

11. Шапиро А. С., Быкова Т. П. Твердотельные устройства записи ТВ программ и перспективы их использования // Техника кино и телевидения. — 1989. — № 7.
12. Городников А. С. Перспективы твердотельной записи аудиовизуальной информации // Техника кино и телевидения. — 1990. — № 2.

Поступило в редакцию 1 августа 1991 г.

УДК 621.391

Ю. И. Палагин

(Санкт-Петербург)

## АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ АВТОРЕГРЕССИИ — СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

Рассматриваются точные и приближенные методы моделирования случайных полей класса авторегрессии — скользящего среднего (АР — СС). Структура множества соседей, а также размерности пространства значений и аргумента поля произвольны. Для некаузальных моделей однородное (стационарное) решение определяется с помощью спектрального разложения. Исследуются переходные процессы и даются рекомендации по выбору параметров алгоритмов каузальных полей. Получена параметрическая модель произвольного векторного поля авторегрессии — скользящего среднего, адекватная на уровне первых двух моментов. Приводятся примеры.

Исследования сложных информационно-измерительных систем, устройств распознавания, анализа и обработки статистических данных, функционирующих в условиях действия случайных возмущений, требуют синтеза эффективных алгоритмов моделирования многомерных случайных полей (СП) и процессов [1—4]. Для различных классов случайных функций разработаны методы, позволяющие воспроизводить заданные вероятностные характеристики и в первую очередь математическое ожидание и корреляционную функцию (КФ) [5—12]. При обобщении известных рекуррентных алгоритмов моделирования стационарных случайных процессов АР — СС [5, 6] на поля возникают значительные трудности, обусловленные некаузальностью моделей [12, 13]. Оказываются существенными методические погрешности, вызванные переходными процессами. Ввиду многомерности аргумента  $x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$  моделируемого поля  $\xi(x) \in R^n$  резко возрастает затрачиваемое машинное время ЭВМ.

Настоящая статья посвящена обобщению методов моделирования случайных процессов и СП с непрерывным временем на многомерные поля класса АР — СС. Размерности пространства значений  $n$  и аргумента  $m$  произвольны. В работах [4, 12—14 и др.] АР-модели и модели скользящего среднего использовались как аппарат описания изображения подстилающих поверхностей. Поля предполагались каузальными, скалярными ( $n = 1$ ) и двумерными ( $m = 2$ ). Для некаузальных полей «чистой авторегрессии» (при  $n = 1, m = 2$ ) в [12] предложен приближенный метод, который использовался для машинного синтеза текстур. Как показано в [13], модели АР — СС возникают при дискретизации стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. Различным типам уравнений соответствуют как каузальные, так и некаузальные АР-схемы.

Описание поля. Определение решения. Рассмотрим стохастическое уравнение

$$\xi_k + \sum_{j \in D_\xi} A_j \xi_{k-j} = \sum_{j \in D_\eta} B_j \eta_{k-j}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathbb{C}^m$  —  $m$ -мерные векторы с целочисленными компонентами;  $\mathbb{C}$  — множество целых чисел;  $\eta_{\mathbf{k}}$  —  $l$ -мерное однородное в широком смысле случайное поле с нулевым средним  $M\eta_{\mathbf{k}} = 0$ ;  $A_j, B_j$  — заданные матрицы размерами  $n \times n$  и  $n \times l$  соответственно;  $D_{\xi}, D_{\eta}$  — «множества соседей» — конечные подмножества пространства  $\mathbb{C}^m$ . Множество  $D_{\xi}$  не содержит нулевого вектора. Частным случаем уравнения (1) является авторегрессионная модель

$$\xi_{\mathbf{k}} + \sum_{j \in D_{\xi}} A_j \xi_{\mathbf{k}-j} = B_0 \varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad (2)$$

где поле  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  —  $l$ -мерный векторный белый шум с характеристиками  $M\varepsilon_{\mathbf{k}} = 0$ ,  $M\varepsilon_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{j}}^T = I_l \delta_{\mathbf{k}\mathbf{j}}$ ;  $T$  — символ транспонирования;  $I_l$  — единичная матрица;  $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{j}}$  — многомерный символ Кронекера.

