4. Островский Ю. И., Щепиков В. П., Яковлев В. В. Голографические интерференционные методы измерения деформаций.—М.: Наука, 1988.
5. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений.—М.: Мир, 1969.

О. Е. Трофимов

(Новосибирск)

СПОСОБ РАСЧЕТА КИНОФОРМОВ, ОСНОВАННЫЙ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается способ расчета киноформных элементов с использованием случайных функций, при котором математическое ожидание получаемого изображения совпадает с заданной функцией, а дисперсия стремится к нулю при стремлении шага дискретизации к нулю.

Использование ЭВМ для управления лазерным лучом позволяет создавать устройства для получения объектов, которые с точки зрения геометрии являются ступенчатыми функциями с размерами высоты ступеньки порядка долей длины волны света в видимом диапазоне. Если подобные объекты изготовлены из прозрачного материала, то они могут быть использованы в качестве оптических элементов. Оптические элементы такого рода принято называть киноформными оптическими элементами, или киноформами [1—3]. Термин киноформ впервые появился в [1] применительно к одному классу подобных объектов, о котором более подробно будет сообщено ниже. Однако в настоящее время этот термин используется для обозначения широкого класса оптических элементов, создаваемых с помощью ЭВМ и имеющих различные формы с характерными размерами порядка долей длины волны [4—9].

Одна из причин интереса к киноформным элементам заключается в том, что при прохождении оптических лучей размеры, кратные длине волны, не влияют на формируемое изображение, что позволяет сделать оптические элементы практически плоскими. Очень интересной является также возможность обеспечивать высокие точности по координатам, лежащим в плоскости, перпендикулярной оптической оси элемента. Использование ЭВМ позволяет создавать элементы, толщина которых z сложным образом зависит от координат x и y. Расчет и создание киноформных элементов являются сложной вычислительной и технологической задачей. Учет специфики подобных элементов и необходимость изучения их возможностей делают целесообразной постановку и исследование ряда математических задач [2, 5—7]. Одна из таких задач будет рассмотрена в настоящей работе.

Отметим, что задачи синтеза киноформных элементов являются в некотором смысле двойственными к задачам интегральной геометрии, и в частности томографии. В задачах томографии нужно восстановить объект по его проекциям. В задачах синтеза киноформов необходимо создать объект, при освещении которого получается заданное изображение.

В [1] приводятся описание объекта, названного киноформом, и способ его создания. Объект представляет собой прозрачную пластину, дающую при освещении монохроматическим светом изображение, близкое к заданному, в зоне наблюдения, для которой справедливо приближение Френеля. Разность между толщиной пластины в различных точках может не превосходить длины волны падающего на пластину света. Изображением, использовавшимся в [1], было слово "kinoform". С математической точки зрения способ создания объекта заключается в следующем [2, 7].

Пусть $I(\xi, \eta)$ — заданная неотрицательная функция, изображение которой хотим получить. Рассмотрим функцию

$$U(u, v) = (1/\lambda d)\int\int I^{1/2}(\xi, \eta)\exp(i(\pi/\lambda d)[(u-\xi)^2 + (v-\eta)^2 + \varphi(\xi, \eta)])d\xi d\eta,$$

здесь λ — длина волны, d — расстояние до зоны наблюдения Френеля, $\varphi(\xi, \eta)$ — случайная функция, удовлетворяющая условию

$$M(\exp(i\varphi(\xi_1, \eta_1) - i\varphi(\xi_2, \eta_2))) = \delta(\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2).$$

Отметим, что $U(u, v)$ является преобразованием Френеля от случайной фазовой функции.

Пусть $\Theta(u, v)$ — фаза функции $U(u, v)$ по модулю 2π. Если взять одну из реализаций случайной функции $\varphi(\xi, \eta)$, получим одну из реализаций случайной функции $\Theta(u, v)$. Теперь можно изготовить фазосдвигающую пластинку, соответствующую функции $\Theta(u, v)$, за счет изменения толщины пластинки в пределах длины волны.

В [1] утверждается, что если такую пластинку осветить монохроматическим светом с длиной волны λ, то на расстоянии d будет поле, квадрат амплитуды которого близок к $I(\xi, \eta)$. Там же обсуждаются результаты подобных экспериментов для изображения, являющегося словом "kinoform".

