интерферометрии падает с увеличением частоты и случает.

Однако интерферометрия в плоскости зрачка имеет преимущества лишь при наблюдении ярких источников. Для слабосветящегося объекта существенно то обстоятельство, что в каждую точку спекл-изображения телескоп собирает излучение с атмосферной площади когерентности Q , тогда как в точку интерференционной картины приходит излучение лишь от пары точек зрачка. Если q — площадь отсчетной «точки» в интерферограмме, то поступающая в эту точку мощность в $Q/q \gg 1$ раз ниже, а уровень фотонного шума соответственно в $\sqrt{Q/q}$ раз выше, чем в спекл-изображении. В настоящей работе произведен расчет фотонного шума в спектре объекта, построенном с помощью модифицированного интерферометра Майкельсона способом, предлагае-

мым в [3—5]. Определено пороговое число фотонов на детекторе, ниже которого восстановление спектра этим способом невозможно.

Благодаря отсутствию спекл-шума, интерферометрия на зрачке особенно удобна для восстановления углового спектра мощности объекта. Спектр мощности яркого источника может быть определен по единственной короткоэкспозиционной интерферограмме, тогда как в спекл-интерферометрии необходимо усреднить спектры большого числа кадров. Кроме того, необходимо найти средний квадрат модуля ОПФ системы атмосфера — телескоп, что представляет собой отдельную задачу [1]. В настоящей работе сравниваются отношения сигнал/шум в спектрах мощности объекта, построенных методами интерферометрии на зрачке и спекл-интерферометрии, уточняющие известные выражения [6].

1. Модифицированный интерферометр Майкельсона состоит из светоделительного кубика и двух прямоугольных призм, ориентированных под прямым углом друг к другу. Поле на выходе прибора $E_1(\mathbf{r}, t)$ складывается из полей в центрально-симметричных точках входной плоскости:

$$E_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}(E(\mathbf{r}, t) + E(-\mathbf{r}, t) \exp(i\delta)),$$

где δ — разность фазовых набегов в плечах интерферометра. Интенсивность излучения в выходной плоскости имеет вид

$$I(\mathbf{r}, t) = \frac{I_0}{2}(1 + \mu(2\mathbf{r}) \cos(\psi(\mathbf{r}, t) + \delta)), \quad (1.1)$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Theta(2\mathbf{r}) + \varphi(\mathbf{r}, t) - \varphi(-\mathbf{r}, t).$$

Здесь $I_0 = |E(\mathbf{r}, t)|^2$ — интенсивность принимаемого излучения; $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — атмосферные флуктуации фазы световой волны в точке \mathbf{r} приемной апертуры; μ и Θ — модуль и фаза неискаженного нормированного спектра объекта:

$$\mu(\mathbf{f}) \exp(i\Theta(\mathbf{f})) = \iint O(\boldsymbol{\beta}) \exp(i2\pi\mathbf{f}\boldsymbol{\beta}) d\boldsymbol{\beta} / \iint O(\boldsymbol{\beta}) d\boldsymbol{\beta}, \quad (1.2)$$

где безразмерная частота \mathbf{f} связана с радиус-вектором \mathbf{r} в плоскости интерферограммы соотношением

$$\mathbf{f} = 2\mathbf{r}/\lambda. \quad (1.3)$$

Для определения КФК в [3—5] предлагается регистрировать за время заморозенности атмосферной турбулентности три интерферограммы с распределениями интенсивности I_1, I_2, I_3 при значениях δ , равных 0, π , $\pi/2$. Реальная и мнимая части мгновенного искаженного спектра определяются по этим данным формулами

$$\begin{aligned} \mu_r &= \mu \cos \psi = (I_1(\mathbf{r}, t) - I_2(\mathbf{r}, t)) / (I_1 + I_2), \\ \mu_i &= \mu \sin \psi = (2I_3(\mathbf{r}, t) - I_1(\mathbf{r}, t) - I_2(\mathbf{r}, t)) / (I_1 + I_2), \end{aligned} \quad (1.4)$$

откуда легко найти угловой спектр мощности $\mu^2 = \mu_r^2 + \mu_i^2$ и мгновенную фазу ψ , усреднением которой по ансамблю искаженных интерферограмм определяется фаза спектра $\Theta(2\mathbf{r})$. Ограничения на восстановление КФК, накладываемые 2π -неоднозначностью определения фазы ψ при условии точного определения μ_r и μ_i по каждой тройке кадров, были рассмотрены в [5].

