

(16). Лучшие результаты можно получить в случае высоких значений σ_{ξ}^2 и σ_{η}^2 путем дополнительной фильтрации последовательности $\{\hat{A}^k\}$ скользящим окном в пределах $(3-5)k$.

Предложенная процедура фильтрации может быть использована в случаях, когда последовательность оценок, получаемых на выходе схемы анализа сцены, отражает поведение динамического объекта и не допускает сглаживания обычными низкочастотными фильтрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shapiro S. D. Properties of transforms for the detection of curves in noisy pictures // Computer Graphics and Image Process.—1978.—8.—Р. 219.
2. Гороховатский В. А., Сытник О. В. Комбинированные алгоритмы статистической оценки параметров объектов на изображении // Автометрия.—1990.—№ 2.
3. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы.—М.: Сов. радио, 1977.
4. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем.—М.: Сов. радио, 1977.
5. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана — Бьюси: Пер. с англ.—М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 29 мая 1991 г.

УДК 621.391.266

Я. А. Фурман

(Йошкар-Ола)

О ПОНЯТИИ ФОРМЫ ПЛОСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Вводится понятие формы плоского изображения как инварианты аналитического представления полигонального контура этого изображения в классе линейных преобразований, не связанных с выходом из плоскости. Для придания метрических свойств форма произвольного изображения задается относительно формы тестового изображения, в качестве которого выбран дельтовидный контур. Показано, что степень простоты формы определяется отношением модуля максимального по величине отрезка в контуре к норме контура.

Введение. В задачах обработки изображений и распознавания зрительных образов широко используется понятие геометрической формы физического объекта или его изображения. Данное понятие наделяется метрическими свойствами, так как, например, решение о классе плоского изображения производится по степени близости форм двух изображений [1, 2]. Общепринятого определения формы пока нет [3]. В большинстве работ понятие формы используется как само собой разумеющееся. В тех же работах, где определению этого термина уделяется внимание, указывается на сложность данного вопроса [4, 5]. Учитывая важность понятия формы плоского изображения для построения алгоритмов распознавания зрительных образов, а также для получения общей и взаимоприемлемой терминологии, рассмотрим один из подходов к формализации понятия формы плоского изображения.

В данной работе, имеющей прикладной характер и инженерную направленность, на основе методов теории сигналов вводится просто вычисляемая форма плоского изображения, обладающая метрическими свойствами. Особенность работы состоит во введении нулевой формы, по отношению к которой определяется форма произвольных изображений. В качестве рабочего понятия «форма изображения» примем понятие, основанное на семантике слова «форма» и расширении трактовки термина Т. Павлидисом [5] и рядом других авторов применительно к бинарным изображениям: форма Φ изображения Ω представляет собой информацию, содержащуюся в его контуре Γ . Здесь предполагается, что контур Γ , кроме информации о форме, содержит дополни-

тельную информацию или что форма Φ является инвариантой представленного в аналитическом виде контура Γ к ряду преобразований, которым может подвергаться изображение Ω , а следовательно и контур Γ , без искажения формы, т. е.

$$\Phi = \text{Inv}\Omega_G = \text{Inv}\Gamma_F, \quad (1)$$

где Inv — обозначение инвариантности аналитического описания изображения Ω к некоторым пока не оговоренным функциональным преобразованиям G изображения или к преобразованиям F , касающимся аналитического описания контура Γ . Для дальнейшей конкретизации определения формы рассмотрим аналитическое описание контура бинарного изображения и связанные с ним преобразования изображения.

Модель контура плоского изображения. Пусть Γ — полигонально заданный контур изображения — состоит из цепочки элементарных векторов (ЭВ):

$$\sum_{n=0} \gamma(n) = \nu. \quad (3)$$

Из замкнутости линии контура следует периодичность его ЭВ: $\gamma(n) = \gamma(n \pm \alpha k)$, где α — целое число. Угол между соседними ЭВ определим как $\Delta\varphi(n) = \arg\gamma(n) - \arg\gamma(n-1)$.

