

Б. Е. Кривенков, Ю. В. Чугуй

(Новосибирск)

### ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА НА ОТРАЖАЮЩИХ ОБЪЕМНЫХ ТЕЛАХ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

В [1, 2] нами изучено влияние объемности тел на формирование их пространственных спектров (дифракционных картин Фраунгофера) на примере абсолютно поглощающих объектов постоянной толщины. На основе предложенной модели эквивалентных диафрагм в приближении Кирхгофа — Френеля получены аналитические выражения для спектров объемного края и отверстия, дана их наглядная физическая интерпретация и исходя из этого представлен упрощенный, но вместе с тем достаточно точный для инженерных применений квазигеометрический (КГ) метод расчета спектров таких объектов.

В настоящей работе в приближении Кирхгофа — Френеля исследованы особенности дифракции света на абсолютно отражающих объектах постоянной толщины на основе предложенного в [2] подхода. Результаты расчета спектра объемного отверстия подтверждены экспериментально. Обсуждается также применимость квазигеометрического метода расчета дифракции света на таких объектах.

Рассмотрим сначала дифракцию света на металлическом объекте в виде объемного края с абсолютно отражающей боковой (вдоль оси  $z$ ) поверхностью, а затем обобщим результаты на случай протяженного отверстия. Введем граничные функции  $f(x)$  и  $g(x')$ , соответствующие пропусканию объекта в плоскостях его передней  $P$  и задней  $P'$  граней:

$$f(x) = Y(x); g(x') = Y(x'), \quad (1)$$

где  $Y(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда [3].

Учтем далее влияние боковой грани, амплитудный коэффициент отражения которой  $r = -1$ , на дифрагированное поле. С этой целью удобно представить падающую на переднюю грань волну (в соответствии с принципом Гюйгенса — Френеля) в виде суперпозиции точечных источников. Часть волны, например источника  $S$  с координатой  $x = x_0$ , падающая на боковую поверхность объекта, отражается от него и формирует таким образом в точке  $x = -x_0$  мнимое изображение  $S'$  источника  $S$  (рис. 1, а). При этом фазы источников  $S$  и  $S'$  отличаются

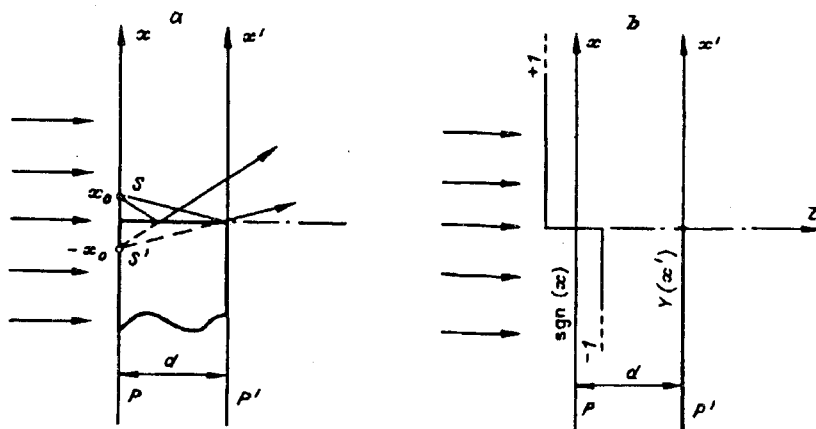


Рис. 1

на  $\pi$ , а соответствующие им волновые фронты вследствие конечной протяженности объекта вдоль оси  $z$  претерпевают амплитудные ограничения, которые эквивалентны действию помещенной в плоскость  $P'$  диафрагмы в виде полуплоскости. В результате граничная функция  $g(x')$  остается неизменной согласно (1), а  $f(x)$  преобразуется в знакопеременное распределение

$$f_r(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad (2)$$

где

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{для } x \leq 0; \\ 1 & \text{для } x > 0. \end{cases}$$

Модель эквивалентных диафрагм в этом случае включает два отстоящих друг от друга на расстоянии  $d$  плоских (нулевой толщины) объекта, первый из которых (фазовый) —  $\operatorname{sgn}(x)$ , а второй (амплитудный) —  $Y(x')$  (рис. 1, *b*).