В [2] приводится обоснование этого факта, которое заключается в следующем. Рассматривается случайная функция $V(x, y)$, являющаяся преобразованием Френеля от случайной функции $\Theta(u, v)$, т. е.

$$V(x, y) = (1/\lambda d)\int\int\exp(i(\pi/\lambda d)[(u-x)^2 + (v-y)^2 + \Theta(u, v)])dudv.$$

Пусть $\bar{I}(x, y) = M(V(x, y)V^*(x, y))$, т. е. $\bar{I}(x, y)$ — математическое ожидание квадрата модуля случайной функции $V(x, y)$. В [2] показано, что функция $\bar{I}(x, y)$ может быть представлена в виде ряда

$$\bar{I}(x, y) = \sum_{k=1} c_k f_i(x, y),$$

где $f_1(x, y) = I(x, y)$, а коэффициент c_1 составляет 78 % от суммы коэффициентов c_k. Этот факт является обоснованием изложенного выше метода построения киноформных элементов. Таким образом, с помощью метода, предложенного в [1], можно получать хорошие приближения к заданным изображениям, но нельзя получить точного совпадения, так как коэффициенты c_k отличны от нуля. Возникает вопрос: возможен ли в принципе метод, обеспечивающий точное совпадение? В общем виде задача может быть поставлена следующим образом.

Пусть задана неотрицательная функция $I(x, y)$. Нужно найти фазу $\Theta(u, v)$, такую что квадрат модуля функции $V(x, y)$, где

$$V(x, y) = (1/\lambda d)\int\int\exp(i(\pi/\lambda d)[(u-x)^2 + (v-y)^2 + \Theta(u, v)])dudv,$$

наилучшим образом приближает функцию $I(x, y)$. Функция $V(x, y)$ является преобразованием Френеля от функции $e^{i(\pi/\lambda d)\Theta(u, v)}$, имеющей модуль, равный единице. Такие функции в дальнейшем будем называть фазовыми. Фазовыми будем называть также функции подобного вида, имеющие финитный носитель, т. е.

$$g(u, v) = \begin{cases} e^{i\varphi(u, v)} & \text{при} \quad a_1 \le u \le b_1,\ a_2 \le v \le b_2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В настоящей работе для дискретного варианта задачи предложен способ генерирования случайной фазы, при котором математическое ожидание квадрата модуля приближающей функции сходится к приближаемой функции, а дисперсия стремится к нулю при стремлении шага дискретизации к нулю.

Преобразования Френеля и Фурье входят в класс преобразований, представимых в виде

$$f(x) = \int\limits_D \tilde{f}(\omega)g(\omega, x)d\omega.$$

Для преобразования Фурье $g(\omega, x) = e^{i\omega x}$, для преобразования Френеля $g(\omega, x) = (1/\lambda d)\exp(i(\pi/\lambda d)[(\omega_1 - x_1)^2 + (\omega_2 - y_2)^2])$, здесь $x = (x_1, x_2)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. В практических ситуациях областью интегрирования D является некоторое ограниченное множество, которое для дальнейшего без ограничения общности можно считать квадратом. Модуль функции $\tilde{f}(\omega)$ в общем случае отличен от единицы, нам нужно найти другую функцию $\tilde{f}_1(\omega)$ с модулем, равным единице в области D, такую что соответствующая функция $f_1(x)$ наилучшим образом приближает функцию $f(x)$. Мы будем решать эту задачу с использованием случайных функций.

Вначале изложим суть предлагаемого способа в непрерывном случае на примере преобразования Фурье, а затем перейдем к дискретному варианту в общем случае. При синтезе реальных элементов должен использоваться дискретный вариант.

Пусть

$$f(x) = \int\limits_D e^{i(\lambda, x)}\tilde{f}(\lambda)d\lambda = \int\limits_D e^{i(\lambda, x)}|\tilde{f}(\lambda)|e^{\psi(\lambda)}d\lambda,$$

и пусть $G(x)$ — преобразование Фурье от фазовой функции вида $e^{i\varphi(\lambda)}$, где $\varphi(\lambda)$ — случайная функция, т. е.

$$G(x) = \int\limits_D \exp(i((\lambda, x) + \varphi(\lambda)))d\lambda.$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $d\lambda = d\lambda_1, d\lambda_2$, $x = (x_1, x_2)$, $(\lambda, x) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, $D = \{\lambda\colon 0 \le \lambda_1 \le \lambda_0, 0 \le \lambda_2 \le \lambda_0\}$.