Контур Γ будем рассматривать как элемент линейных пространств E^{2k} или C^k . Этот элемент назовем вектор-контуром (ВК). Проводя сопоставление заданных ВК в этих пространствах, применяемое при рассмотрении геометрии унитарного пространства [6], получаем следующее представление для ВК:

$$\Gamma_{C^k} = \{\gamma(n)\}_{0, k-1} = \{\gamma_1(n) + i\gamma_2(n)\}_{0, k-1};$$

$$\Gamma_{E^{2k}} = \{\gamma_1(n); \gamma_2(n)\}. \quad (4)$$

Условие равенства и суммы ВК $\Gamma = \{\gamma(n)\}_{0, k-1}$ и $N = \{\nu(n)\}_{0, k-1}$, а также умножение ВК на произвольный коэффициент μ (комплексного для C^k , т. е. $\mu = |\mu| \exp\{i\Delta\varphi\}$, и действительного для E^{2k} , т. е. $\mu = |\mu|$) примут вид

$$\Gamma = N \text{ при } \gamma_1(n) = \nu_1(n) \text{ и } \gamma_2(n) = \nu_2(n), \quad n = 0, 1, \dots, k-1;$$

$$P_{C^k} = \Gamma_{C^k} + N_{C^k} = \{\gamma(n) + \nu(n)\}_{0, k-1}; \quad (5)$$

$$P_{E^{2k}} = \Gamma_{E^{2k}} + N_{E^{2k}} = \{\gamma_1(n) + \nu_1(n); \gamma_2(n) + \nu_2(n)\}_{0, k-1};$$

$$P_{C^k} = \mu \Gamma_{C^k} = \{\mu\gamma(n)\}_{0, k-1};$$

$$P_{E^{2k}} = |\mu| \Gamma_{E^{2k}} = \{|\mu| \gamma_1(n); |\mu| \gamma_2(n)\}.$$

Скалярные произведения ВК в ортонормированном базисе имеют вид [6]

$$(\Gamma, N)_{E^{2k}} = \sum_{n=0}^{k-1} [\gamma_1(n)\nu_1(n) + \gamma_2(n)\nu_2(n)]; \quad (6)$$

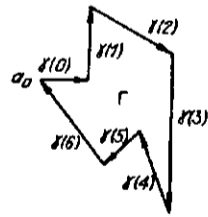


Рис. 1

$$(\Gamma, N)_{C^k} = (\Gamma, N)_{E^{2k}} + i \sum_{n=0}^{k-1} [\gamma_2(n)\nu_1(n) + \gamma_1(n)\nu_2(n)].$$

Из последнего выражения видно, что скалярное произведение ВК в C^k содержит скалярное произведение в E^{2k} в качестве составной части, и поэтому оно будет более информативным. Нормы ВК и расстояния между ними в обоих пространствах совпадают:

$$\|\Gamma\|_{E^{2k}}^2 + \|\Gamma\|_{C^k}^2 = \|\Gamma\|^2 = \sum_{n=0}^{k-1} \gamma_1^2(n) + \gamma_2^2(n) = \sum_{n=0}^{k-1} |\gamma(n)|^2; \quad (7)$$

$$R_{E^{2k}}^2 = R_{C^k}^2 = \|\Gamma\|^2 + \|N\|^2 - 2(\Gamma, N)_{E^{2k}} = \|\Gamma\|^2 + \|N\|^2 - 2\text{Re}(\Gamma, N)_{C^k}. \quad (8)$$

Нормированное скалярное произведение (НСП) в пространстве C^k , $\eta_H = (\Gamma, N)_{C^k} / \|\Gamma\| \|N\|$ в общем случае будет комплексной величиной и не может быть косинусом действительного угла [7]. Из неравенства Коши — Буняковского следует, что $0 \leq |\eta_H| \leq 1$, причем равенство $|\eta_H| = 1$ наблюдается лишь для контуров, связанных соотношением вида $N = \mu\Gamma$. НСП в E^{2k} проявляет близкие экстремальные свойства, но из-за действительного характера величины μ вектор-контур Γ и $N = \exp\{i\Delta\varphi\}\Gamma$, $\Delta\varphi \neq 0$, имеют НСП, не достигающие единицы. Таким образом, НСП в C^k позволяет обнаружить высокую степень близости для значительно большего количества контуров, чем в E^{2k} . Поэтому в дальнейшем будем пользоваться заданием ВК в унитарном пространстве C^k .

Рассмотрим особый класс контуров, которые назовем элементарными. Элементарный контур Γ_m порядка m зададим в виде

$$\Gamma_m = \left\{ |\gamma| \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\} \right\}_{0, k-1}, \quad m = 1, 2, \dots, k-1. \quad (9)$$

Он представляет собой k -угольную фигуру с одинаковыми по модулю ЭВ и одинаковыми углами между соседними элементарными контурами, равными $\left(-\frac{2\pi}{k} m\right)$. На рис. 2 приведено семейство таких контуров для $k = 5$. Элементарные контуры для одного и того же значения k являются ортогональными и обладают свойством комплексной сопряженности: $\bar{\Gamma}_m = \Gamma_{k-m}^*$.

