Изображения в таблице расположены в порядке возрастания дисперсии. Из данных таблицы видно, что качество разностных гауссовых оценок ухудшается по мере возрастания σ_0^2, особенно когда σ_0^2 становится больше $L^2/12$ ($L = 256$). В этом случае распределение интенсивности является, по меньшей мере, бимодальным.

Наибольший выигрыш дает переход к кодированию первой конечной разности. Использование второй конечной разности, совместно с первой, теоретически дает выигрыш около 0,25 бита. Остальные алгоритмы для изображений из таблицы по сравнению с первыми двумя выигрыша не дают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. Теория передачи информации // Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства (15—20 октября 1956 г.): Пленарные заседания АН СССР.—М.: Изд-во АН СССР, 1957.
2. Хаффмен Д. А. Метод построения кодов с минимальной избыточностью // Кибернетический сб.—М.: Изд-во иностр. лит., 1961.—Вып. 3.

Поступило в редакцию 3 июля 1991 г.

УДК 519.246

Д. Б. Аратский, О. А. Морозов, Е. А. Солдатов, В. Р. Фидельман

(Нижний Новгород)

О РЕКОНСТРУКЦИИ И УЛУЧШЕНИИ КАЧЕСТВА СИГНАЛОВ ТЕОРЕТИКО-ИНФОРМАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

Предлагается теоретико-информационный подход к решению некорректно поставленной задачи реконструкции искаженных помехами функций, основанный на известном принципе максимальной энтропии. Излагается новый вычислительно эффективный алгоритм реализации предложенной схемы решения этой задачи. Показано, что использование данного подхода обеспечивает более качественное по сравнению с традиционным методом фурье-фильтрации восстановление исходной функции с сохранением формы максимумов функции и амплитудных соотношений.

Введение и постановка задачи. Задача реконструкции некоторой функции $\varphi(t)$ состоит в восстановлении профиля $\varphi(t)$ по конечному числу ее зашумленных отсчетов. В такой постановке формулируются многие задачи обработки сигналов различной физической природы в радиолокации, радиоастрономии, акустике, гидролокации, спекл-интерферометрии, медицинской интроскопии и так далее. Применяемые на практике традиционные методы решения этой задачи, как правило, преследуют двоякую цель: фильтрацию шумов в отсчетах $\varphi(t)$ и восстановление значений $\varphi(t)$ между соседними отсчетами (интерполяцию). Сглаживание шумовых компонент обеспечивается использованием различных видов фильтрации [1, 2]. Для восполнения значений $\varphi(t)$ между отсчетами можно применять метод лагранжевой интерполяции, а также аппроксимацию различными полиномами [3].

Теоретико-информационный подход к решению задачи реконструкции функций. Для решения задачи реконструкции функций по ограниченному набору зашумленных данных предлагается подход, основанный на принципе максимальной энтропии (МЭ). Сформулированный в наиболее краткой форме Джейнсом [4] применительно к плотности распределения вероятности (ПРВ) $\rho(x)$, он гласит: «Если мы делаем какие-либо выводы на основе заведомо неполной информации, то должны при этом опираться на такую ПРВ $\rho(x)$, которая обладала бы максимальной энтропией и вместе с тем удовлетворяла бы нашим априорным данным». Следует заметить, что это утверждение правомерно для любой функции, обладающей свойствами ПРВ — положительной определенностью и нормированностью. Математически формализм МЭ в традиционной постановке сводится к оптимизации функционала информационной энтропии относительно $\rho(x)$ в форме Шеннона [5]

$$H_1 = - \int \rho(x) \ln \rho(x) dx \tag{1}$$

или Берга [5]

$$H_2 = - \int \ln \rho(x) dx \tag{2}$$

с ограничениями в виде учтенных посредством лагранжевых множителей априорных данных (средних статистических характеристик процесса) $\langle f(x) \rangle$:

$$\langle f(x) \rangle = \int \rho(x) f(x) dx.$$

В силу ограниченности априорных данных всегда существует целый класс распределений, удовлетворяющих этим данным. Из всего ансамбля возможных распределений выбирается распределение, обладающее максимальной энтропией. Основанием для этого является фундаментальная теорема о концентрации энтропии [4], согласно которой существует узкий интервал ΔH около значения максимума энтропии H_*, такой, что распределение с энтропией из интервала ΔH будет реализовываться подавляющим большинством возможных способов, а выбор распределения с энтропией вне этого интервала эквивалентен игнорированию этого большинства способов. Принцип МЭ с точки зрения комбинаторики есть просто метод статистического выбора решения, реализующегося наибольшим числом способов. Особо следует отметить, что поскольку энтропия есть информация с обратным знаком, то максимизация энтропии адекватна минимизации ложной недостоверной части информации, содержащейся в данных. В таком контексте применение принципа МЭ обеспечивает наиболее полный учет информации, содержащейся в априорных данных, и минимизацию информации, для которой нет оснований в этих данных.

Информационный подход к задаче реконструкции функции $\varphi(t)$ может состоять в следующем. По N отсчетам функции $\varphi(t)$ строится $M < N$ отсчетов ее фурье-образа $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \int \varphi(t) \exp(i\omega t) dt. \tag{3}$$

Теперь задача реконструкции функции $\varphi(t)$ сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма I рода (3). В силу конечности набора M отсчетов функции $F(\omega)$ и недоопределенности системы уравнений (3) (в дискретной форме) ее решение является некорректной задачей: из-за недоопределенности этой системы будет существовать ансамбль ее решений. Одним из путей преодоления этой некорректности является применение принципа МЭ [6]. Согласно принципу МЭ, оптимальным в информационном смысле будет решение, доставляющее максимум функционалу информационной энтропии

$$H = - \int \varphi(t) \ln \varphi(t) dt \tag{4}$$

и удовлетворяющее априорным данным в виде (3). В силу выпуклости функционала (4) это решение будет единственным. Для функционалов в форме Шеннона (1) и Берга (2) соответственно оно имеет вид

$$\varphi_1(t) = \exp\left\{ - \sum_{\omega} \lambda_{\omega} \exp(i\omega t) \right\}, \tag{5}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{(\sum\limits_{\omega} \lambda_\omega \exp(i\omega t))} . \qquad (6)$$

Возникает вопрос о том, сколько фурье-коэффициентов необходимо отбросить и каков критерий выбора (или оценки) числа M. Очевидно, универсального критерия не существует, и такой критерий должен вырабатываться отдельно для каждой конкретной физической задачи.

В качестве примера можно привести следующий. Если наложенный на отсчеты функции $\varphi(t)$ белый шум гауссов, а спектр сигналов низкочастотный, значений функции $\varphi(t)$ [7].

Описанная процедура решения уравнения (3) напоминает обычную винеровскую фильтрацию [2], где вместо операции обратного преобразования Фурье используется нелинейное преобразование, определяемое принципом МЭ [8]. Применение принципа МЭ гарантирует оптимальное в информационном смысле использование надежной части информации. Кроме того, известно, что метод МЭ обеспечивает гораздо более высокое разрешение, нежели фурье-метод [5], в силу чего при МЭ-подходе будет достигнуто более качественное и полное восстановление профиля исходной функции $\varphi(t)$, чем при линейной операции преобразования Фурье.

Вообще говоря, описанный подход к решению некорректно поставленных задач применим к решению уравнения Фредгольма I рода в общем виде [6]:

$$F(\omega) = \int \varphi(t) K(\omega, t) dt , \qquad (7)$$

где $K(\omega, t)$ — ядро, вид которого определяется физикой задачи. В такой формулировке задачи решения (5), (6), полученные применением принципа МЭ, приобретают вид:

$$\varphi_1(t) = \exp\left\{ - \sum_{\omega} \lambda_\omega K(\omega, t) \right\} , \qquad (8)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{(\sum\limits_{\omega} \lambda_\omega K(\omega, t))} . \qquad (9)$$

Сложности, возникающие при практической реализации данного подхода (особенно в многомерном случае), связаны с определением неизвестных множителей Лагранжа λ_ω, которые ищутся путем подстановки выражений (8), (9) в условия (7) и решения получающейся системы нелинейных уравнений относительно λ_ω.