2. Учтем наличие фотонных шумов при регистрации интерференционных картин. Пусть $N_0 = I_0 \Delta t / e$ — среднее число фотонов, поступающих на единицу площади приемной апертуры за время экспозиции Δt , где e — энергия фотона; N_1, N_2, N_3 — числа фотонов, поступающих на фотоприемник за время экспозиции при трех значениях δ , перечисленных выше. Числа $N_{1,2,3}$ представляют собой пуассоновские случайные величины со следующими средними значениями:

$$\langle N_1 \rangle = a(1 + \mu_r), \quad \langle N_2 \rangle = a(1 - \mu_r), \quad \langle N_3 \rangle = a(1 + \mu_i),$$

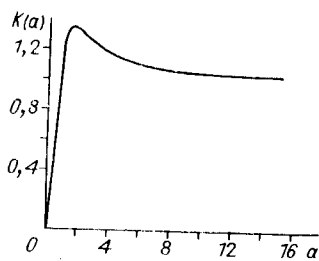


Рис. 1

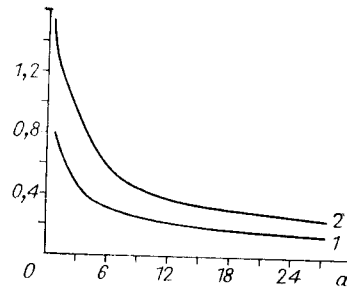


Рис. 2

$a = N_0 q / 2$ — среднее число фотонов на один фотоприемник. Следуя формулам (1.4), запишем оценки для реальной и мнимой частей мгновенного спектра μ_r и μ_i в виде

$$\lambda_r = (N_1 - N_2) / (N_1 + N_2),$$

$$\lambda_i = (2N_3 - N_1 - N_2) / (N_1 + N_2).$$

Из обработки исключаются тройки кадров, для которых в соответствующем отсчете в первой и второй экспозициях не зарегистрировано ни одного фотона: $N_1 = N_2 = 0$.

Можно показать, что

$$\langle \lambda_r \rangle = \mu_r,$$

$$\langle \lambda_i \rangle = \mu_i K(a) + (K(a) - 1),$$

где

$$K(a) = 2a \exp(-2a) \sum_1^{\infty} (2a)^n / n n! / (1 - \exp(-2a)).$$

График функции $K(a)$ приведен на рис. 1. С ростом числа a $K(a)$ стремится к единице, и оценка λ_i становится несмещенной. Приведем выражения для дисперсий несмещенных оценок λ_r и $\lambda_i' = (\lambda_i + 1 - K(a)) / K(a)$:

$$\sigma_r^2 = (1 - \mu_r^2) C(a),$$

$$\sigma_i^2 = (\mathcal{D}(a) - 1)(1 + \mu_i)^2 + \mathcal{D}(a)(1 + \mu_i)/a,$$

где $C(a) = 1 - 4a^2 \exp(-2a) \sum_0^{\infty} (2a)^n / (n+2)^2 n! / (1 - \exp(-2a))$;

$$\mathcal{D}(a) = 4a^2 \exp(-2a) \sum_1^{\infty} (2a)^n / n^2 n! / (1 - \exp(-2a)) K^2(a).$$

На рис. 2 приведены зависимости от числа a значений стандартов σ_r (кривая 1) и σ_i (кривая 2), достигаемых при $\mu = 0$. Разброс оценки спектра можно уменьшить, если искать величину μ_i аналогично μ_r , фиксируя четвертый кадр за время заморозки с $\delta = -\pi/2$.