Если теперь для функции (2) воспользоваться соотношением  $\operatorname{sgn}(x) = 2Y(x) - 1$ , то искомый пространственный спектр  $F(\theta)$  можно представить в виде алгебраической комбинации двух полей, первое из которых  $F_1(\theta)$  соответствует ранее изученному [2] спектру объемного края с абсолютно поглощающей боковой поверхностью, освещенного плоской волной двойной амплитуды, а второе — спектру дефокусированного плоского края  $F_2(\theta)$  [3], т. е.

$$F(\theta) = 2F_1(\theta) - F_2(\theta), \quad (3)$$

где

$$F_1(\theta) = \pi\delta(k\theta) + \frac{\tilde{Y}(\theta d)}{jk\theta} + \frac{e^{j\frac{k\theta^2 d}{2}}}{2jk\theta}, \quad (3a)$$

$$F_2(\theta) = \pi\delta(k\theta) + \frac{e^{j\frac{k\theta^2 d}{2}}}{jk\theta}. \quad (3б)$$

Здесь  $\theta$  — угол дифракции;  $k = 2\pi/\lambda$  — волновой вектор ( $\lambda$  — длина волны света);  $\tilde{Y}(z) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{\lambda d}} \int Y(\xi) \exp[-j\frac{k}{2d}(z - \xi)^2] d\xi$  — френелевский образ функции  $Y(z)$ . С учетом (3a) и (3б) для дифрагированного поля имеем

$$F(\theta) = \pi\delta(k\theta) + \frac{2\tilde{Y}(\theta d)}{jk\theta}. \quad (4)$$

Существенно, что спектр абсолютно отражающего объемного края в отличие от поглощающего объемного края ( $r = 0$ ) не содержит члена, соответствующего вторичной дифракции света на задней грани. Его

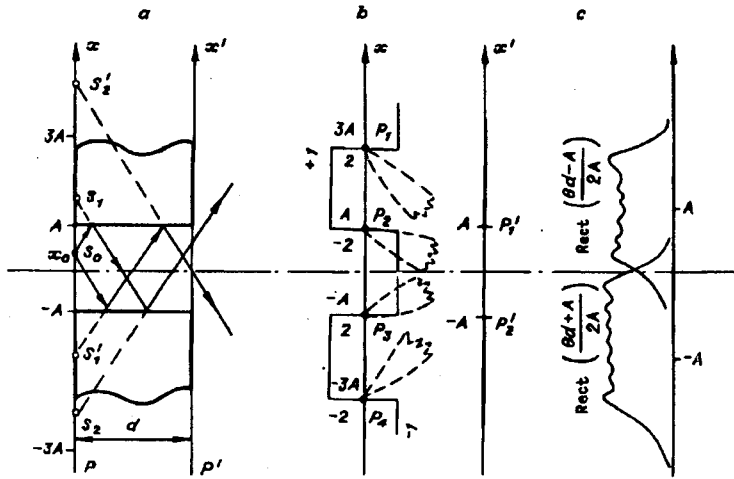


Рис. 2

величина согласно [2] определяется амплитудой поля  $\tilde{\text{sgn}}(x)$  в месте расположения края задней грани, соответствующей дифракции Френеля на входном распределении  $\text{sgn}(x)$  в промежутке между двумя гранями:

$$\tilde{\text{sgn}}(x) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{\lambda d}} \int \text{sgn}(\xi) \exp[-j\frac{k}{2d}(x - \xi)^2] d\xi.$$

Так как  $\tilde{\text{sgn}}(0) = 0$ , то действие задней грани сводится лишь к виньетированию дифрагированных волн (второй член в (4)).

Перейдем теперь к изучению особенностей дифракции Фраунгофера на объемном абсолютно отражающем отверстии шириной  $2A$  (рис. 2, a). Для входной и выходной граничных функций имеем

$$f(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{2A}\right), \quad g(x') = \text{rect}\left(\frac{x'}{2A}\right). \quad (5)$$

Действие двух зеркальных граней сводится к мультиплицированию входного распределения  $f(x)$ . Более наглядно формирование мультиплицированных изображений можно уяснить, как и ранее, на примере распространения волны от точечного источника (с координатой  $x = x_0$ ). Последовательно отражаясь от боковых граней отверстия, он создает серию мнимых изображений  $S_1, S_2, \dots$  с координатами, равными  $2A - x_0, -4A + x_0, \dots$ , а также серию мнимых изображений  $S_1', S_2', \dots$  с координатами  $-2A - x_0, 4A + x_0, \dots$ . Суммируя вклад всех точек в пределах апертуры переднего отверстия с учетом скачков фазы на  $\pi$  при отражении, получим его мультиплицированное мнимое изображение в виде знакопеременной последовательности распределения  $f(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{2A}\right)$ . Так как интерес представляет дифракционное поле для малых углов  $\theta$ , то ограничимся изображениями, соответствующими одно- и двукратным отражениям. В этом случае граничная функция принимает вид

$$f_r(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{2A}\right) - \text{rect}\left(\frac{x - 2A}{2A}\right) - \text{rect}\left(\frac{x + 2A}{2A}\right) +$$

$$+ \operatorname{rect}\left(\frac{x-5A}{2A}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{x+5A}{2A}\right), \quad (6)$$