Представим поле  $\eta_{\mathbf{k}}$  с помощью спектрального разложения

$$\eta_{\mathbf{k}} = \int_{[-\pi, \pi]^m} e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{u}} H_{\eta}(\mathbf{u}) \varepsilon(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \quad (3)$$

Здесь интеграл  $m$ -мерный;  $\varepsilon(\mathbf{u})$  —  $l$ -мерное  $\delta$ -коррелированное случайное поле; матричная функция  $H_{\eta}(\mathbf{u})$  определяется условием  $S_{\eta}(\mathbf{u}) = H_{\eta}(\mathbf{u})H_{\eta}^*(\mathbf{u})$ ;  $S_{\eta}(\mathbf{u})$  — матричная спектральная плотность поля  $\eta_{\mathbf{k}}$ ;  $H_{\eta}^*(\mathbf{u})$  — матрица, сопряженная по Эрмиту,  $i^2 = -1$ .

Решение уравнения (1) определим в виде

$$\xi_{\mathbf{k}} = \int_{[-\pi, \pi]^m} e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{u}} H_{\xi}(\mathbf{u}) \varepsilon(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (4)$$

аналогичном полю (3) с подлежащей определению матрицей  $H_{\xi}(\mathbf{u})$  размером  $n \times l$ .

Подстановка интегралов (3), (4) в формулу (1) дает для матрицы  $H_{\xi}(\mathbf{u})$  следующие выражения:

$$H_{\xi}(\mathbf{u}) = W(e^{i\mathbf{u}})H_{\eta}(\mathbf{u}), \quad (5)$$

$$W(\mathbf{Z}) = (I_n + \sum_{j \in D_{\xi}} A_j \mathbf{Z}^{-j})^{-1} \sum_{j \in D_{\eta}} B_j \mathbf{Z}^{-j}, \quad (6)$$

где для  $m$ -мерного вектора  $\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_m)$  с комплексными компонентами  $z_k$  использованы символы

$$\mathbf{Z}^{-j} = z_1^{-j_1} z_2^{-j_2} \dots z_m^{-j_m}, \quad \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_m);$$

$$\mathbf{Z} = e^{i\mathbf{u}} = (e^{iu_1}, e^{iu_2}, \dots, e^{iu_m}).$$

Поле (4) определено и является однородным в широком смысле, если выполнено условие

$$\int_{[-\pi, \pi]^m} S_{\eta} H_{\xi}(\mathbf{u}) H_{\xi}^*(\mathbf{u}) d\mathbf{u} < \infty,$$

которое равносильно тому, что матричная функция

$$\Phi(\mathbf{Z}) = I_n + \sum_{j \in D_{\xi}} A_j \mathbf{Z}^{-j}$$

на окружностях  $|z_k| = 1$ ,  $k = 1, \dots, m$ , имеет обратную.

В этом случае матричная спектральная плотность поля (1) равна

$$S_{\xi}(\mathbf{u}) = W(e^{i\mathbf{u}}) S_{\eta}(\mathbf{u}) W^T(e^{-i\mathbf{u}}) \quad (7)$$

и является дробно-рациональной функцией при

$$\eta_k = \varepsilon_k, S_{\eta}(u) = (2\pi)^{-m} I_l = \text{const.}$$

$$D_{\xi} = \prod_{i=1}^m [0, p_i] \setminus \{0\}, \quad D_{\eta} = \prod_{i=1}^m [0, q_i], \quad (8)$$

где  $p_i, q_i \in N = \{0, 1, \dots\}$  — натуральные числа. Тогда поле  $\xi_k$  допускает следующее представление:

$$\xi_k = \sum_{j \in N^m} C_j \eta_{k-j}, \quad (9)$$

коэффициенты которого — матричные функции  $C_k$  размером  $n \times l$  — удовлетворяют уравнению

$$C_k + \sum_{j \in \tilde{D}_{\xi}} A_j C_{k-j} = \begin{cases} B_k, & \text{если } k \in D_{\eta}, \\ 0, & \text{если } k \notin D_{\eta}. \end{cases} \quad (10)$$

В формуле (10) при суммировании по области  $\tilde{D}_{\xi}$  индексы  $j_i$  принимают значения

$$0 \leq j_i \leq \min\{k_i, p_i\}, \quad \sum_{i=1}^m j_i^2 > 0.$$

Множество  $N^m$  определяется как  $m$ -я декартова степень множества  $N$ . Если  $k = 0$ , то  $\tilde{D}_{\xi}$  — пустое множество, поэтому  $C_0 = B_0$ . Остальные значения  $C_k$  находятся из уравнения (10) последовательно.