Новый алгоритм решения некорректных задач на основе принципа МЭ. Предлагается новый алгоритм решения некорректно поставленных задач вида (7), позволяющий существенно повысить вычислительную эффективность классического метода МЭ (а в ряде случаев избежать итерационной процедуры поиска множителей Лагранжа). Перепишем условие (3) в матричном виде:

$$\mathbf{F} = \varphi \mathbf{K} , \qquad (10)$$

где $\mathbf{F}$, φ — векторы данных и решения соответственно; $\mathbf{K}$ — матрица функций, описывающих ядро уравнения (7). Подставив в выражение (10) решения (8), (9) в матричной форме, получим соответственно

$$F = \exp\{-\lambda K\}K, \quad F = [1/(\lambda K)]\, K.$$

Отсюда нетрудно получить аналитические выражения для множителей Лагранжа для энтропий в форме Шеннона и Берга соответственно:

$$\lambda_1 = -K^+\ln(K^+F), \tag{11}$$

$$\lambda_2 = K^+(1/K^+F). \tag{12}$$

Здесь K^+ — матрица, псевдообратная матрице K. Можно показать, что для квадратной матрицы K выражения (11), (12) определяют точные значения λ, в случае же прямоугольного вида этой матрицы они являются наилучшим в смысле наименьших квадратов начальным приближением для последующего итерационного поиска точных значений λ.

Численный пример решения задачи реконструкции функции по методу МЭ с использованием нового алгоритма вычисления множителей Лагранжа. Из вышеприведенных выводов следует, что основой программной реализации предложенного алгоритма решения некорректных задач методом МЭ является построение псевдообратной матрицы K^+. В ряде физических задач эту процедуру можно выполнить аналитическим путем.

Рассмотрим задачу реконструкции автокорреляционной функции (АКФ) случайного процесса по известным априори ее N отсчетам. В этом случае уравнение (7) приобретает смысл условий корреляционного согласования (формулы Винера — Хинчина (3)), где $\varphi(t)$ — подлежащая реконструкции АКФ случайного процесса; $F(\omega)$ — спектральная плотность мощности, построенная по N отсчетам $\varphi(t)$. Матрица K тогда представляет собой матрицу комплексных экспонент вида $\exp(i\omega t)$, а псевдообратная к ней матрица K^+ есть просто комплексно-сопряженная транспонированная матрица K.

На рис. 1 представлены исходная модельная функция $\varphi(t)$ *1* и функция $\varphi(t)$, искаженная белым гауссовым шумом (отношение сигнал/шум = 10/8) *2*. По заданным априори 128 отсчетам этой функции вычислялось 128 отсчетов функции $F(\omega)$ — фурье-образа функции $\varphi(t)$. Из этого массива фурье-коэффициентов наиболее значимыми и содержащими достоверную информацию считались первые 15 фурье-коэффициентов, которые и использовались для реконструкции функции $\varphi(t)$. На рис. 2 изображены функция $\varphi(t)$ *1* и результат ее реконструкции, полученный фурье-фильтрацией *2*. На рис. 3 изображены функция $\varphi(t)$ *1* и результат ее восстановления по методу МЭ (с энтропийным функционалом в форме Шеннона (4)) *2* с вычислением множителей Лагранжа на основе вышеописанной аналитической процедуры без итерационного поиска их точных значений. Из сравнения видно, что метод МЭ позволяет более точно восстановить профиль исходной функции $\varphi(t)$, нежели метод Фурье.