Минимизация расстояний между контурами. Пусть контур N_F получен путем растяжения контура N в $|\mu|$ раз, поворотом на угол $\Delta\varphi$, переносом в пределах плоскости заданным комплексным параметром λ и сдвигом начальной точки на d ЭВ. Преобразование $F = (\mu, \lambda, d)$ над N не связано с выходом за пределы плоскости. Контур N_F и N назовем подобными. Благодаря заданию контура в естественной системе отсчета, преобразование переноса λ не изменяет контур N . С учетом выражений (5) контур N_F задается в виде

$$N_F = \left\{ |\mu| |\nu(n+d)| \exp\{i[\varphi(n+d) + \Delta\varphi]\} \right\}_{0, k-1}. \quad (10)$$

Примем в качестве меры сходства контуров Γ и N_F величину квадрата расстояния между их ВК, т. е.

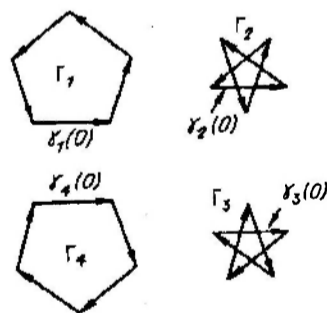


Рис. 2

$$R^2 = \|N - \Gamma\|^2 = |\mu|^2 \|N\|^2 + \|\Gamma\|^2 - 2|\mu| \operatorname{Re} \eta_{N,\Gamma}(d) \cos \Delta\varphi. \quad (11)$$

Для подобных контуров $N_F = \Gamma$ и

$$R_H^2 = R^2 / \|N\|^2 = 1 + |\mu|^2 \operatorname{Re} \eta(d) \cos \Delta\varphi. \quad (12)$$

Отсюда видно, что выбранная мера сходства является функцией параметров линейных преобразований μ и d . Так как форма не должна зависеть от этих параметров, величина расстояния, задаваемая выражениями (11) и (12), не может служить мерой близости двух форм. Получим представления для контуров, инвариантные к этим преобразованиям [8].

После нормирования ВК, т. е. при переходе к ВК $N_H = N / \|N\|$ и $\Gamma_H = \Gamma / \|\Gamma\|$, расстояние между ними будет равным

$$R_H^2(d) = 2 - [(N(d), \Gamma) - (\Gamma, N(d))] / \|N\| \|\Gamma\| = 2[1 - \operatorname{Re} \eta_H(d)].$$

Отсюда видно, что единственной существенной операцией для определения расстояния $R_H^2(d)$ является вычисление НСП. Если контур $N(d)$ отличается от контура Γ лишь масштабом $|\mu|$ и сдвигом начальной точки d , т. е. $N(d) = |\mu| \Gamma(d)$, то расстояние $R_H^2(d)$ не зависит от $|\mu|$. Для фиксированных форм изображений и $\Delta\varphi = 0$ величина расстояния будет минимальной при совпадении начальных точек контуров, т. е. при $d = 0$, и величина $\operatorname{Re} \eta(d)$ достигает максимума. При $\Delta\varphi = 0$ для исключения влияния сдвига начальных точек контуров необходимо вычислить НСП и ВК с максимально возможным значением реальной части и подставить его значение в выражение для расстояния.

Устраним теперь влияние угла поворота $\Delta\varphi$ между контурами на величину расстояния. Отметим, что при $\Delta\varphi \neq 0$ величина НСП становится комплексной и значение его реальной части будет меньше, чем при $\Delta\varphi = 0$. Это и приводит в конечном счете к влиянию поворота на расстояние между контурами. Поэтому до вычисления расстояния необходимо каждый из векторов НСП: $\eta_{H,\Delta\varphi}(s) = |\eta_{H,\Delta\varphi}(s)| \exp[i\psi(s)]$, $s = 0, 1, \dots, k-1$, $\psi(s)$ — аргумент текущего вектора НСП, повернуть на угол:

$$-\psi(s) = -\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \eta_{H,\Delta\varphi}(s)}{\operatorname{Re} \eta_{H,\Delta\varphi}(s)}, \quad s = 0, 1, \dots, k-1.$$