Для математического ожидания случайной функции $G(x)$ получаем

$$MG(x) = \int\limits_D e^{i(\lambda, x)}Me^{i\varphi(\lambda)}d\lambda.$$

Если теперь выбрать случайную величину $\varphi(\lambda)$, такую что $Me^{i\varphi(\lambda)} = \tilde{f}(\lambda)$, получим равенство $MG(x) = f(x)$. Если выполняется условие $0 < |\tilde{f}(\lambda)| \le 1$, соответствующую величину всегда можно подобрать. Действительно, $Me^{i\varphi(\lambda)}$ есть значение характеристической функции случайной величины $\varphi(\lambda)$ в точке $u = 1$.

Характеристическая функция $g(u)$ гауссовской случайной величины η имеет вид

$$g(u) = \exp(iau - (1/2)\sigma^2u^2),$$

где a — математическое ожидание η, σ^2 — ее дисперсия. Выбирая случайную величину $\varphi(\lambda)$ так, что $M\varphi(\lambda) = \psi(\lambda)$ и $\sigma^2(\varphi(\lambda)) = -2\ln(|\tilde{f}(\lambda)|)$, получаем нужное равенство. Здесь $\tilde{f}(\lambda) = |\tilde{f}(\lambda)|e^{i\psi(\lambda)}$. Распределение случайной величины $\varphi(\lambda)$ может быть и другим, например равномерным.

Изложенный выше прием обеспечивает равенство математического ожидания случайной функции $G(x)$ и заданной функции $f(x)$. Для того чтобы это равенство приближенно выполнялось на одной реализации, необходима малость дисперсии величины $|G(x)|$. Покажем, что этого можно добиться, если выбрать поле $\varphi(\lambda)$ слабо коррелированным.

Пусть $\varphi(\lambda)$ — гауссовское поле с математическим ожиданием $\Phi(\lambda)$ и корреляционной функцией $R(\lambda, \omega) = M\varphi(\lambda)\varphi(\omega)$. Для среднего значения $|G(x)|^2$ получаем

$$M|G(x)|^2 = \int_{D_1} e^{i((\lambda, x) - (\omega, x))} M e^{i(\varphi(\lambda) - \varphi(\omega))} d\lambda d\omega, \qquad D_1 = D \times D.$$

Случайная величина $\eta = \eta(\lambda, \omega) = \varphi(\lambda) - \varphi(\omega)$ будет гауссовской, причем $M\eta^2 = R(\lambda, \lambda) + R(\omega, \omega) - 2R(\lambda, \omega)$, $Me^{i(\varphi(\lambda) - \varphi(\omega))}$

$$M|G(x)|^2 = \int_{D_1} \exp i((\lambda, x) - (\omega, x) + \Phi(\lambda) - \Phi(\omega)) \times$$

$$\times \exp - \frac{1}{2}(\sigma^2(\lambda) + \sigma^2(\omega) - 2(R(\lambda, \omega) + \Phi(\lambda)\Phi(\omega))) d\lambda d\omega,$$

здесь $\sigma^2(\lambda) = R(\lambda, \lambda) - \Phi^2(\lambda)$.

Если поле некоррелированное, т. е. $R(\lambda, \omega) - \Phi(\lambda)\varphi(\omega) = 0$, то

$$M|G(x)|^2 = \left| \int_{D_1} \exp(i((\lambda, x) + \Phi(\lambda))) \exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma^2(\lambda))\right) d\lambda \right|^2.$$

Если теперь $f(x)$ — детерминированная действительная функция, такая что

$$f(x) = \int_D e^{i\lambda x} \tilde{f}(\lambda) d\lambda = \int_D e^{i\lambda x} |\tilde{f}(\lambda)| e^{\psi(\lambda)} d\lambda,$$

то, генерируя случайное поле $\varphi(\lambda)$, такое что $M\varphi(\lambda) = \Phi(\lambda) = \psi(\lambda)$ и $\sigma^2(\varphi(\lambda)) = -2\ln|\tilde{f}(\lambda)|$, получаем $M|G(x)|^2 = f^2(x)$. (Предполагается, что $0 < |\tilde{f}(\lambda)| < 1$.)

Для дальнейшего нам потребуется следующее

Утверждение. Пусть $M\xi = \alpha$, $M|\xi|^2 = \alpha^2$, $Im\alpha = 0$, тогда $M|\xi| = \alpha$, т. е. дисперсия случайной величины $\eta = |\xi|$ равна нулю. Действительно, $|\alpha| = |M\xi| \le M|\xi|$; с другой стороны, учитывая неравенство между моментами $m_k^{1/k} \le m_{k+1}^{1/k+1}$ [8, с. 198], получаем $M|\xi| \le |\alpha|$. Таким образом, $M|\xi| = \alpha$ и $\sigma^2(\eta) = \sigma^2(|\xi|) = M|\xi|^2 - (M|\xi|)^2 = 0$.