Уравнение (10) получается путем подстановки выражения (9) в формулу (1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых значениях поля  $\eta_k$ .

Если поле  $\eta_k = \varepsilon_k$  — белый шум, то справедливы следующие выражения для матричных корреляционных функций:

$$R_{\xi}[k+j, k] = M \varepsilon_{k+j} \xi_k^T = \begin{cases} C_{-j}^T, & -j \in N^m, \\ 0, & -j \notin N^m, \end{cases} \quad (11)$$

$$R[j] + \sum_{i \in \tilde{D}_{\xi}} A_i R[j-i] = \sum_{i \in \tilde{D}_{\eta}} B_i C_{i-j}^T. \quad (12)$$

Здесь  $R[j] = M \xi_{k+j} \xi_k^T$ , множество  $\tilde{D}_{\eta}$  включает те элементы множества  $D_{\eta}$ , для которых выполнены неравенства  $i_1 \geq j_1, \dots, i_m \geq j_m$ .

Формула (11) непосредственно следует из представления (9). Вывод (12) осуществляется умножением левой и правой частей равенства (1) на величину  $\xi_{k-j}^T$  и переходом к математическим ожиданиям. Выражения (11), (12) являются обобщениями уравнений Юла—Уолкера в теории временных рядов [15]. Для скалярных ( $n = 1$ ) двумерных ( $m = 2$ ) полей авторегрессии (2) правая часть уравнения (12) равна  $B_0^2$  и уравнение (12) совпадает с известными формулами [14].

**Возможности точного моделирования.** Для моделирования реализаций на фрагменте  $D = \{k \in [0, N_1] \times \dots \times [0, N_m]\}$  необходимо вначале задать значения поля  $\xi_k$  и белого шума  $\varepsilon_k$  на границе  $D_{\text{гп}}$  области  $D$ . После получения граничных значений моделирование не вызывает трудностей. Оно осуществ-

ляется рекуррентно по формуле (1). Вид границы применительно к двумерному полю указан на рис. 1.

$$\left[ \begin{array}{c} i=1 \\ \dots \\ i=1 \end{array} \right]$$

Размерность вектора  $\varepsilon^0$  определяется аналогичной формулой. Рассмотрим гауссовы поля. В этом случае совместное распределение  $(\xi^0, \varepsilon^0)$  нормальное, имеет нулевое среднее и блочную корреляционную матрицу

$$R_\eta = \begin{bmatrix} R_\xi^0 & R_{\xi^0 \varepsilon^0}^T \\ R_{\varepsilon^0 \xi^0} & R_\varepsilon^0 \end{bmatrix}.$$

Для модели АР вида (2) матрица  $R_{\varepsilon^0 \xi^0}$  равна нулю; в общем случае необходимо учитывать взаимную коррелированность  $\xi^0$  и  $\varepsilon^0$ . Вектор  $\varepsilon^0$  моделируется как стандартный нормальный. Моделирование  $\xi^0$  осуществляется как моделирование условно гауссова вектора с параметрами

$$M\{\xi^0 | \varepsilon^0\} = R_{\varepsilon^0 \xi^0}^T \varepsilon^0, \quad (14)$$

$$\text{cov}\{\xi^0 | \varepsilon^0\} = R_\xi^0 - R_{\varepsilon^0 \xi^0}^T R_{\varepsilon^0 \varepsilon^0}^{-1} R_{\varepsilon^0 \xi^0}.$$

Матрицы, входящие в выражение (14), вычисляются по формулам (10) — (12).