Тогда $\operatorname{Re} \eta_{H,\Delta\varphi}(s) = |\eta_{H,\Delta\varphi}(s)|$ и величина расстояния между контурами при данном значении s будет минимальной. Глобальный минимум расстояния достигается при s , для которого модуль НСП принимает максимальное значение, т. е. когда

$$\max \operatorname{Re} \eta_H = |\eta_{H,\Delta\varphi}(s)|_{\max} = |\eta_{H,\Delta\varphi}(d)|, \quad s = 0, 1, \dots, k-1. \quad (13)$$

Поэтому расстояние между контурами станет равным

$$R_{H,\min}^2 = 2[1 - |\eta_{H,\mu,\max}(s)|]. \quad (14)$$

Значения $\eta_{\mu}(s)$ формируются фильтром, согласованным с контуром Γ . Для получения $R_{H,\min}^2$ необходимо после фильтрации контура N отобразить отсчет с максимальным модулем, пронормировать его путем деления на $\|\Gamma\| \|N\|$ и результат подставить в (14).

Форма плоского изображения в классе преобразований, не связанных с выходом из плоскости. Как следует из предыдущего раздела, минимизация расстояния между двумя контурами Γ и N , задающими соответственно формы Φ_{Γ} и Φ_N , приводит к устранению влияния линейных преобразований на величину этого расстояния. Минимальное значение расстояния будет мерой разности форм, если форму определить в соответствии с выражением (1) как

аналитическое представление контура, инвариантное к определенному классу преобразований, в данном случае к классу $F = (\mu, \lambda, d)$. Поскольку расстояние $R_{H, \min}$ характеризует различие двух форм Φ_N и Φ_G , то форму Φ_j произвольного изображения Ω_j с контуром Γ_j , $j = 1, 2, \dots$, зададим следующим образом.

Пусть контур Δ обладает особыми свойствами для большого класса изображений. Такой контур назовем тестовым. Примем, что форма Φ_Δ изображения с тестовым контуром задается его контуром, т. е. $\Phi_\Delta = \Delta$. Совместим начало отсчета системы координат, в которой задаются контуры Γ_j , $j = 1, 2, \dots$, с концом ВК Δ . Тогда форма изображения Ω_j есть контур $\Gamma_{j, F^{-1}}$, полученный в результате линейных преобразований F^{-1} , т. е.

$$\Phi_j = \Gamma_{j, F^{-1}} \text{ при } R_H \rightarrow \min, \quad (15)$$

где F^{-1} — линейные преобразования контура, не связанные с выходом из плоскости и минимизирующие расстояние ВК Γ_j от начала отсчета. Вектор-форма Φ_j в этом случае записывается в виде

$$\Phi_j = \frac{1}{\|\Gamma_j\|} \{ |\gamma(n-d)| \exp\{i\varphi(n-d) - \psi(d)\} \}_{0, k-1}. \quad (16)$$

Выбор тестового изображения. Выбор тестового изображения может быть осуществлен, исходя из практически полезных критериев. Один из подходов состоит в том, чтобы в качестве него выбрать изображение, наиболее сложное при данном значении k формы. Контур такого изображения характеризуется равномерным спектром Фурье и узкой автокорреляционной функцией. Найдем аналитическое представление контура Δ этого изображения.

Полигональный замкнутый контур $\Delta = \{\delta(n)\}_{0, k-1}$ состоит из периодической последовательности ЭВ, и для него прямое $P = \{\rho(m)\}_{0, k-1}$ и обратное дискретные преобразования Фурье (ДПФ) имеют вид [9]

$$\rho(m) = \sum_{n=0}^{k-1} \delta(n) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k} mn\right\}, \quad m = 0, 1, \dots, k-1; \quad (17)$$

$$\delta(n) = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \rho(m) \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\}, \quad n = 0, 1, \dots, k-1. \quad (18)$$

Из условия замкнутости контура Δ следует, что $\rho(0) = 0$. Полагая в выражении (18) $n = 0$, получим

$$\sum_{m=1}^{k-1} \rho(m) - k\delta(0) = 0. \quad (19)$$

Найдем выражение для контура Δ с равномерным спектром, т. е. с $P = \{0, \rho, \rho, \dots, \rho\}$ (рис. 3, а). Такой контур назовем дельтовидным. Из выражения (19) следует, что $\delta(0) = \frac{k-1}{k} \rho$. Учитывая, что величина

$$\sum_{m=1}^{k-1} \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\} = -1,$$