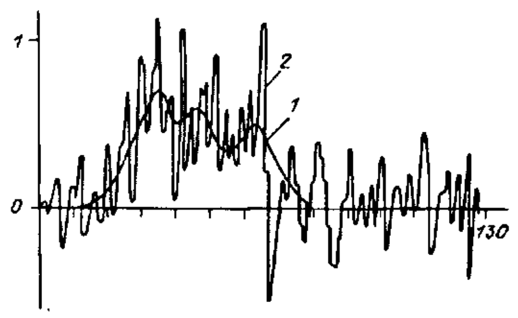

Рис. 1

Сделаем краткое резюме. В работе предложен теоретико-информационный подход к решению некорректных задач реконструкции функций, основанный на принципе максимальной энтропии. Предложен новый вычислительно-эффективный алгоритм реализации схемы решения задачи реконструкции функций по методу МЭ. Показано, что применение описанного подхода обеспечивает более качест-

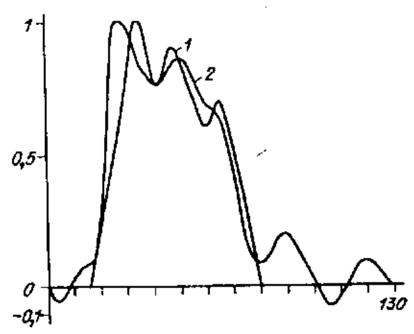

Рис. 2

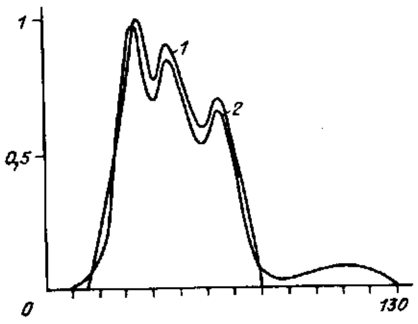

Рис. 3

венное восстановление профиля исходной функции (в смысле достижения сверхразрешения, сохранения амплитудных соотношений и формы максимумов), нежели линейный метод фурье-фильтрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов.—М.: Радио и связь, 1989.
2. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов.—М.: Мир, 1988.
3. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры.—М.: Недра, 1987.
4. Джейнс Э. Т. О логическом обосновании методов максимальной энтропии // ТИИЭР.—1982.—70, № 9.
5. Кей С. М., Марпл С. Л. Современные методы спектрального анализа: Обзор // ТИИЭР.—1981.—69, № 11.
6. Mead R. L. Approximate solution of Fredholm linear integral equation by the maximum entropy method // J. Math. Phys.—1986.—70, N 9.—P. 2403.
7. Кэдзоу Дж. А. Спектральное оценивание: Метод переопределенной системы уравнений рациональной модели // ТИИЭР.—1982.—70, № 9.
8. Аратский Д. Б., Солдатов Е. А., Фидельман В. Р. О вычислительных аспектах спектрального оценивания методом максимума энтропии.—Деп. в ВИНИТИ 10.03.87, № 1751-В87.

Поступило в редакцию 10 декабря 1990 г.

УДК 681.325.3

В. А. Козлачков, И. И. Коршевер, П. А. Полозков, И. Г. Ремель, К. В. Тесленко

(Новосибирск)

ОБНАРУЖЕНИЕ И ИСПРАВЛЕНИЕ ОШИБОК В НАКОПИТЕЛЯХ НА МАГНИТООПТИЧЕСКИХ ДИСКАХ

Кратко рассмотрены алгоритмы кодирования и декодирования в системе Рида — Соломона для оценки их сложности относительно требуемого быстродействия кодера — декодера (КОДЕКа), «на лету» исправляющего испорченные данные считываемой информации с магнитооптического диска с реверсивной записью. Описана реализация КОДЕКа, удовлетворяющего требованиям стандарта ISO, оценены параметры устройства. Намечены пути микроэлектронной реализации КОДЕКа.

Введение. Осваиваемые в настоящее время устройства оперативного хранения на магнитооптических дисках (МОД) чрезвычайно перспективны с точки зрения достигаемой плотности упаковки информации и удельной