Рассмотрим модель скалярного  $m$ -мерного СП с мультипликативными спектральными плотностями и КФ:

$$S_\xi(u) = \prod_{i=1}^m S_i(u_i), \quad R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \prod_{i=1}^m \rho_i(\tau_i), \quad (15)$$

где  $\sigma_\xi^2$  — дисперсия СП;  $S_i(u_i)$ ,  $\rho_i(\tau)$  — одномерные спектральные плотности и нормированные КФ (НКФ). Функции  $\rho_i(\tau)$  равны типовым НКФ стационарных случайных процессов

$$\begin{aligned} \rho_1(\tau) &= e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau, \quad \rho_2(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|), \\ \rho_3(\tau) &= e^{-\alpha|\tau|} (\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau). \end{aligned} \quad (16)$$

Хорошо известны моделирующие алгоритмы для процессов с НКФ вида (16), основанные на уравнении АР — СС:

$$\xi_t = a_1 \xi_{t-1} + a_2 \xi_{t-2} + b_0 \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1}, \quad t = 2, 3, \dots,$$

где параметры  $a_1, \dots, b_1$  связаны с параметрами НКФ (16) формулами, приве-

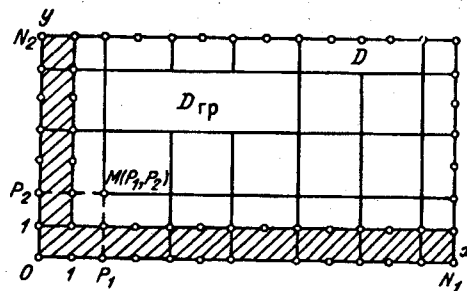


Рис. 1

денными, например, в [5, 6]. Ввиду мультипликативности модели (15) коэффициенты  $A_j, B_j$  уравнения (1) легко вычисляются по значениям  $a_1, \dots, b_1$ . Для моделирования процессов необходимо сформировать 4-мерный вектор начальных условий  $(\xi_0, \xi_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$ . Значения размерности векторов  $\xi^0$  и  $\varepsilon^0$  для двух- и трехмерных СП, моделируемых на кубе, приведены в табл. 1 (третьи и четвертые столбцы). Первые столбцы табл. 1 содержат данные о числе точек

Двумерные поля				Трёхмерные поля			
$1 + N$	$(1 + N)^2$	$\dim \xi^0$	$\dim e^0$	$1 + N$	$(1 + N)^3$	$\dim \xi^0$	$\dim e^0$
50	$2,5 \cdot 10^3$	196	99	14	2744	1016	547
100	$10^4$	396	199	22	10648	2648	1387
141	19881	560	281	27	19683	4058	2107

$(N + 1)$  на ребре, вторые — общее число точек поля.

Приведенные данные показывают, что в отличие от процессов размерность вектора  $\eta^0$  граничных условий поля зависит от размера области и резко возрастает с увеличением  $m$ . Громоздкие, требующие значительного объема вычислительные операции с корреляционными матрицами большой ( $\sim 10^4 + 10^8$ ) размерности ограничивают возможности точных алгоритмов моделирования полей АР — СС.

Приближенное моделирование. Оценки переходных процессов. Рассмотрим простейший способ моделирования поля (1), (8), при котором граничные условия заменяются нулевыми. Чтобы избежать влияния переходных процессов, вне области  $D$  формируется переходная область  $D_n$  (рис. 2). Определим ее размеры  $N_i^n$ . Полагаем, что поле имеет характеристики вида (15), (16). Из формулы (9) следуют выражения

$$\xi_k = \sum_{j=0}^{k+N_n} c_j \varepsilon_{k-j}, \quad \sigma^2[\xi_k] = \sum_{j=0}^{k+N_n} c_j^2,$$

где  $N_n = (N_1^n, \dots, N_m^n)$ , векторы  $j, k$  и сумма  $m$ -мерные. Из условия (15) мультипликативности поля получаем

$$c_j = \prod_{i=1}^m c_{ji}, \quad \sigma^2[\xi_k] = \prod_{i=1}^m \sum_{j_i=0}^{k_i+N_i^n} c_{ji}^2.$$