где

$$\operatorname{rect}(z) = \begin{cases} 1 & \text{для } |z| \leq 1; \\ 0 & \text{для } |z| > 1. \end{cases}$$

Вспользуемся далее при расчетах результатами работы [2] для спектра абсолютно поглощающего объемного отверстия с использованием обобщенной точечной модели (рис. 2, б). В соответствии с ней спектр Фурье является результатом интерференции полей от первичных (обобщенных) источников  $P_1, P_2, P_3, P_4$  с координатами, соответствующими точкам изменения знака функции (6), и вторичных источников  $P_1, P_2$  с координатами  $x' = \pm A$ . При этом амплитуды первичных источников определяются перепадами функции (6) в указанных точках и равны  $\pm 2$ , а их диаграммы излучения, будучи неизотропными, описываются для точек  $P_1, P_4$  и  $P_2, P_3$  соответственно функциями  $\tilde{\operatorname{rect}}\left(\frac{\theta d \pm 3A}{2A}\right)$  и  $\tilde{\operatorname{rect}}\left(\frac{\theta d \pm A}{2A}\right)$ . Что касается вторичных источников, то они имеют изотропные диаграммы излучения, а их амплитуда всецело зависит от значения френелевского образа  $f_r(x')$  функции (6) в точках  $x = \pm A$ . С учетом этого для спектра отражающего объемного отверстия имеем

$$F(\theta) = \frac{2}{jk\theta} \left[ e^{jk\theta A} \tilde{\operatorname{rect}}\left(\frac{\theta d - A}{2A}\right) - e^{-jk\theta A} \tilde{\operatorname{rect}}\left(\frac{\theta d + A}{2A}\right) + \right. \\ \left. + e^{-j3k\theta A} \tilde{\operatorname{rect}}\left(\frac{\theta d + 3A}{2A}\right) - e^{j3k\theta A} \tilde{\operatorname{rect}}\left(\frac{\theta d - 3A}{2A}\right) - \tilde{f}_r(A) e^{j\frac{k\theta^2 d}{2}} \sin(k\theta A) \right]. \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{\operatorname{rect}}(z)$  — френелевский образ функции  $\operatorname{rect}(z)$ , описывающий диаграмму излучения источника с координатой  $x = 0$ .

Рассмотрим случай, когда на размере отверстия  $2A$  укладывается большое число зон Френеля, т. е.  $2A \gg \sqrt{\lambda d}$ . В этом случае коэффициент  $\tilde{f}_r(A) \approx 0$ , а период колебаний спектра  $\theta_0 = \lambda/2A$ , обусловленный апертурой отверстия, много меньше периода френелевских колебаний

$\theta_{FR} = \sqrt{\frac{\lambda}{d}}$ , и, следовательно, можно ограничиться рассмотрением области частот  $0 \leq |\theta| \ll \frac{2A}{d}$ . В результате выражение (7) для спектра  $F(\theta)$  упрощается:

$$F(\theta) = \frac{2}{jk\theta} \left[ e^{jk\theta A} \tilde{\operatorname{rect}}\left(\frac{\theta d - A}{2A}\right) - e^{-jk\theta A} \tilde{\operatorname{rect}}\left(\frac{\theta d + A}{2A}\right) \right]. \quad (8)$$

Видно, что спектр объемного отражающего отверстия представляет собой в первом приближении суперпозицию двух взвешенных плоских