Возвращаясь к функции $G(x)$, получаем:

Если случайная функция $\varphi(\lambda)$ удовлетворяет условиям $Me^{i\varphi(\lambda)} = \tilde{f}(\lambda)$ и $M\varphi(\lambda)\varphi(\omega) = M\varphi(\lambda)M\varphi(\omega)$ при $\lambda \ne \omega$, то с вероятностью единица

$$|f(x)| = |G(x)| = \left| \int_D \exp(i((\lambda, x) + \varphi(\lambda))) d\lambda \right|.$$

В реальной ситуации генерируемое случайное поле не будет некоррелированным, поэтому будет выполняться равенство

$$M|G(x)|^2 = f^2(x) + \alpha^2(x),$$

причем $\alpha^2(x)$ тем меньше, чем быстрее убывает корреляционная функция $R(\lambda)$.

При создании киноформных элементов с помощью ЭВМ естественно рассматривать дискретный вариант задачи. В этом случае область D разбивается на ячейки, внутри каждой ячейки случайная функция $\varphi(\lambda)$ постоянна и удовлетворяет условию $Me^{i\varphi(\lambda)} = \tilde{f}(\lambda_0)$, где λ_0 — некоторая средняя точка ячейки, значения поля $\varphi(\lambda)$ в различных ячейках независимы. При достаточно малых размерах ячеек с большой вероятностью будет приближенно выполняться необходимое равенство. Докажем соответствующее

Предложение. Пусть

$$f(x) = \int_D \tilde{f}(\omega) g(\omega, x) d\omega,$$

причем $|\tilde{f}(\omega)| \le 1$. Рассмотрим последовательность случайных функций

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} \int_{D_{kr}} e^{i\varphi_{kr}} g(\omega, x) d\omega,$$

здесь $x = (x_1, x_2)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\{\varphi_{kr}\}$ — последовательность независимых случайных величин, таких что

$$Me^{i\varphi_{kr}} = \tilde{f}(a_1 + k\Delta, a_2 + r\Delta),$$

$\Delta = a/n$, a — длина стороны квадрата D; a_1, a_2 — его левая нижняя граничная точка,

$$D_{kr} = \{\omega\colon\ a + k\Delta \le \omega_1 < a + (k+1)\Delta,\ a + r\Delta \le \omega_2 < a + (r+1)\Delta\}.$$

Тогда для всех x при $n \to \infty$

$$Mf_n(x) \to f(x), \quad M|f_n(x) - f(x)|^2 \to 0, \quad M|f_n(x)| \to |f(x)|,$$

$$M\big||f_n(x)| - |f(x)|\big|^2 \to 0.$$

Отметим, что если $|\tilde{f}(\omega)| \le 1$, то для любого n существует последовательность случайных величин $\{\varphi_{kr}\}$, таких что $Me^{i\varphi_{kr}} = \tilde{f}(a_1 + k\Delta, a_2 + r\Delta)$. Действительно, пусть $|\tilde{f}(a_1 + k\Delta, a_2 + r\Delta)| = A_{kr}$ и $\tilde{f}(a_1 + k\Delta, a_2 + r\Delta) = A_{kr}e^{i\alpha_{kr}}$. Пусть l_{kr} находится из условия $\sin l_{kr}/l_{kr} = A_{kr}$, тогда в качестве φ_{kr} можно взять случайную величину $\alpha_{kr} + \xi_{kr}$, где ξ_{kr} равномерно распределена в интервале $[-l_k, l_k]$.

Итак, пусть $\{\varphi_{kr}\}$ — последовательность независимых случайных величин, таких что $Me^{i\varphi_{kr}} = \tilde{f}(a_1 + k\Delta, a_2 + r\Delta)$, тогда

$$Mf_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} \int_{D_{kr}} Me^{i\varphi_{kr}} g(\omega, x) d\omega = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} \tilde{f}(a_1 + k\Delta, a_2 + r\Delta) \int_{D_{kr}} g(\omega, x) d\omega.$$

Учитывая, что

$$f(x) = \int_D \tilde{f}(\omega) g(\omega, x) d\omega$$

и $\Delta = (b - a)/n$, и используя теорему о среднем, получаем, что для всех x $Mf_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

