3. Спектор Б. И. Об одном способе синтеза фазовой структуры киноформов // Автометрия.—1985.—№ 6.
4. Clair J. J. Synthese optique de filtres d'amplitude et de phase dits "Kinoform" // These de doctorat.—Paris: l'Universite de Paris IV, 1972.—P. 118.
5. Ленкова Г. А. Киноформы. Синтез фазовой структуры и допустимые погрешности.—Новосибирск, 1979.—(Препр. АН СССР, Сиб. отд-ние. ИАиЭ; 98).
6. Пальчикова И. Г., Рябчун А. Г. О влиянии погрешностей изготовления киноформов на функцию зрачка // Автометрия.—1985.—№ 6.
7. Бобров С. Т. Влияние ошибок изготовления дифракционных линз на качество формируемого изображения // Автометрия.—1987.—№ 5.
8. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.—М.: Наука, 1970.
9. Фотолитография и оптика /Под ред. Я. А. Федотова.—М.: Сов. радио, 1974.

А. И. Валицкас

(Новосибирск)

АЛГОРИТМЫ ДЕЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ МНОГОУРОВНЕВОГО ЛОГИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

Рассматривается операция деления булевых функций — одна из базовых операций, используемых в системах многоуровневого логического синтеза. Приводится краткий обзор наиболее важных результатов по этой тематике и обсуждается реализация алгоритмов деления, выполненная в рамках системы проектирования СБИС, развиваемой в ИАиЭ СО АН СССР.

Введение. Практический интерес к проблематике многоуровневого логического синтеза обусловлен тем, что, хотя в настоящее время аппарат программируемых логических матриц (ПЛМ) является основным при реализации управляющих структур СБИС, эффективность применения ПЛМ снижается по мере увеличения их сложности. Последнее объясняется тем, что из-за относительно низкой плотности размещения транзисторов в ПЛМ временные задержки и затраты площади кристаллов перестают удовлетворять достаточно жестким требованиям, предъявляемым к параметрам СБИС. Кроме того, существуют булевы функции, реализация которых в виде ПЛМ принципиально невозможна из-за экспоненциального характера зависимости минимального количества необходимых для этого термов от числа входов.

В последние годы активно развивается несколько иной подход к реализации логики СБИС, предусматривающий использование многоуровневых логических схем. Такая схема состоит из нескольких взаимосвязанных частей (уровней): нулевой уровень образован входными сигналами, а каждый из последующих уровней реализует либо операцию логического сложения (дизъюнкции), либо операцию логического умножения (конъюнкции) некоторой совокупности сигналов, полученных на предыдущих уровнях.

Ясно, что традиционные ПЛМ в этих терминах являются двухуровневыми логическими схемами с *AND*-плоскостью в качестве первого уровня и *OR*-плоскостью — в качестве второго. В то же время возможность использовать на каждом из уровней логику, реализованную в предшествующих уровнях, делает структуру многоуровневых схем более гибкой по сравнению с ПЛМ, создает богатые возможности для блочного проектирования СБИС с использованием заранее созданных библиотечных элементов.

Эффективность многоуровневого проектирования СБИС продемонстрирована в [1, 2], где приводятся описания и результаты применения действующих автоматизированных систем проектирования и оптимизации многоуровневых логических схем. Обзор современных достижений в этой области и богатая библиография содержатся в [3].

Настоящая работа посвящена рассмотрению алгоритмов деления булевых функций — одной из базовых операций, используемых в системах многоуровневого логического синтеза. В последующих разделах приводится краткий обзор наиболее важных результатов по этой тематике и обсуждается вариант алгоритма деления, реализованный в рамках развиваемой в ИАиЭ СО АН СССР системы логического проектирования СБИС.

1. **Определения и обозначения.** Для любой частично определенной булевой функции (ЧОБФ) $f: B^n \to B$ от n независимых переменных $x_1, ..., x_n \in B$, где $B = \{0, 1\}$, а B^n — декартово произведение n экземпляров множества B, обозначим символом $H_i(f)$ множество тех точек из B, в которых функция f принимает значение i (равное 0 или 1), и положим $H_x(f) = B^n \setminus (H_0(f) \cup H_1(f))$ (множество точек из B, в которых функция f не определена).

Термин «булева функция» (БФ) будет использоваться, как правило, по отношению ко всюду определенным булевым функциям. Символ $\bar{f}$ будет служить для обозначения БФ, называемой дополнением к ЧОБФ f, которая равна 1 на множестве $H_0(f)$ и 0 в противном случае. Если D — произвольное подмножество в B^n, а f и g — ЧОБФ, то запись $f = g(\mathrm{mod}D)$ будет означать, что $f(x) = g(x)$ для любого $x \in B^n \setminus (D \cup H_x(f) \cup H_x(g))$.

