АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1991

СИСТЕМЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.391

Т. Л. Панкова, А. Л. Резник

(Новосибирск)

ЭФФЕКТИВНОСТЬ АЛГОРИТМОВ ПРЕЦИЗИОННОГО СОВМЕЩЕНИЯ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Описана программная реализация и исследована сравнительная эффективность трех алгоритмов координатной привязки цифровых изображений, один из которых основан на поиске максимума функции правдоподобия, а два других — на разложении сигнала (изображения) в ряд.

Настоящая статья является дальнейшим развитием описанных в [1] методов прецизионного совмещения цифровых изображений. Напомним, что в упомянутой работе основная задача была сформулирована следующим образом.

Имеются два изображения U и V:

$$u(x, y) = f(x, y) + \xi(x, y);$$
$$v(x, y) = f(x + \delta x, y + \delta y) + \eta(x, y). \tag{1}$$

Здесь $f(x, y)$ — опорное изображение; $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — наблюденные зашумленные изображения, отличающиеся одно от другого относительным сдвигом $\delta = (\delta x, \delta y)$; $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ — две различные реализации «белого» гауссова шума с неизвестной дисперсией σ; взаимный поворот изображений по условиям регистрации исключен. Необходимо для заданного в цифровом виде фрагмента

$$u_{ij} = u(ih, jh) = f(ih, jh) + \xi(ih, jh) = f_{ij} + \xi_{ij} \quad (i, j = \overline{0, n-1})$$

одного изображения оценить его местоположение на втором изображении. Вообще говоря, для большинства реальных задач обработки изображений оказывается достаточным оценить смещение фрагмента с точностью до шага решетки h, но существует класс задач с повышенными требованиями к точности координатной привязки, для которых необходимо оценить сдвиг с точностью до долей дискрета. Как и в [1], предполагаем, что «грубая» привязка (т. е. совмещение с точностью до дискрета) зарегистрированных изображений уже проведена (разумный способ ее осуществления — применение метода наименьших квадратов или корреляционного приема), т. е. в соотношении (1) можно считать, что $|\delta x|, |\delta y| < 0{,}5h$, причем шаг дискретизации h, не нарушая общности, можно в дальнейшем принять равным единице.

Из предложенных в [1] алгоритмов прецизионной привязки наилучшие результаты на модельных и реальных изображениях были получены с помощью разложения сигнала (изображения) в ряд с удержанием членов до первого порядка малости относительно оцениваемых величин смещений δx и δy. Сравнение всех исследованных в [1] алгоритмов осуществлялось по трем параметрам: точности совмещения, быстродействию и устойчивости по отношению к шуму различного уровня. Очевидный недостаток работы [1] состоял в том, что в ней не удалось провести сопоставление всех предложенных алгоритмов с методом, основанным на поиске максимума функции правдоподобия, с помощью которого потенциально достижима предельно возможная (в статистическом плане) точность совмещения.

Ниже описывается программно реализованный метод максимального правдоподобия (ММП), далее обсуждается изложенный в [1] алгоритм разложения сигнала в ряд, после чего приводится модификация последнего алгоритма, значительно улучшающая его характеристики.

Контрольные испытания на модельных зашумленных изображениях показали, что для рассматриваемой задачи усовершенствованный алгоритм по своим характеристикам приближается к ММП, в то время как его быстродействие значительно выше. Поэтому для решения большинства встречающихся на практике задач обработки изображений может быть успешно применен модифицированный метод разложения сигнала в ряд.

Метод максимального правдоподобия. Будем для простоты считать, что нам известны направления взаимного смещения изображений по обеим осям координат (в действительности же должны быть рассмотрены четыре случая). Полагаем также, что поведение изображения между отсчетами описывается билинейной функцией, т. е.

$$u_{ij} = f_{ij} + \xi_{ij};$$

$$v_{ij} = (1 - \delta x)(1 - \delta y)f_{ij} + (1 - \delta x)\delta y f_{i+1,j} + (1 - \delta y)\delta x f_{i,j+1} +$$

$$+ \delta x \delta y f_{i+1,j+1} + \eta_{ij},$$

где δx, δy — подлежащие оценке компоненты вектора смещения. Тогда плотность вероятности наблюдения фрагментов u_{ij} и v_{ij} может быть записана так:

$$G(u, v \mid f, \sigma, \delta x, \delta y) = \prod_{0 \le i,\, j \le n-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[- \frac{(u_{ij} - f_{ij})^2}{2\sigma^2} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times \right.$$

$$\times \exp[-\{v_{ij} - [(1 - \delta x)(1 - \delta y)f_{ij} + (1 - \delta x)\delta y f_{i+1,j} +$$

$$\left. + (1 - \delta y)\delta x f_{i,j+1} + \delta x \delta y f_{i+1,j+1}]\}^2 / 2\sigma^2] \right]. \qquad (2)$$