Перейдем к оценке разброса случайной величины $f_n(x)$ относительно среднего. Для $M|f_n(x)|^2$ имеем

$$M|f_n(x)|^2 = M(f_n(x) f_n^*(x)) =$$

$$= M\left[\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\int\limits_{D_{kr}} e^{i\varphi_{kr}} g(\omega,\ x)d\omega \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1}\int\limits_{D_{ls}} e^{-i\varphi_{ls}} g^{*}(\gamma,\ x)d\gamma\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1} M(e^{i\varphi_{kr}}\ e^{-i\varphi_{ls}})R_{kr}(x)R_{ls}^{*}(x).$$

Здесь

$$R_{kr}(x) = \int\limits_{D_{kr}} g(\omega,\ x)d\omega.$$

Учитывая, что случайные величины φ_{kr} и φ_{ls} независимы при $k \neq l$ и $r \neq s$, получаем

$$M|f_n(x)|^2 = \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq l,\ r \neq s)}}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1} \tilde{f}(a_1 + k\Delta,\ a_2 + r\Delta)\tilde{f}(a_1 + l\Delta,\ a_2 + s\Delta)R_{kr}(x)R_{ls}^{*}(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} |R_{kr}(x)|^2.$$

Пусть

$$fs_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} \tilde{f}(a_1 + k\Delta,\ a_2 + r\Delta)\int\limits_{D_{kr}} g(\omega,\ x)d\omega.$$

Функция $fs_n(x)$ отличается от $f(x)$ тем, что $\tilde{f}(\omega)$ заменена ступенчатой функцией. Для достаточно регулярных функций

$$fs_n(x) \to f(x) \text{ и } |fs_n(x)|^2 \to |f(x)|^2 \text{ при } n \to \infty.$$

Справедливо также равенство

$$|fs_n(x)|^2 = \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq l,\ r \neq s)}}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1} \tilde{f}(a_1 + k\Delta,\ a_2 + r\Delta)\tilde{f}(a_1 + l\Delta,\ a_2 + s\Delta)R_{kr}(x)R_{ls}^{*}(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} |\tilde{f}(a_1 + k\Delta,\ a_2 + r\Delta)|^2 |R_{kr}(x)|^2.$$

Выражения для $M|f_n(x)|^2$ и $|fs_n(x)|^2$ отличаются только членами

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} |R_{kr}(x)|^2 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} |\tilde{f}(a_1 + k\Delta,\ a_2 + r\Delta)|^2 |R_{kr}(x)|^2.$$

Функция $R_{kr}(x)$ является интегралом от функции $g(\omega,\ x)$ по области D_{kr}, площадь которой имеет порядок $1/n^2$, следовательно, $|R_{kr}(x)|^2$ имеет порядок $1/n^4$. Поскольку $|\tilde{f}(\omega)| \leq 1$, то отличающиеся члены в $M|f_n(x)|^2$ и $|fs_n(x)|^2$ имеют порядок $1/n^2$ и стремятся к нулю при $n \to \infty$, т. е. $|M|f_n(x)|^2 - - |fs_n(x)|^2| \to 0$ при $n \to \infty$. Как отмечалось выше, $|fs_n(x)|^2 \to |f(x)|^2$, следовательно, если $n \to \infty$, то $M|f_n(x)|^2 \to |f(x)|^2$.

Итак, показано, что $M|f_n(x)|^2 \to |f(x)|^2$ и $Mf_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

Учитывая все изложенное выше, получаем, что при достаточно больших n с большой вероятностью будут выполняться приближенные равенства

$$M|f_n(x)|^2 \approx |f(x)|^2, \qquad M|f_n(x)| \approx |f(x)|,$$

где $f(x)$ — заданная функция; $f_n(x)$ — случайная функция, определяемая равенством

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\int_{D_{kr}} e^{i\varphi_{kr}} g(\omega, x)d\omega.$$

Здесь $\{\varphi_{kr}\}$ — последовательность независимых случайных величин:

$$Me^{i\varphi_{kr}} = \tilde{f}(a_1 + k\Delta, a_2 + r\Delta).$$

Напомним, что для преобразования Френеля, используемого при синтезе оптических киноформных элементов, $g(\omega, x) = (1/\lambda d)\exp(i(\pi/\lambda d) \times \times [(\omega_1 - x_1)^2 + (\omega_2 - y_2)^2])$.

В рассмотренном выше способе существенно то, что случайная функция $\varphi(\lambda)$ является нестационарной. Отметим, что подобный эффект можно получить и для стационарных функций. Чтобы не загружать суть выводов излишними выкладками, рассуждения проведем в одномерном случае.