Основной способ задания ЧОБФ f состоит в перечислении всех точек из множеств $H_1(f)$, $H_x(f)$. Всюду определенная булева функция может быть задана также соответствующей дизъюнктивной нормальной формой. Без ограничения общности можно считать, что все дизъюнктивные члены этой формы попарно различны и в каждом из них не могут присутствовать две и более одинаковых переменных так же, как не могут одновременно встретиться переменная и ее отрицание.

В дальнейшем дизъюнктивные нормальные формы будут естественным образом отождествляться с многочленами от $2n$ переменных $x_1, ..., x_n, \bar{x}_1, ..., \bar{x}_n$, коэффициенты которых лежат в B, степень по каждой переменной не превосходит единицы, а мономы удовлетворяют сформулированному выше условию на дизъюнктивные члены. Для такого отождествления достаточно заменить все отрицания переменных $x_1, ..., x_n$ новыми переменными $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n$, конъюнкции — умножением, а дизъюнкции — сложением. Этот способ задания БФ f называется алгебраическим, а полученный многочлен — алгебраическим представлением функции f. Мономы, участвующие в записи алгебраических представлений БФ, по традиции будем называть термами.

2. **Многоуровневый логический синтез и задача деления булевых функций.** 2.1. Проблема построения многоуровневой схемы, реализующей заданную систему ЧОБФ, имеет два основных аспекта.

Во-первых, необходимо определить набор промежуточных функций, по которым факторизуются исходные, т. е. совокупность функций, вычисляемых на некоторых уровнях и являющихся входными переменными для последующих уровней. Вопросам исследования и разработки алгоритмов для решения этой задачи посвящено значительное количество работ (см., например, [1—4]); в данной статье они обсуждаться не будут.

Во-вторых, если набор промежуточных функций выбран, то возникает вопрос о том, как через функции этой системы выразить исходные

ЧОБФ, используя операции логического сложения и логического умножения.

Легко понять, что, если такое представление возможно, f — любая из исходных ЧОБФ, а p — произвольная промежуточная булева функция, участвующая в выражении для f, то имеет место равенство

$$f = pq + r(\mathrm{mod} H_X(f)) \tag{1}$$

для некоторых булевых функций q и r. В этом случае p называется дивизором функции f, q — булевым частным, а r — остатком от деления f на p. Кроме того, если предположить, что r не представимо в виде (1) с отличным от нуля произведением в правой части (в противном случае процесс деления мог бы быть продолжен), то должно быть выполнено условие

$$pr = 0. \tag{2}$$

Таким образом, приходим к задаче деления булевых функций, которая формулируется следующим образом: по заданной ЧОБФ f и булевой функции p найти булевы функции q и r, удовлетворяющие одновременно условиям (1) и (2).

Легко получить формулы для решения этой задачи:

$$\left.\begin{aligned} q &= f\,(\mathrm{mod} H_X(f) \cup H_0(p)), \\ r &= f\bar{p}\,(\mathrm{mod} H_X(f)), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

показывающие, что частное и остаток при булевом делении определяются неоднозначно (даже в случае, когда функция f всюду определена). Поэтому обычно среди функций, удовлетворяющих равенствам (3), выбирают такие, которые отвечали бы некоторым дополнительным условиям минимальности. Например, можно искать функции, имеющие минимальные количества различных термов, переменных, литералов в записи всевозможных их алгебраических представлений. Напомним, что литералами называют знаки (литеры) переменных без учета того, с отрицанием или без него переменная участвует в выражении (в наших обозначениях литералы можно отождествить с индексами переменных).

Проблема выбора условия минимальности выражений (3), наиболее адекватного задачам многоуровневого проектирования логических схем, обсуждалась, например, в [4]. Было отмечено, что более предпочтительным критерием здесь является минимальность числа литералов. В настоящее время, однако, мы располагаем лишь программой, позволяющей минимизировать число термов (которая была разработана для оптимизации топологии ПЛМ и входит в состав программного комплекса LOGIC [5]). Эта программа и использовалась в реализации алгоритма булевого деления, обсуждаемой в п. 3.

2.2. Предыдущие рассмотрения показывают, что для получения частного и остатка при булевом делении необходимо выполнять операцию нахождения дополнения булевой функции, а также решать задачу минимизации ЧОБФ. Оба действия (особенно второе) достаточно времяемкие. Кроме того, нужно учесть, что деление булевой функции используется в алгоритмах многоуровневой оптимизации так же часто, как сложение и умножение при вычислении алгебраических выражений. Поэтому важно иметь быстрые алгоритмы, обеспечивающие достаточно хорошее приближенное решение рассматриваемой задачи.

Такой алгоритм разработан и подробно описан в [6]. Деление булевой функции в нем заменяется на деление с остатком алгебраических представлений данных функций; по этой причине такое деление называется алгебраическим. Более точно задача алгебраического деления формулируется следующим образом: по заданным алгебраическим представлениям f и p найти алгебраические представления q и r (частное и остаток соответственно), удовлетворяющие условию

$$f = pq + r, \tag{4}$$

так, чтобы r уже нельзя было представить в виде, аналогичном (4) с ненулевым множителем при p.