и используя обратное ДПФ, для остальных ЭВ контура Δ получим

$$\delta(n) = \frac{\rho}{k} \sum_{m=1}^{k-1} \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\} = -\frac{\rho}{k},$$

$$n = 1, 2, \dots, k - 1.$$

Вид дельтовидного контура показан на рис. 3, *b*. Все его ЭВ расположены на одной прямой, причем ЭВ $\delta(0)$ вытянут вправо и по длине равен сумме длин всех остальных ЭВ, направленных в противоположную сторону. Автокорреляционная функция $\eta(m)$ контура Δ при $\rho(k)$ будет равна: $\eta(0) = k^2 - k$; $\eta(1) = \eta(2) = \dots = \eta(k - 1) = -k$. Ее составляющая $\eta(0)$ в k раз по модулю больше любой другой, что и придает $\eta(m)$ при больших k вид, близкий к дельта-функции (рис. 4, $k = 50$). Отсюда следует свойство наибольшей сложности формы контура Δ , понимаемое как возможность пренебречь взаимной энергией связи ЭВ контура, задаваемой отсчетами $\eta(m)$, $m = 1, 2, \dots, k - 1$, по сравнению с энергией контура, равной $\eta(0) = \|\Delta\|^2$. Произвольный контур Γ может быть представлен взвешенной комбинацией элементарных контуров Γ_m :

$$\Gamma = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k-1} \rho(m) \Gamma_m. \quad (20)$$

Поэтому дельтовидный контур при $\rho(m) = \rho = k$ будет простой суммой полного набора элементарных контуров:

$$\Delta = \sum_{m=1}^{k-1} \Gamma_m.$$

Проанализируем выражение для свертки произвольного контура Γ с дельтовидным контуром $\Delta = \{k - 1, -k, -k, \dots, -k\}$:

$$\eta(s) = \sum_{n=0}^{k-1} \gamma(n) \delta(s - n) = (k - 1) \gamma(s) - \sum_{n=0, s \neq n}^{k-1} \gamma(n), \quad s = 0, 1, \dots, k - 1.$$

Используя условие замкнутости контуров, получим

$$\eta(s) = k \gamma(s). \quad (21)$$

Таким образом, произвольный замкнутый контур, проходя через фильтр, импульсная характеристика которого задается дельтовидным контуром, с точностью до действительного множителя $(k - 1)$ сохраняет свой вид. Этот результат свидетельствует о фильтрующем свойстве контура Δ .

Определение формы плоского изображения при выборе дельтовидного контура в качестве тестового. Принятие контура Δ в качестве тестового значительно упрощает определение формы Φ произвольного изображения Ω по его контуру Γ в классе линейных преобразований $F = (\mu, \lambda, d)$, не связанных с выходом из плоскости. Фильтрующее свойство контура позволяет непосредственно по представлению контура $\Gamma = \{\gamma(n)\}_{0, k-1}$ выбрать отсчет на выходе

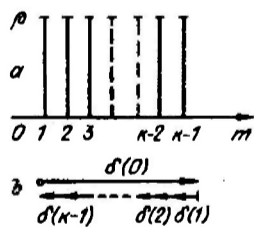


Рис. 3

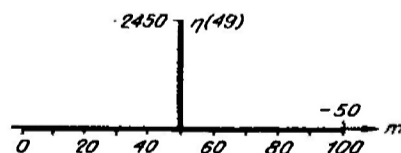


Рис. 4

фильтра, согласованного с дельтовидным контуром: этот отсчет с точностью до масштабного множителя совпадает с максимальным по длине ЭВ контура Γ , т. е.

$$|\eta(s_0)| = |\eta(s)|_{\max} = (k-1)|\gamma(s)|_{\max} = (k-1)|\gamma(s_0)|. \quad (22)$$

Таким образом, аналитическое представление формы плоского изображения Ω при выборе контура Δ в качестве тестового в классе линейных преобразований, не связанных с выходом из плоскости, находится следующим образом:

- 1) определяется в полигональном виде контур $\Gamma = \{\gamma(n)\}_{n=0, \dots, k-1}$ изображения Ω ;
- 2) выбирается ЭВ $\gamma(s_0)$ этого контура, имеющий максимальную длину;
- 3) начало отсчета контура Γ совмещается с началом ЭВ $\gamma(s_0)$;
- 4) контур Γ нормируется и поворачивается таким образом, чтобы ЭВ $\gamma(s_0)/\|\Gamma\|$ стал горизонтальным и направленным вправо.