Наиболее простой способ нахождения глобального максимума функции правдоподобия (2) заключается в решении системы уравнений, получаемой в результате приравнивания нулю частных производных логарифма функции G по переменным f_{ij}, σ, δx, δy. Из этой системы легко исключается переменная σ, но тем не менее решение ее затруднено тем, что переменные δx и δy входят в систему нелинейно. Для устранения этих трудностей нами было проделано следующее: полученная в результате дифференцирования система уравнений относительно переменных f_{ij} решалась при фиксированных значениях δx и δy, причем набор этих значений равномерно с определенным шагом покрывал область $|\delta x|$, $|\delta y| \le 0{,}5$, а затем выбиралось значение смещения $(\delta x, \delta y)$, доставляющее максимум функции G (или $\ln G$, что одно и то же).

Нахождение решения даже такой линеаризованной системы представляет значительную сложность из-за ее большой — $n^2 \times n^2$ — размерности, где $n \times n$ — объемы исходных фрагментов u_{ij} и v_{ij}. Выходом из этой ситуации служит то обстоятельство, что матрица рассматриваемой системы линейных уравнений имеет достаточно простую блочно-диагональную структуру:

$$H = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ A_2 & A_1 & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & A_2 & A_1 & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_2 & A_1 & A_2 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_2 & A_1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где A_1, A_2 — обычные трехдиагональные матрицы размерностью $n \times n$. Для решения этой системы был применен метод циклической редукции [2], суть которого заключается в многократном рекурсивном понижении размерности матрицы H. При этом фактического обращения матрицы H не происходит, а все сводится к проведению определенного количества прогонок для трехдиагональных матриц. Трудоемкость метода максимального правдоподобия при $n \approx 30$ составляет около 10^7 арифметических операций.

Разложение сигнала в ряд. Предпосылкой к созданию этого алгоритма послужили следующие соображения. Пусть в непрерывном случае требуется минимизировать по δx и δy выражение

$$J = \iint_s [u(x, y) - v(x + \delta x, y + \delta y)]^2 dxdy \Rightarrow \min_{\delta x,\, \delta y}, \tag{4}$$

где s — область интегрирования известной конфигурации. Заменим функцию $v(x + \delta x, y + \delta y)$ ее приближением

$$v(x + \delta x, y + \delta y) \approx v(x, y) + \delta x \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \delta y \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$$

с точностью до малых первого порядка относительно величин δx, δy. Продифференцировав выражение (4) по δx и δy и приравняв нулю производные, получим систему двух линейных уравнений для нахождения величин $\hat{\delta x}$ и $\hat{\delta y}$, минимизирующих среднеквадратическое уклонение функций U и V:

$$\hat{\delta x} = \frac{\langle (u - v)\frac{\partial v}{\partial x}\rangle \langle (\frac{\partial v}{\partial y})^2\rangle - \langle (u - v)\frac{\partial v}{\partial y}\rangle \langle \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\rangle}{\langle (\frac{\partial v}{\partial x})^2\rangle \langle (\frac{\partial v}{\partial y})^2\rangle - \langle \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\rangle^2};$$

$$\hat{\delta y} = \frac{\langle (u - v)\frac{\partial v}{\partial y}\rangle \langle (\frac{\partial v}{\partial x})^2\rangle - \langle (u - v)\frac{\partial v}{\partial x}\rangle \langle \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\rangle}{\langle (\frac{\partial v}{\partial x})^2\rangle \langle (\frac{\partial v}{\partial y})^2\rangle - \langle \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\rangle^2}. \tag{5}$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ понимается как усреднение по полю. В качестве оценок для производных в дискретном случае нами использовалась первая разность. Этот алгоритм отличается высоким быстродействием, поскольку для него не требуется численного решения систем линейных уравнений. Трудоемкость метода $\sim 10n^2$, что при $n \approx 30$ составляет $\sim 10^4$ арифметических операций.