Отметим, что, поскольку здесь речь идет об алгебраических представлениях БФ, т. е. о многочленах, то операции сложения и умножения, как и отношение равенства, участвующие в (4), понимаются в обычном для многочленов смысле. Отсюда легко вытекает единственность частного и остатка при алгебраическом делении. Кроме того, учитывая условия, накладываемые на термы алгебраического представления (см. п. 1), сразу получаем следующее дополнительное ограничение на многочлен q: он не должен иметь общих литералов с многочленом p. Это ограничение влечет за собой, в частности, невозможность возникновения подобных членов при перемножении многочленов p и q.

Идея алгоритма алгебраического деления проста: нетрудно понять, что частное q из формулы (4) состоит из термов, одновременно присутствующих во всех частных от деления многочлена f на произвольный терм дивизора p. Поэтому для построения многочлена q достаточно взять произвольный терм многочлена p, разделить на него с остатком многочлен f, а затем в полученном частном (если оно отлично от нуля) оставить только те термы, произведение которых на любой терм дивизора p участвует в алгебраическом представлении f. После получения частного q от деления f на p остаток r формируется очевидным образом: в него входят все термы многочлена f, не встречающиеся среди термов произведения pq.

Вопросу нахождения эффективной процедуры, реализующей описанный выше эскиз алгоритма алгебраического деления, посвящена работа [6]. Приведенные в ней алгоритмы алгебраического умножения (умножения алгебраических представлений) и алгебраического деления предполагают лексикографическую упорядоченность термов, участвующих в записи исходных алгебраических представлений, и формируют результаты (произведение, частное и остаток) также в лексикографически упорядоченном виде. Отмечавшееся ранее свойство разделенности переменных в алгебраических сомножителях позволило получить алгоритмы, трудоемкость которых (измеряемая в суммарном количестве требуемых операций умножения и сравнения термов) близка к оптимальной: при вычислении алгебраического произведения многочленов f и g с m и n термами соответственно она не превосходит величины kmn, а при алгебраическом делении f на g — величины $k(m + n)$, где коэффициент k достаточно мал. Эти быстрые алгоритмы и были реализованы в программах алгебраического умножения и деления.

3. Реализация алгоритмов деления. В основу реализованных алгоритмов были положены идеи работы [6], обсуждавшиеся в предыдущем разделе. Остановимся лишь на некоторых нюансах и модификациях, характерных для данной реализации.

3.1. Разработанные программы ориентированы на работу с системами функций: хотя в п. 2 речь шла об «одиночных» булевых функциях, некоторые операции (сложение, умножение, часть вспомогательных преобразований) удобно выполнять сразу для системы булевых функций, которые в то же время можно рассматривать и как «одиночные» функции со значениями в B^m, где m — число функций в системе.

3.2. Проведено распространение алгоритмов из [6] на случай функций от многозначных переменных. Используемая при булевом делении программа минимизации системы функций по совокупному числу термов, описанная в [5], такую возможность обеспечивает.

3.3. Эффективность программы алгебраического деления была повышена за счет модификаций, связанных с устранением рекурсивности.

3.4. Программа деления булевых функций предусматривает возможность предварительного выполнения операции алгебраического деления их алгебраических представлений. Это позволяет в дальнейшем заменить исходную функцию остатком от алгебраического деления, имеющим меньшее количество термов, что ведет к сокращению времени минимизации.

Все программы написаны на языке Си в операционной среде VAX/VMS.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bartlett K., Cohen W., Geus A., Hachtel G. Synthesis and optimization of multilevel logic under timing constraints // IEEE Trans. on CAD.—1986.—CAD-5, N 4.—P. 582.
2. Brayton R., Ruddell R., Sangiovanni-Vincentelli A., Wang A. MIS: a multiple-level logic optimization system // IEEE Trans. on CAD.—1987.—CAD-6, N 6.—P. 1062.
3. Brayton R., Hachtel G., Sangiovanni-Vincentelli A. Multilevel logic synthesis // Proc. IEEE.—1990.—78, N 2.—P. 264.
4. Brayton R. Factoring logic functions // IBM J. of Res. and Dev.—1987.—31, N 2.—P. 187.
5. Лившиц З. А., Смирнов К. К. LOGIC — программный комплекс для генерации топологии ПЛМ // Автометрия.—1991.—№ 1.
6. McGeer P., Brayton R. Efficient, stable algebraic operations on logic expressions // Proc. Int. Conf. on VLSI, Vancouver, Canada, Aug. 1987 /Ed. C. H. Sequin.—Amsterdam: Elsevier Science Publishing Company, 1988.—P. 123.

Поступило в редакцию 28 июня 1991 г.