Пределом дисперсии  $\sigma^2[\xi_k]$  переходного процесса является дисперсия  $\sigma_\xi^2$  однородного поля, которую положим равной  $\sigma_\xi^2 = 1$ . Условие окончания переходного процесса имеет вид

$$1 - \left\{ \sum_{j=0}^{k+N_n} c_j^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon_*, \quad j \in N^m. \quad (17)$$

Здесь  $\varepsilon_*$  — заданное малое число. Примем  $k = 0$ ,  $\rho_i(\tau_i) = \rho(\tau_i)$ ,  $N_i^n = N_n$ , тогда неравенство (17) преобразуется так:

$$1 - \left\{ \sum_{k=0}^{N_n} c_k^2 \right\}^{m/2} < \varepsilon_*. \quad (18)$$

Одномерные коэффициенты  $c_k$  согласно уравнению (10) вычисляются рекуррентно:

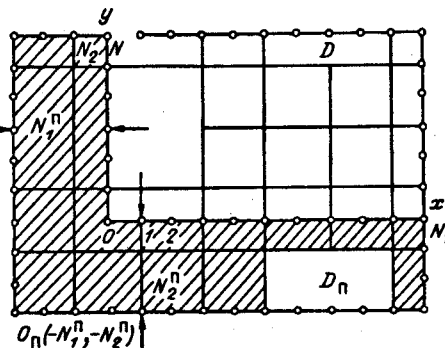


Рис. 2

Таблица 2

$\bar{\beta}$	$N_{\Pi}$ при $\epsilon_* = 5\%$				$N_{\Pi}$ при $\epsilon_* = 1\%$			
	Размерность поля							
	1	2	3	4	1	2	3	4
0	22	29	33	35	38	44	48	51
2	14	31	35	37	39	43	45	47
3	27	31	34	36	39	53	56	57

Таблица 3

$m$	$N_{\Pi}$ при $\epsilon_* = 5\%$ ; $\beta = 0$ и равных значениях $\rho(\Delta)$						
	0	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	0,99
1	0	1	2	5	11	22	115
2	0	1	3	6	14	29	149
3	0	2	3	7	16	33	168

$$c_0 = b_0, \quad c_1 = b_1 + a_1 c_0, \quad c_k = a_1 c_{k-1} + a_2 c_{k-2}. \quad (19)$$

По формулам (18), (19) для полей с КФ (16) проводились расчеты размеров  $N_{\Pi}$  (числа строк) переходной области (табл. 2, КФ  $\rho_1(\tau)$ ,  $\bar{\beta} = \beta/\alpha$ ). Шаг дискретизации по  $i$ -й координате выбирался из условия  $\rho(\Delta) = 0,95$ . Влияние шага дискретизации на величину  $N_{\Pi}$  иллюстрирует табл. 3. Относительную величину переходной области (соответственно возрастанию затрат машинного времени) характеризует показатель

$$K_{\Pi} = \frac{N_{\Sigma}}{N_{\text{тр}}} = \prod_{i=1}^m \left( 1 + \frac{N_i^m}{1 + N_i} \right),$$

где  $N_{\text{тр}} = \prod_{i=1}^m (1 + N_i)$  — число точек моделируемого СП,  $N_{\Sigma} = N_{\text{тр}} + N(D_{\Pi})$  — общее число точек,  $N(D_{\Pi})$  — число дискрет в переходной области. Значения показателя при моделировании поля на  $m$ -мерном кубе ( $m = 2$  и  $3$ ;  $\beta = 0$ ;  $\epsilon_* = 5\%$ ;  $\rho(\Delta) = 0,95$ ) приведены в табл. 4. Для трехмерных СП величина  $N(D_{\Pi})$  может превосходить  $N_{\text{тр}}$  на порядок.