В области X , определяемой неравенствами

$$|\mu_r| < \sigma_r, \quad |\mu_i| < \sigma_i,$$

фотонный шум делает фазу ψ полностью неопределенной. Для оценки необходимой интенсивности приходящего излучения потребуем, чтобы область X не захватывала точки, например, с $\mu > 0,2$, откуда для среднего числа фотонов на отсчет при восстановлении по наборам из четырех кадров получим $a > 12$.

3. Найдем, при каком потоке фотонов на один регистратор интерферометрия на зрачке сохраняет свои преимущества перед спекл-интерферометрией при восстановлении углового спектра мощности. Для определения спектра мощности $\mu^2(f)$ по одной интерферограмме введем между интерферирующими пучками угол α : $\delta = 2k\alpha r$. Фурье-спектр распределения интенсивности в интерферограмме, как следует из

(1.1)–(1.3), содержит изображение точечного источника на нулевой частоте и два спекл-изображения: $O(\alpha + \beta)$ и $O(\alpha - \beta)$. Вырезая изображение с помощью окна

$$m(\beta) = \{1, \text{ если } \beta \in \Omega; 0, \text{ если } \beta \notin \Omega\}$$

углового размера $\eta \geq \xi$ (ξ — угловой размер спекл-изображения), найдем спектр мощности объекта:

$$\mu^2 \sim \iint d\mathbf{f}_1 \iint d\mathbf{f}_2 I(\mathbf{f}_1) I(\mathbf{f}_2) M(\mathbf{f} - \mathbf{f}_1) \bar{M}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_2) \exp(-i2\pi\alpha(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2)), \quad (3.1)$$

где $M(\mathbf{f}) = \int \int m(\beta) \exp(-i2\pi\beta\mathbf{f}) d\beta$.

В реальном эксперименте в i -й ячейке площадью $q = \lambda^2(\Delta f)^2/4$ будет зарегистрировано N_i фотонов, а оценка спектра мощности по аналогии с (3.1) примет вид

$$G(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P N_i N_j M_{ij},$$

где $M_{ij} = M(\mathbf{f} - \mathbf{f}_i) \bar{M}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_j) \exp(-i2\pi\alpha(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j))$, $i, j = 1, \dots, P$ — номера ячеек. Предполагается, что ячейки отсчетов плотно заполняют плоскость регистрации интерферограммы.

Найдем среднее значение оценки G :

$$\langle G \rangle = \sum \sum \langle N_i \rangle \langle N_j \rangle M_{ij} + \sum \langle N_i \rangle M_{ii} = (a/2(\Delta f)^2)^2 (\mu^2(\mathbf{f}) + B_1 + B_2 + \bar{B}_2),$$

где

$$B_1 = \frac{4}{a} \sum M_{ii} (\Delta f)^4 = 32 \frac{\Omega}{N_0 \lambda^2},$$

Ω — площадь окна $m(\beta)$ в угловых координатах,

$$\begin{aligned} B_2 &\sim \iint |M(\mathbf{f} - \mathbf{f}_1)|^2 d\mathbf{f}_1 \iint O(\beta + \alpha) \exp(i2\pi\mathbf{f}_1\beta) d\beta = \\ &= \iint d\beta_1 \iint d\beta_2 \exp(-i2\pi\mathbf{f}(\beta_1 - \beta_2)) m(\beta_1) m(\beta_2) O(\alpha - \beta_1 + \beta_2) = 0, \end{aligned}$$

если

$$\alpha > \xi + 2\eta. \quad (3.2)$$

Остановимся подробнее на параметре B_1 , определяющем смещение оценки G и, как будет показано ниже, ее дисперсию. Оптимальная площадь окна Ω , отсекающего максимум шумов, но не искажающего сигнал, равна площади изображения и составляет около $S\lambda^2/4A$, где A — площадь приемной апертуры, S — число спеклов в изображении. Тогда

$$B_1 \sim 8/N_s, \quad (3.3)$$

где N_s — число фотонов на атмосферную область когерентности.