Если $\varphi(\lambda)$ — гауссовский стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R(\lambda) = M\varphi(0)\varphi(\lambda)$, то

$$M(|G(x)|^2) = e^{-R(0)}\int_0^{\lambda_0}\int_0^{\lambda_0} e^{-i(\lambda_1-\lambda_2)+R(\lambda_1-\lambda_2)}d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$= e^{-R(0)}\int_0^{\lambda_0}\int_0^{\lambda_0} e^{R(\lambda_1-\lambda_2)}\cos((\lambda_1-\lambda_2)x)d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Учитывая, что $R(\lambda)$ и $\cos\lambda x$ — четные функции, получаем

$$M(|G(x)|^2) = 2\lambda_0 e^{-R(0)}\int_0^{\lambda_0}(1-(\lambda/\lambda_0))e^{R(\lambda)}\cos\lambda x d\lambda =$$

$$= 2\lambda_0 e^{-R(0)}\int_{-\lambda_0}^{\lambda_0}(1-(|\lambda|/\lambda_0))e^{R(\lambda)}e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Пусть теперь задана детерминированная функция $f(x) > 0$, такая что

$$f(x) = \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} e^{i\lambda x}\tilde{f}(\lambda)d\lambda.$$

Тогда равенство $M(|G(x)|^2) = f(x)$ будет выполняться при условии

$$e^{R(\lambda)-R(0)}(\lambda_0 - |\lambda|) = \tilde{f}(\lambda)$$

или

$$R(\lambda) = \ln\frac{\tilde{f}(\lambda)}{\lambda_0 - |\lambda|} + R(0).$$

Из последнего неравенства следует, в частности, что $\tilde{f}(0) = \lambda_0$. Это требование удовлетворяется при соответствующем выборе нормировки. Для существования соответствующего стационарного процесса необходимо также выполнение условия

... возможность использования фазовых элементов для получения изображений, у которых модуль преобразования Фурье или Френеля отличается от константы. В изложенном методе существенно то, что значения фазы должны быть статистически независимы в соседних точках. Это может означать весьма жесткие требования к пространственному разрешению. При практической реализации важно как можно точнее знать эти требования. С качественной точки зрения картина представляется достаточно ясной: чем больше преобразование Фурье или Френеля отличается от константы, тем менее коррелированной должна быть фаза и, следовательно, тем большие требования предъявляются к пространственному разрешению. Однако для получения содержательных количественных оценок необходимо проведение дополнительных исследований и математического моделирования с использованием мощной вычислительной техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lesen L. B., Hrsch P. M., Jordan J. A. The kinoform: a new wave form reconstruction device // IBM J. Res. Develop.—1969.—13.—P. 150; Киноформ // Зарубеж. радиоэлектрон.—1969.— № 12.
2. Kermisch D. Image reconstruction from phase information only // JOSA.—1970.—60, N 1.— P. 15.
3. Коронкевич В. П., Ленкова Г. А. Киноформные оптические элементы // Киноформные оптические элементы.—Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1981.
4. Корольков В. П., Коронкевич В. П., Михальцова И. А. и др. Киноформы: технологии, новые элементы и оптические системы // Автометрия.—1989.—№ 3, 4.
5. Трофимов О. Е. О задаче синтеза фазовых преобразователей волновых сигналов // Автометрия.—1979.—№ 2.
6. Трофимов О. Е. Расчет киноформов // Киноформные оптические элементы.—Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1981.
7. Трофимов О. Е. Об одном способе синтеза киноформов // Автометрия.—1978.—№ 3.
8. Крамер Г. Математические методы статистики.—М.: Мир, 1975.
9. Гончарский А. В., Попов В. В., Степанов В. В. Введение в компьютерную оптику.—М.: МГУ, 1991.

Поступила в редакцию 30 апреля 1992 г.

УДК 772.99 : 681.327.5

В. А. Домбровский

(Новосибирск)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ЗАПИСИ В СТРАНИЧНОЙ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ПАМЯТИ НА ПЛОСКОМ НОСИТЕЛЕ

Экспериментально исследована предельная плотность записи в страничной голографической памяти на плоском носителе. Показано, что плотность записи на галоидосеребряных материалах ограничивается в первую очередь дифракционными помехами. Экспериментально продемонстрирована возможность записи фурье-голограмм со средней плотностью 10^6 бит/мм^2 при высоком качестве восстановленной страницы (контраст >25).

Нас интересует ответ на вопрос: какова предельная плотность записи на тонких голограммах? Понятно, что всякая попытка записать информацию