Параметрические модели полей АР — СС. Рассмотрим представление

$$\eta_N[\mathbf{k}] = N^{-0,5} \sum_{j=1}^N \xi(\mathbf{k}, \Omega_j), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}^m, \quad (20)$$

$$\begin{cases} \xi(\mathbf{k}, \Omega) = \sqrt{2}(2\pi)^{-m/2} [\beta_s \sin \alpha_k + \beta_c \cos \alpha_k], \\ \alpha_k = \mathbf{v}^T \mathbf{k} + \varphi, \beta_s = W^R(e^{i\varphi}) Z \psi^{-1/2}(\mathbf{v}), \\ \beta_c = W^I(e^{i\varphi}) Z \psi^{-1/2}(\mathbf{v}), \end{cases} \quad (21)$$

где  $\Omega_j$  — независимые реализации случайного вектора  $\Omega = (\varphi, \mathbf{v}, \mathbf{Z})$ ;  $N$  — число реализаций;  $\varphi$  — случайная величина с равномерным законом распределения на промежутке  $[0, 2\pi]$ ;  $\mathbf{Z} \in R^l$  —  $l$ -мерный случайный вектор со свойствами:  $M\mathbf{Z} = 0$ ,  $M\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = I$ ;  $\mathbf{v}$  —  $m$ -мерный случайный вектор со значениями в кубе  $D = [-\pi, \pi]^m$  и плотностью распределения  $\psi(\mathbf{u}) > 0$ ;

плотностью распределения  $\psi(\mathbf{u}) > 0$ ;  $W^R(\cdot)$ ,  $W^I(\cdot)$  — соответственно вещественная и мнимая части функции (6) в случайной  $m$ -мерной точке  $e^{i\varphi}$ .

Непосредственное вычисление показывает, что первые два момента полей  $\xi(\mathbf{k}, \Omega)$  и (1) совпадают. Усреднение реализаций по формуле (20) приводит к нормализации конечномерных распределений без изменения корреляционных свойств. Поэтому

Таблица 4

Двумерные поля			Трехмерные поля		
$1 + N$	$N_{\text{тр}}$	$K_{\Pi}$	$1 + N$	$N_{\text{тр}}$	$K_{\Pi}$
50	$2,5 \cdot 10^3$	2,4	14	2744	37,8
100	$10^4$	1,7	22	10648	15,6
141	19881	1,45	27	19683	11

представление (20), (21) позволяет моделировать реализации поля AP — СС.

Формулы (20), (21) аналогичны параметрическим моделям векторных полей с непрерывным аргументом [8—10]. Однако плотность распределения  $\psi(u)$ , в качестве которой может приниматься произвольная функция, и значения вектора  $v$  сосредоточены в кубе  $D$ .

В частности, вектор  $v$  может иметь равномерный закон распределения на кубе.

**Заключение.** Определение решения многомерного поля AP — СС с помощью спектрального разложения (4)—(6) не дает в явном виде алгоритмов цифрового моделирования. В отличие от стационарных случайных процессов возможности точной имитации полей (1) ограничены специальным видом (8) (каузальностью) множества соседей и возникающими (в связи с необходимостью моделирования больших массивов граничных условий) проблемами вычислительного характера.

Естественный приближенный способ моделирования, основанный на нулевых граничных условиях, прост и удобен в реализации. Однако для его применения требуются каузальность и «холостые прогонки» модели, устраняющие переходные процессы. Выполненные расчеты показывают, что объем вычислений, затрачиваемых на устранение переходных процессов, может превосходить прямые затраты на моделирование поля более чем на порядок.