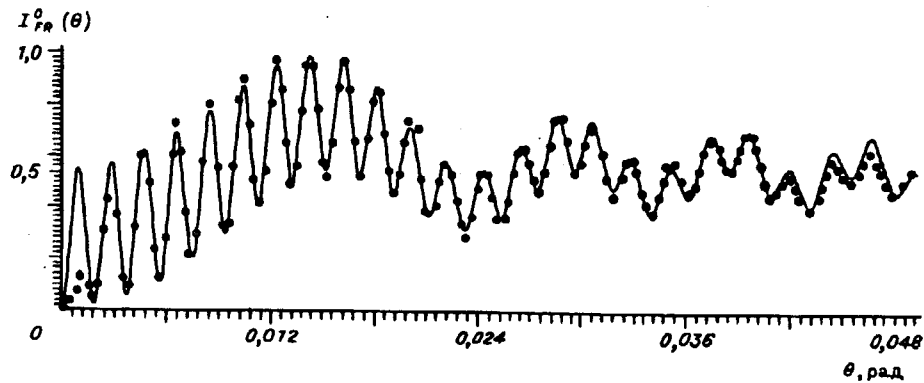


Рис. 3

наклонных волн:  $e^{jk\theta A}$  и  $e^{-jk\theta A}$  с весовыми коэффициентами  $\tilde{g}\text{ct}\left(\frac{\theta d - A}{2A}\right)$  и  $\tilde{g}\text{ct}\left(\frac{\theta d + A}{2A}\right)$  (рис. 2, с), соответствующими диаграммам излучения источников с координатами  $x = +A, -A$ . При увеличении  $\theta$  эти коэффициенты ведут себя по-разному. Первый из них, сначала монотонно возрастая, переходит при  $\theta \geq \sqrt{\frac{\lambda}{d}}$  в френелевские колебания, описываемые функцией  $\tilde{Y}(\theta d)$ , а второй — монотонно уменьшается. Следовательно, при значениях  $\theta$ , близких нулю, где  $\tilde{g}\text{ct}\left(\frac{\theta d - A}{2A}\right) \approx \tilde{g}\text{ct}\left(\frac{\theta d + A}{2A}\right)$ , контраст спектра максимален, а затем с увеличением  $\theta$  уменьшается. Причем форма огибающей спектра мощности  $I(\theta) = |\theta F(\theta)|^2$  во многом определяется функцией  $|\tilde{Y}(\theta d)|^2$ . Это хорошо видно на рис. 3, на котором приведен график зависимости  $I(\theta)$  для объемного отражающего отверстия с параметрами  $2A = 0,352$  мм и  $d = 2$  мм. Можно видеть, что численные значения углов  $\theta_1 = 0,025$  и  $\theta_2 = 0,035$ , при которых огибающая достигает своих минимумов, соответствуют аналогичным значениям аргумента функции  $|\tilde{Y}(\theta d)|^2$ . Кроме того, на рис. 3 точками показаны экспериментально полученные значения спектра  $I(\theta)$ . Можно отметить хорошее согласие теоретических и экспериментальных результатов, за исключением малой области углов вблизи нуля, где амплитуды первого и второго дифракционных максимумов много меньше теоретических значений.

В заключение остановимся на возможности применения КГ-метода при расчете спектра отражающего объемного отверстия ( $2A \gg \sqrt{\lambda d}$ ). В рамках точечной модели это сводится к замене неизотропных диаграмм излучения источников  $P_1, P_2, P_3, P_4$  на изотропные в секторах, соответствующих углам  $\frac{2A}{d} \leq |\theta| \leq \frac{4A}{d}$  (для точек  $P_1, P_4$ ) и  $0 \leq |\theta| \leq \frac{2A}{d}$  (для точек  $P_2, P_3$ ). При этом амплитуды точек  $P_1$  и  $P_2$ , как и в предшествующем случае, равны нулю. В результате, например, при  $\theta \geq 0$  в формировании спектра участвует лишь один источник  $P_3$  (источник  $P_2$  виньетируется задней гранью), приводящий к появлению наклонной волны  $e^{jk\theta A}$ . Очевидно, что спектр мощности в этом случае не содержит колебательной составляющей, что противоречит экспериментальным данным. Отсюда следует, что применение КГ-метода расчета дифракции Фраунгофера на отражающих объектах может встретить

серьезные трудности, препятствующие правильной интерпретации результатов.

Таким образом, теоретически обоснована и экспериментально подтверждена эффективность применения модели эквивалентных диафрагм для анализа спектра отражающих объектов постоянной толщины.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коронкевич В. П., Кривенков Б. Е., Михляев С. В., Чугуй Ю. В. Оптико-геометрический метод расчета дифракции Фраунгофера на объемных телах // Автометрия.—1980.—N 2.
2. Кривенков Б. Е., Чугуй Ю. В. Дифракция Фраунгофера на объемных телах постоянной толщины // Автометрия.—1987.—N 3.
3. Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики.—М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 18 марта 1991 г.*

---