Аналитическое описание преобразованного контура Γ и будет формой Φ изображения Ω .

Квадрат расстояния $R_{H, \min}^2$ от вектор-формы Φ до ВК Δ может быть принят в качестве количественной характеристики степени простоты формы изображения Γ . Введем коэффициент простоты формы в виде $k_{\text{пр}} = 0,5R_{H, \min}^2$. Этот коэффициент изменяется от нуля до единицы, и чем он больше, тем проще форма изображения. Учитывая фильтрующее свойство дельтовидного контура, с помощью выражения (14) получим

$$k_{\text{пр}} = 0,5R_{H, \min}^2 = 1 - \sqrt{\frac{k}{k-1}} \frac{|\gamma(s_0)|}{\|\Gamma\|}. \quad (23)$$

В качестве примера найдем форму изображения, имеющего контур, представленный на рис. 1. Разностный код этого контура будет

$$\Gamma = \{3; 5i; 5 - 3i; 10i; -2 + 5i; -2 - 2i; -4 + 5i\}.$$

Размерность соответствующего ВК $k = 7$, квадрат нормы $\|\Gamma\|^2 = 246$. Код дельтовидного контура при $k = 7$ имеет вид

$$\Delta = \{6, -1, -1, -1, -1, -1, -1\}.$$

Максимальным по длине ЭВ контура Γ будет вектор $\gamma(3) = -10i$. Переносим начало отсчета контура в начало этого ЭВ, нормируем контур и поворачиваем на $\pi/2$. В результате получим (рис. 5)

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{246}} \{10; -5 - 2i; 2 - 2i; -5 - 4i; 3i; -5; 3 + 5i\}.$$

Коэффициент простоты этой формы равен 0,362.

Заключение. В данной работе конкретизирован получивший в последнее время распространение подход к понятию формы изображения как инварианты к заданному классу аналитических преобразований этого изображения. Предположено, что форма изображения задается его контуром. Чтобы сделать в метрическом отношении форму более удобной для пользования, введен объект тестовой формы, и формы других изображений определяются относительно формы тестового изображения. В качестве тестового выбрано изображение наиболее сложной

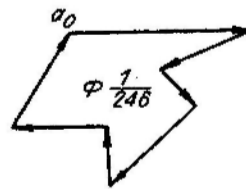


Рис. 5

при заданной размерности пространства формы. В результате расстояние между контурами тестового и измеренного изображений служит количественной мерой степени простоты формы. Недостатком выбора дельтовидного контура в качестве тестового является неоднозначность формы, когда в контуре несколько ЭВ будут самыми длинными. Форма стандартизирует описание изображения. Использование формы при распознавании образов позволяет принять решение в результате сравнения формы изображения с формами каждого из эталонов. Существующие подходы более трудоемки из-за необходимости «подгонки» контура изображения под контур каждого эталона [2, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zahn C. T., Roskies R. Z. Fourier descriptors for plane closed curves // IEEE Trans. on Computers.—1972.—С-21, N 3.—Р. 269.
2. Richard C. W., Hemani H. Identification of three-dimensional objects using Fourier descriptors of the boundary curve // IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics.—1974.—SMC-4, N 4.
3. Ковязин С. А. О понятии средней формы случайного измеримого множества // Динамика химических и биологических систем: Сб. науч. тр. /Под ред. В. И. Быкова.—Новосибирск: Наука, 1989.
4. Марр Д. Зрение. Информационный подход к изучению представления и обработки зрительных образов: Пер. с англ.—М.: Радио и связь, 1987.
5. Павлидис Т. Алгоритмы машинной графики и обработки изображений: Пер. с англ.—М.: Радио и связь, 1986.
6. Ефимов Н. В., Розендорн Э. В. Линейная алгебра и многомерная геометрия.—М.: Наука, 1974.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1972.
8. Фурман Я. А., Егوشина И. Л. Мера сходства форм плоских изображений объектов.—Йошкар-Ола, 1990.—Деп. в ВИНТИ, № 3513-В90.
9. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.—М.: Мир, 1978.
10. Person E., Fu K. Shape discrimination using Fourier descriptors // IEEE Trans., Man and Cybernetics.—1977.—SMC-7, N 3.—Р. 170.

Поступила в редакцию 10 февраля 1992 г.