Для дисперсии несмещенной оценки спектра мощности

$$G_1 = G - \sum_1^P N_i M_{ii}$$

можно получить

$$\sigma^2 = \sum_i \sum_j \sum_l \langle N_i \rangle \langle N_j \rangle \langle N_l \rangle \tilde{M}_{ij} \tilde{M}_{il} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \langle N_i \rangle \langle N_j \rangle \tilde{M}_{ij}^2, \quad (3.4)$$

где $\tilde{M}_{ij} = M_{ij} + M_{ji}$, откуда при условии (3.2) найдем для дисперсии

$$\sigma^2 = (a/2(\Delta f)^2)^4 (2B_1\mu^2(\mathbf{f}) + B_1^2)$$

и для отношения сигнал/шум

$$R_1(\mathbf{f}) = \mu^2(\mathbf{f}) / \sqrt{2B_1\mu^2 + B_1^2}.$$

Последнее выражение совпадает с приведенным в [6] с точностью до замены параметра B_1 величиной N_S^{-1} . Как показывает (3.3), такая замена качественно оправдана, но количественно приводит к завышению в несколько раз отношения R_1 .

Выражение (3.4) с заменой ядра M_{ij} ядром $T_{ij} = \exp(i2\pi f(\beta_i - \beta_j))$ описывает фотонные флуктуации несмещенной оценки спектра мощности в спекл-интерферометрии

$$G_2 = \sum_i \sum_j N_i N_j T_{ij} - \sum_j N_i,$$

где

$$\langle N_i \rangle = N_\Sigma (\Delta\beta)^2 \int \int \mu(\mathbf{f}) F(\mathbf{f}) \exp(i\Theta(\mathbf{f}) - i2\pi \mathbf{f} \beta_i) d\mathbf{f},$$

N_Σ — среднее число фотонов в кадре, $(\Delta\beta)^2$ — площадь отсчетной ячейки,

что примерно в \sqrt{S} раз превосходит величину $R_1(0)$. В области частот \mathbf{f} выше атмосферной частоты среза воспользуемся известным выражением [1, 6–8]

$$R_2 \approx \mu^2 F_0(\mathbf{f}) / (\mu^2 F_0 + N_S^{-1}),$$

где $F_0(\mathbf{f})$ — нормированная ОПФ телескопа, откуда при дополнительном условии

$$F_0(\mathbf{f}) < (N_S B_1)^{-1} = F_* \quad (3.5)$$

получим

$$R_1/R_2 \geq \sqrt{2F_*/F_0 - 1} > \sqrt{F_*/F_0} > 1.$$

Как следует из (3.2), пороговое значение ОПФ F_* не зависит от плотности фотонного потока и составляет $\sim 0,1$. Таким образом, в области высоких частот, определяемых условием (3.5), интерферометрия на зрачке при любых условиях наблюдения обеспечивает лучший результат с перевесом отношения сигнал/шум в $\sqrt{F_*/F_0(\mathbf{f})}$ раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Токовинин А. А. Звездные интерферометры. — М.: Наука, 1988.
2. Wessely H. W., Bolstad J. O. Interferometric technique for measuring the spatial correlation function of optical radiation fields // JOSA. — 1970. — 60, N 5.
3. Itoh K., Ohtsuka Y. Spatial coherence measurement through turbulent atmosphere using a computer-aided interferometer // Opt. Commun. — 1981. — 36, N 4.
4. Itoh K., Ohtsuka Y. Interferometric displacement sensing in the open atmosphere // Opt. Commun. — 1983. — 46, N 3/4.
5. Гельфер Э. И., Закин В. Г., Миндлина Е. И. Особенности восстановления двумерного объекта в схеме с модифицированным интерферометром Майкельсона // Автоматизация. — 1988. — № 2.
6. Chelli A., Mariotti J. M. Visibility and phase analysis for image and pupil plane interferometry at optical wavelengths // Astron. Astrophys. — 1986. — 157. — P. 372.
7. Miller M. G. Noise considerations in stellar speckle interferometry // JOSA. — 1977. — 67, N 9.
8. Dainty J. C., Greenaway A. H. Estimation of spatial power spectra in speckle interferometry // JOSA. — 1979. — 69, N 5.

Поступила в редакцию 27 декабря 1989 г.