Имитационная параметрическая модель (20), (21) позволяет генерировать реализации полей AP — СС без методических ошибок по КФ и переходных процессов. Несущественны вид и структура множества соседей, размерности пространства значений и аргумента поля, условие каузальности. Представления (20), (21) могут рассматриваться как дискретизация спектрального разложения (4) в случайных узлах  $u = v_j \in R^m$ . При этом погрешность моделирования конечномерных законов распределения (см. [10]) и эргодических свойств не зависит от размерности аргумента СП. Это свойство обеспечивает качественное (на несколько порядков) повышение быстродействия алгоритмов по сравнению с другими методами дискретизации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левшин В. Л. Обработка информации в оптических системах пеленгации.—М.: Машиностроение, 1978.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений.—М.: Мир, 1982.—Ч. 2.
3. Андреев Г. А., Базарский О. В. и др. Анализ и синтез случайных пространственных текстур // Зарубеж. радиоэлектрон.—1984.—№ 2.
4. Белокуров А. А., Сечко В. В. Стохастические модели в задачах анализа и обработки изображений // Зарубеж. радиоэлектрон.—1989.—№ 5.
5. Шалыгин А. С., Палагин Ю. И. Прикладные методы статистического моделирования.—Л.: Машиностроение, 1986.
6. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.—М.: Сов. радио, 1971.
7. Михайлов Г. А. Численное построение случайного поля с заданной спектральной плотностью // ДАН СССР.—1978.—238, № 4.
8. Палагин Ю. И. Негармонические модели параметрических представлений случайных процессов и полей // Автометрия.—1985.—№ 4.
9. Палагин Ю. И. Синтез параметрических представлений при математическом моделировании векторных случайных полей и процессов // АиТ.—1983.—№ 4.
10. Палагин Ю. И., Чернов И. В. Анализ погрешности и выбор параметров моделей при статистическом моделировании случайных полей и процессов // АиТ.—1988.—№ 8.
11. Палагин Ю. И., Федотов С. В., Шалыгин А. С. Параметрические модели для статистического моделирования векторных неоднородных случайных полей // АиТ.—1990.—№ 6.
12. Chellapa R., Kashyap R. L. Texture synthesis, using 2D-noncausal autoregressive models // IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Process.—1985.—ASSP-33, N 1.—P. 194.
13. Джайн А. К. Успехи в области математических моделей для обработки изображений // ТИИЭР.—1981.—69, № 5.

14. Tou J. T. Pictorial feature extraction and recognition via image modeling // Image Modeling.— 1981.—Р. 391.

15. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.—М.: Мир, 1976.

Поступило в редакцию 6 февраля 1991 г.

УДК 621.391.244 : 517.587

В. И. Тарасов

(Москва)

## МЕТОД АНАЛИЗА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ КРИВЫХ РЕЛАКСАЦИЙ

Развит метод высокого разрешения для расчета на ЭВМ многокомпонентных экспоненциальных кривых затухания. Анализ основан на преобразовании экспериментальных данных, представляющих собой сумму экспоненциальных кривых, в интегральное уравнение Фредгольма I рода типа свертки. Уравнение численно решалось для произвольного числа компонент относительно искомым параметрам — времен жизни и предэкспоненциальных множителей для каждой компоненты с использованием спектральных окон типа Лайоша, Фейера и других — и методами управляемой линейной фильтрации. Подход удобен для анализа кривых затухания в широком временном интервале. Развитый метод позволяет разделить две экспоненциальные кривые, различающиеся на фактор 3 при 1 % и на фактор 5 при 7 % аддитивного гауссового шума в тех же данных. При использовании предварительной шумовой фильтрации (робастные методы, метод максимума энтропии) можно обрабатывать данные, содержащие до 50—100 % шума.

**Введение.** Необходимость математического анализа процессов, содержащих многокомпонентные кривые затухания, возникает при изучении целого ряда биологических систем, например, при решении скоростных уравнений в химической и ферментативной кинетике, анализе характера гормон-рецепторного связывания и т. д.

При исследовании взаимодействия лиганд-рецептора экспериментальные данные моделируются как линейная комбинация экспоненциальных кривых затухания вида

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i e^{-\lambda_i t}, \quad t > 0, \lambda_i > 0. \quad (1)$$

В математическом отношении проблема заключается в определении  $N_1$  — произвольного числа компонент и параметров,  $\lambda_i$  — времен жизни и  $\alpha_i$  — предэкспоненциальных множителей для каждой компоненты из численно-табулированной функции  $f(t)$  из (1).

Существует несколько подходов решения этой проблемы: графический метод [1], алгебраический, основанный на методе Прони [2], итеративный или нелинейный метод наименьших квадратов [3], метод Паде — Лапласа [4], наиболее современный метод максимума энтропии [5], метод максимума правдоподобия [6] и метод фазовой плоскости, робастные методы оценивания.

Подходом, наиболее удобным для анализа непрерывных распределений времен затухания и не предполагающим *a priori* никаких начальных знаний относительно распределения времен затухания, является фурье-метод восстановления свертки. Этот метод был введен Рослером и соавторами [7]. Математически эквивалентный подход был дан в [8].

**Теория.** Уравнение (1) можно представить в виде интегрального уравнения с экспоненциальным ядром типа Лапласа: