3. Зайцев А. П., Кожуховский А. Д., Литвин А. И. Об алгоритмах быстрых преобразований Уолша.—Томск, 1986.—Деп. в ВИНИТИ 11.05.86, № 3764-В86.
4. Литвин А. И., Кожуховский А. Д. Обобщение кронекеровского произведения матриц и его применение // Междунар. конф. по алгебре: Тез. докл.—Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989.
5. Ярмолик В. Г. Алгоритмы технического диагностирования дискретных устройств.—Минск: Наука и техника, 1988.
6. Маликов В. Т., Кожуховский А. Д., Литвин А. И. Тестовый контроль ЭВМ // VIII Всесоюз. науч.-техн. конф. «Измерительные информационные системы»: Тез. докл.—Ташкент: ТашПИ, 1987.
7. Кожуховский А. Д., Литвин А. И. Векторизация алгоритмов быстрого преобразования Уолша — Пэли // XI Всесоюз. семинар секции «Теория информации» ЦП ВНТО РЭС им. А. С. Попова: Тез. докл.—Ульяновск: УлПИ, 1989.

*Поступила в редакцию 9 января 1990 г.*

---

УДК 621.391.26 : 621.396.96 : 519.24

Р. П. Филимонов

*(Санкт-Петербург)*

# АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАНГОВОГО АЛГОРИТМА ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

На примере двух двухвыборочных алгоритмов — параметрического локально-оптимального для помехи, распределенной по закону $\chi$-квадрат, и классического непараметрического алгоритма Вилкоксона, оптимального для логистической помехи, рассматривается задача о сравнительной устойчивости алгоритмов при произвольном (глобальном) отклонении распределения помех от модели, характеризующей оптимальный алгоритм. Устойчивость оценивается величиной потери эффективности одного алгоритма по отношению к другому (метод Ходжеса—Лемана), для чего в работе конструируется функционал локальной сравнительной асимптотической эффективности алгоритмов. Путем решения вариационной задачи найдены экстремальные значения функционала и вид плотности распределения помех, на которой достигается экстремаль. Показано, что непараметрический алгоритм обладает большой устойчивостью при изменении помеховой ситуации.

Широкое применение в настоящее время при решении задач обнаружения сигналов находят непараметрические алгоритмы, основанные на ранговых статистиках [1—3]. В последнее время методы непараметрической статистики начинают использоваться и для решения задач обработки изображений [4, 5]. Это связано, в частности, с тем, что параметрические алгоритмы, основанные, например, на статистиках отношения правдоподобия (ОП), как правило, обладают недостаточной устойчивостью. В статистическом смысле это означает, что эффективность таких алгоритмов существенно снижается при отклонении действительной помеховой ситуации от заданной теоретической модели, предполагавшейся при синтезе ОП. Неоднократно высказывалась гипотеза, что одним из достоинств ранговых алгоритмов является их бóльшая по сравнению с параметрическими алгоритмами устойчивость, поскольку ранговые алгоритмы ориентированы на работу в условиях априорной неопределенности сведений о распределениях сигнала и помех [1, 6]. Естественно поэтому ожидать, что во многих практически важных случаях эффективность ранговых алгоритмов при изменении помеховой обстановки будет изменяться незначительно, в результате чего ранговые алгоритмы могут оказаться более эффективными, чем алгоритмы ОП. В силу изложенного исследование устойчивости ранговых алгоритмов важно для ответа на вопрос о целесообразности их практического применения.

Многие прикладные задачи обнаружения сигналов могут быть сведены к следующей классической задаче проверки гипотезы однородности двух выборок. Пусть $g(x)$ — плотность распределения помехи, а $g(y-\theta)$ — плотность распределения аддитивной смеси помехи и сигнала с амплитудой $\theta$. В ходе эксперимента регистрируются две выборки наблюдений $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$ объемом $n$ с независимыми элементами. По результатам статистической обработки наблюдений необходимо ответить на вопрос: являются ли обе выборки наблюдений шумовыми (гипотеза $H_0$) или одна из выборок содержит сигнал $\theta$, а другая остается шумовой (гипотеза $H_1$).

Для решения указанной задачи часто используется классический непараметрический двухвыборочный алгоритм Вилкоксона $W_{n,n}$, локально оптимальный (в классе ранговых алгоритмов) для логистической помехи со сдвигом и основанный на статистике [7]:

$$W_{n,n} = \sqrt{2n} \int_0^\infty \bar{F}_n(x) dG_n(x) - 1/2, \tag{1}$$

где $\bar{F}_n(x)$ и $G_n(x)$ — эмпирические интегральные функции распределений, построенные по первой и второй выборкам наблюдений.

Анализ устойчивости алгоритма (1) проведем путем сравнения его с двухвыборочным параметрическим алгоритмом $X_{n,n}$, основанным на статистике [8] и локально-оптимальным для помехи, распределенной по закону $\chi$-квадрат:

$$X_{n,n} = \sqrt{2n} \left( \left( \sum_{i=1}^{n} x_i / \sum_{i=1}^{n} y_i \right) - 1 \right). \tag{2}$$

Для определенности в дальнейшем полагаем, что сигнал присутствует в первой выборке $(x_1, x_2, ..., x_n)$, а наблюдаемые случайные величины положительны.

В случае выборок достаточно большого объема в теории проверки статистических гипотез принято оценивать эффективность действия алгоритмов с помощью понятия меры эффективности (МЭ) [9]. МЭ является характеристикой «расстояния» между предельными распределениями статистик алгоритмов при альтернативе и гипотезе, которое достигается в результате обработки наблюдений с помощью данного алгоритма при $n \to \infty$. Как правило, МЭ выражается в терминах отношения сигнал/шум и показывает, какой объем выборки $n_1$ необходим алгоритму $t_n^{(1)}$ для обнаружения сигнала с заданной вероятностью ошибок первого и второго рода. Для сравнения эффективности работы двух алгоритмов вводится понятие коэффициента асимптотической относительной эффективности (АОЭ) $e(t_n^{(1)}, t_n^{(2)})$, определяемого как отношение их МЭ $\rho$:

$$e(t_n^{(1)}, t_n^{(2)}) = \lim_{n \to \infty} \rho_1 / \rho_2. \tag{3}$$

В общем случае, когда плотность распределения помех $g(x)$ неизвестна, выражение для АОЭ представляет собой функционал, заданный на множестве функций распределения. Решение задачи на устойчивость сводится при этом к нахождению экстремальных значений функционала АОЭ (метод Ходжеса — Лемана [10]).

Используя результаты работ [8, 11] и определение МЭ [9], можно записать выражения для МЭ сравниваемых алгоритмов в виде

$$\rho(W_{n,n}) = 3\varepsilon_W^2/(\theta), \tag{4}$$

$$\rho(X_{n,n}) = \frac{\varepsilon_X^2(\theta) \left( \int_0^\infty x g(x) dx \right)^2}{4 \left[ \int_0^\infty x^2 g(x) dx - \left( \int_0^\infty x g(x) dx \right)^2 \right]}, \tag{5}$$

где функция сигнала $\varepsilon(\theta)$ определяется как асимптотическое значение математического ожидания соответствующей статистики при альтернативе [11].

Дальнейшее рассмотрение ограничим практически наиболее важным случаем обнаружения слабых сигналов. Это означает, что от точных выражений для МЭ (3) и (4) необходимо перейти к их так называемым главным частям, определяемым старшим членом по $\theta$ в разложении в ряд Тейлора функции $\varepsilon(\theta)$ при условии малости сигнала $\theta(\theta \to 0)$. Будем считать, что рассматриваемый класс плотностей $g(x)$ удовлетворяет следующим условиям регулярности, обычно имеющим место на практике: $g(0) = g(\infty) = 0$ и $xg(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Это позволяет распространить полученные результаты и на случай обработки изображений.

Для алгоритма $X_{n,n}$ в силу теоремы Гливенко — Кантелли [12] можно записать:

$$\varepsilon_X(\theta) = \frac{\int\limits_0^\infty xg(x-\theta)dx}{\int\limits_0^\infty xg(x)dx} - 1 = \frac{\int\limits_0^\infty x\left(g(x) - \theta\frac{g'(x)}{1!} + \theta^2\frac{g''(x)}{2!} - \dots\right)dx}{\int\limits_0^\infty xg(x)dx} - 1. \qquad (6)$$

Ограничиваясь в выражении (6) членом первого порядка по $\theta$ и выполняя интегрирование по частям, получим

$$\varepsilon_X(\theta) \underset{\theta\to 0}{=} \frac{\theta}{\int\limits_0^\infty xg(x)dx} + o(\theta^2). \qquad (7)$$

Тем же методом находится главная часть функции $\varepsilon_W(\theta)$ в (4):

$$\varepsilon_W(\theta) = \int\limits_0^\infty G(x)\left(g(x) - \theta\frac{g'(x)}{1!} + \theta^2\frac{g''(x)}{2!} - \dots\right)dx - \frac{1}{2} =$$

$$\underset{\theta\to 0}{=} -\theta\int\limits_0^\infty G(x)g'(x)dx = \theta\int\limits_0^\infty g^2(x)dx + o(\theta^2). \qquad (8)$$

Подставляя локальные представления (7) и (8) в определения МЭ (4) и (5), нетрудно видеть, что согласно (3) функционал АОЭ $J(g(x))$ сравниваемых алгоритмов выражается в виде

$$J(g(x)) = \frac{\rho(W_{n,n})}{\rho(X_{n,n})} = 12\left(\int\limits_0^\infty g^2(x)dx\right)^2\left(\int\limits_0^\infty x^2g(x)dx - \left(\int\limits_0^\infty xg(x)dx\right)^2\right). \qquad (9)$$

Легко построить пример, показывающий, что функционал (9) может принимать бесконечные значения. Действительно, пусть плотность распределения $g(x) = \frac{5(\sqrt{5-\sqrt{5}})\,x}{4\pi\sqrt{2}(1+x^{5/2})}$. В этом случае интеграл $\int\limits_0^\infty x^2g(x)dx$ расходится, и, следовательно, верхняя грань функционала (9) равна бесконечности.

Характерной особенностью рассматриваемого функционала является его инвариантность к изменению параметра масштаба $\sigma$. Переходя к новой переменной $y = x/\sigma$, можно записать плотность вероятности в виде $g(y) = \frac{1}{\sigma}g\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ и соответственно переписать функционал (9) в терминах новой переменной:

$$\left(\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sigma^2}g\left(\frac{x}{\sigma}\right)dx\right)^2\left(\int\limits_0^\infty x^2\frac{1}{\sigma}g\left(\frac{x}{\sigma}\right)dx - \left(\int\limits_0^\infty x\frac{1}{\sigma}g\left(\frac{x}{\sigma}\right)dx\right)^2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_0^\infty g^2(y)dy\right)^2\left(\int\limits_0^\infty \sigma^4y^2g(y)dy - \left(\int\limits_0^\infty \sigma^2yg(y)dy\right)^2\right). \qquad (10)$$

Из тождества (10) следует, что можно выбрать значения параметра масштаба $\sigma^2$ таким образом, чтобы разностный член в выражении (9) равнялся единице, и искать минимум функционала

$$J_1(g(x)) = \int_0^\infty g^2(x)dx \tag{11}$$

при условиях

$$\int_0^\infty g(x)dx = 1 \text{ и } \int_0^\infty x^2 g(x)dx - \left(\int_0^\infty xg(x)dx\right)^2 = 1. \tag{12}$$

Задача нахождения минимума функционала (11) может быть решена методом неопределенных множителей Лагранжа. Введя в рассмотрение множители $\lambda_1$ и $\lambda_2$, запишем функцию Лагранжа $L(g(x))$ рассматриваемой задачи:

$$L(g(x)) = \int_0^\infty \left(g^2(x) - \lambda_1 g(x) - \lambda_2\left(x^2 g(x) - xg(x)\int_0^\infty yg(y)dy\right)\right)dx. \tag{13}$$

Вычисляя первую производную по параметру $t$ от вариации $L(g(x) + th(x))'_t\Big|_{t=0}$ и приравнивая ее нулю, найдем, что инфимум функционала (11) достигается на плотности

$$g(x) = \frac{\lambda_1}{2} - \lambda_2 mx + \lambda_2\frac{x^2}{2}, \tag{14}$$

где $m = \int_0^\infty xg(x)dx$, $x \geq 0$.

Из структуры выражения (14) следует, что поскольку плотность $g(x)$ не может быть отрицательной, то найдется такая точка $x = \hat{x}$, в которой плотность $g(x)$ обращается в нуль. Следовательно, плотность (14), обеспечивающая инфимум функционала (11), оказывается усеченной. Для нахождения коэффициентов $\lambda_1$ и $\lambda_2$, параметра $m$ и значения точки усечения необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^{\hat{x}} g(x)dx = 1, \\ \int_0^{\hat{x}} xg(x)dx = m, \\ \int_0^{\hat{x}} x^2 g(x)dx = 1 + m^2, \\ g(\hat{x}) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

где $g(x)$ определяется (14). Выполняя в (15) интегрирование, перейдем к эквивалентной системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1\hat{x}}{2} - \frac{\lambda_2 m\hat{x}^2}{2} + \frac{\lambda_2\hat{x}^3}{6} = 1, & \text{(a)} \\ \frac{\lambda_1\hat{x}^2}{4} - \frac{\lambda_2 m\hat{x}^3}{3} + \frac{\lambda_2\hat{x}^4}{8} = m, & \text{(b)} \\ \frac{\lambda_1\hat{x}^3}{6} - \frac{\lambda_2 m\hat{x}^4}{4} + \frac{\lambda_2\hat{x}^5}{10} = 1 + m^2, & \text{(c)} \\ \lambda_1 = -\lambda_2(\hat{x}^2 - 2m\hat{x}). & \text{(d)} \end{cases} \tag{16}$$

Подставляя (16d) в (16a), найдем, что

$$\lambda_2 = -\frac{2}{\hat{x}^2\left(\frac{2\hat{x}}{3} - m\right)}, \quad \lambda_1 = \frac{2(\hat{x}^2 - 2m\hat{x})}{\hat{x}^2\left(\frac{2\hat{x}}{3} - m\right)}.$$

Подставляя промежуточные выражения для множителей $\lambda_1$ и $\lambda_2$ в (16b), получим, что $\hat{x} = 2m$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -3/2m^3$. Используя полученные значения и (16c), найдем, что значение математического ожидания $m$ определяется уравнением $m^2 = 5$. Следовательно, $m = \sqrt{5}$; $\lambda_2 = -\frac{3\sqrt{5}}{50}$ и $\hat{x} = 2\sqrt{5}$. Подставляя, наконец, численные значения параметров в (14), найдем, что минимальное значение функционала (9) достигается на экстремали

$$g(x) = -\frac{3\sqrt{5}}{50}\left(\frac{x^2}{2} - \sqrt{5}x\right)$$

и равно

$$J(g(x)) = 12\left(\int_0^{\hat{x}} g^2(x)dx\right)^2 = 0{,}864. \tag{17}$$

Полученный результат показывает, что в случае самой неблагоприятной помехи ранговый алгоритм Вилкоксона будет лишь весьма незначительно проигрывать алгоритму ОП, в то время как выигрыш в эффективности рангового алгоритма при других распределениях помех может достигать сколь угодно больших значений. Заметим при этом, что полученное численное значение нижней грани функционала в точности совпадает с известным результатом Ходжеса и Лемана, впервые исследовавших границы АОЭ алгоритма Вилкоксона по сравнению со статистикой Стьюдента [10]. Этот классический результат Ходжеса и Лемана послужил в свое время мощным толчком к применению на практике непараметрических алгоритмов. Интерпретируя свойство устойчивости как способность алгоритма сохранять или повышать свою эффективность при изменении помеховой обстановки, можно сделать вывод об устойчивости рассмотренного рангового алгоритма по сравнению с алгоритмом ОП в условиях сформулированной выше задачи обнаружения слабых сигналов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники.—М.: Сов. радио, 1976.—Кн. 3.
2. Акимов П. С., Кубасов А. Н., Литновский В. Я. Ранговое бинарное обнаружение детерминированного сигнала на фоне марковской помехи // Радиотехника и электроника.—1980.—XXV, вып. 7.
3. Бритвихин В. А. Об одном ранговом правиле некогерентного обнаружения сигнала в шумах с неизвестным распределением // Радиотехника и электроника.—1988.—XXXIII, вып. 7.
4. Ким В., Ярославский Л. П. Ранговые алгоритмы обработки изображений.—М., 1985.—Деп. в ВИНИТИ 17.02.85, № 3793.
5. Дейхин Л. Е., Райфельд М. А., Спектор А. А. Адаптивное ранговое обнаружение объектов на изображениях с коррелированным фоном // Радиотехника и электроника.—1989.—XXIX, вып. 10.
6. Акимов П. С., Ефремов В. С., Кубасов А. Н. Об устойчивости непараметрического теста при некогерентной обработке // Радиотехника и электроника.—1978.—XXIII, вып. 6.
7. Mann H. B., Whitney D. R. On a test whether one of the two random variables is stochastically larger than the other // Ann. Math. Stat.—1947.—18.—P. 50.
8. Федоров Г. С., Филимонов Р. П. Оптимальность и относительная эффективность некоторых инвариантных критериев в спектральном пространстве // Изв. вузов. Радиоэлектроника.—1982.—XXV, № 1.
9. Кендал М. Д., Стьюарт А. Статистические выводы и связи.—М.: Наука, 1976.
10. Hodges J. L., Lehmann E. L. The efficiency of some nonparametric competitors of the t-test // Ann. Math. Stat.—1956.—27, N 2.—P. 324.
11. Никитин Я. Ю., Филимонов Р. П. Асимптотическая относительная эффективность некоторых непараметрических правил обнаружения в схеме двухканальной обработки // Автометрия.—1979.—№ 4.
12. Боровков А. А. Математическая статистика.—М.: Наука, 1984.—§ 2.



*Поступила в редакцию 10 июля 1990 г.*