Модифицированный метод разложения сигнала. Описанный выше алгоритм можно модифицировать, заменив функцию $v(x + \delta x, y + \delta y)$ ее приближением с точностью до малых второго порядка:

$$v(x + \delta x, y + \delta y) \approx v(x, y) + \delta x \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \delta y \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} +$$

$$+ \frac{(\delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{(\delta y)^2}{2} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \delta x \delta y \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

Для нахождения неизвестного смещения $(\delta x, \delta y)$, при котором интеграл (4) достигает своего минимума, необходимо приравнять нулю частные производные по δx и δy выражения (4) с подстановкой соотношения (6). Полученная в результате этого система двух нелинейных уравнений

$$\frac{\partial J(\delta x, \delta y)}{\partial(\delta x)} = Q(\delta x, \delta y) = 0;$$

$$\frac{\partial J(\delta x, \delta y)}{\partial(\delta y)} = R(\delta x, \delta y) = 0 \quad (7)$$

решалась с помощью следующего итерационного метода. Пусть на k-м шаге с некоторой погрешностью найдено решение $(\delta x_k, \delta y_k)$ системы (7). На $(k + 1)$-м шаге оно должно быть уточнено, для чего оба уравнения системы (7) заменяются эквивалентными (с точностью до малых первого порядка) соотношениями

$$Q(\delta x_k + h_k, \delta y_k + g_k) \approx Q(\delta x_k, \delta y_k) + h_k \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=\delta x_k \\ y=\delta y_k}} +$$

$$+ g_k \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}\Bigg|_{\substack{x = \delta x_k \\ y = \delta y_k}} = 0;$$

$$R(\delta x_k + h_k, \delta y_k + g_k) \approx R(\delta x_k, \delta y_k) + h_k \frac{\partial R(x, y)}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=\delta x_k \\ y=\delta y_k}} +$$

$$+ g_k \frac{\partial R(x, y)}{\partial y}\Bigg|_{\substack{x=\delta x_k \\ y=\delta y_k}} = 0.$$

Отсюда определяются поправки h_k, g_k:

$$h_k = \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} R - \frac{\partial R}{\partial y} Q}{\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial R}{\partial x}}; \quad g_k = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} R - \frac{\partial R}{\partial x} Q}{\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial y}},$$

так что $x_{k+1} = x_k + h_k$, $y_{k+1} = y_k + g_k$.

В качестве начального приближения (x_0, y_0) можно взять значения $(\hat{\delta x}, \hat{\delta y})$, найденные предыдущим методом. Вторые производные в дискретном случае заменяются вторыми разностями. Проведенные численные эксперименты показали, что предельная точность метода достигается уже за три итерации, а его трудоемкость при $n \approx 30$ составляет $\sim 10^5$ арифметических операций.

Все три описанных выше алгоритма были программно реализованы. Результаты сравнительного анализа, полученные на одной из модельных функций, приведены в таблице. В качестве тестового изображения была

Сравнительная точность различных методов прецизионного совмещения изображений

Уровень шума ($\sigma_ш/\sigma_{из}$), %	Средняя ошибка совмещения (в долях дискрета)		
	Метод максимального правдоподобия	Модифицированный метод разложения изображения	Метод разложения изображения
0	0,0016	0,0049	0,0062
1	0,0021	0,0053	0,0068
2	0,0029	0,0061	0,0079
3	0,0037	0,0071	0,0097
5	0,0054	0,0108	0,0165
10	0,0105	0,0252	0,0486
15	0,0160	0,0416	0,0865

выбрана функция $f(x, y) = 16(1 + \sin\pi x)(1 + \cos 4\pi x)(1 + \sin\pi y) \times \times (1 + \cos 4\pi y)$ с областью определения $0 \leq x, y \leq 1$. Дискретизация проводилась с шагом 1/32 по обеим координатам, квантование по уровню осуществлялось с округлением до ближайшего целого числа. Для программной генерации псевдослучайного гауссова шума был использован тот факт, что распределение суммы независимых случайных величин достаточно быстро сходится к нормальному закону. В качестве генератора псевдослучайного шума с равномерным распределением на интервале (0,1) использовался датчик $\xi_n = 29\xi_{n-1} - \mathrm{entier}(29\xi_{n-1})$. Приведенные выше три метода совмещения изображений были проверены на одних и тех же исходных и зашумленных данных. Таблица содержит средние ошибки (усреднение осуществлялось по 64 значениям), возникающие при проведении совмещения разными алгоритмами и вычисляемые при определенном уровне шума.

В заключение можно отметить следующее. Поскольку метод максимального правдоподобия уступает в быстродействии всем рассмотренным алгоритмам несколько порядков, он вряд ли может быть рекомендован для широкого применения несмотря на то, что в точности совмещения двух изображений он не имеет аналогов. С практической точки зрения для этих целей наиболее приемлем модифицированный метод разложения сигнала в ряд, который незначительно уступает по точности ММП, в то время как его трудоемкость достаточно низка, что позволяет применять его при решении большинства реальных задач обработки изображений, в том числе и тех, которые требуют многократного циклического использования процедуры координатного совмещения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губанов А. В., Ефимов В. М., Киричук В. С. и др. Методы оценивания взаимного смещения фрагментов цифровых изображений // Автометрия.—1988.—№ 3.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.—М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 29 апреля 1991 г.