Р О С С И Й С К А Я А К А Д Е М И Я Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

№ 5 1993

УДК 681.3.06 : 528.288

Н. И. Королев

(Ярославль)

ДОСТОВЕРНОСТЬ КОРРЕЛЯЦИОННОГО МЕТОДА СОВМЕЩЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрены две реализации корреляционного метода совмещения двух точечных изображений (метода «редкой сетки»). Предложен новый способ оценки их достоверности на основе построения критерия проверки нулевой гипотезы, состоящей в том, что совмещаемые изображения независимы. Приведены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие эффективность указанного способа оценки достоверности.

Введение. В ряде областей применения цифровых изображений возникает необходимость в обработке точечных изображений, которые могут быть получены в результате фиксации характерных точек исходных изображений. В данной работе рассматривается корреляционный метод совмещения двух точечных изображений, получивший название метода «редкой сетки».

Методу «редкой сетки» посвящен ряд работ [1—4]. В некоторых из них, наряду с двумя неизвестными параметрами сдвига, рассматривались также дополнительные неизвестные параметры, например, поворот на некоторый угол, расхождение по масштабу и т. п. Основной упор при этом делался на алгоритмической стороне дела. Что же касается достоверности совмещения, то этот весьма важный вопрос в ряде работ вообще не рассматривался [3, 4]. С другой стороны, там, где авторы касались оценки достоверности, они, по-видимому, считали этот вопрос второстепенным и не уделяли ему достаточного внимания [1, 2].

В настоящей работе в центре внимания находится качественная оценка достоверности метода «редкой сетки» при условии наличия только параллельного сдвига между совмещаемыми изображениями. Мы не будем предполагать, как это обычно делается, что одно из изображений, которое будем называть реальным изображением (РИ), является зашумленной частью другого, эталонного изображения (ЭИ). Проблема достоверности здесь будет решаться с точки зрения проверки нулевой гипотезы H_0, состоящей в том, что РИ и ЭИ независимы. Только в случае отклонения H_0 совмещение можно считать надежным. Такой подход обладает рядом преимуществ. С одной стороны, его можно применять в реальном масштабе времени, с другой — в нем допускается возможность отсутствия среди точек РИ образов некоторых (немногих) эталонных точек. Наличие в изображениях «пропавших» точек приводит к большей помехоустойчивости корреляционного метода совмещения точечных изображений по сравнению с методами, использующими инвариантные признаки.

Одной из главных сфер применения алгоритмов совмещения точечных изображений является астронавигация, где требуется найти положение РИ (РИ — снимок некоторого участка небесной сферы) внутри ЭИ, построенного по данным звездного каталога. Роль шумовых точек (наряду с другими помехами) в РИ играют образы тех звезд, которые отсутствуют в каталоге. Наше предположение допускает также, что ряд звезд из каталога не воспроизводится в РИ.

Обычное требование принадлежности РИ к ЭИ отвечает «оптимистическому» предположению о достаточно точной предварительной ориентации. Здесь же мы не исключаем возможности того, что предварительная ориентация выполнена неудачно.

Отметим также, что в качестве модели для звездного точечного поля принято брать пуассоновское точечное поле. При фиксированных границах изображения и заданном числе точек в нем это приводит к равномерному и независимому распределению точек изображения.

Метод «редкой сетки». Подробное описание метода «редкой сетки» можно найти в [1—3]. Здесь же остановимся на основных его положениях, необходимых в дальнейшем для оценки достоверности.

Задача, которая решается методом «редкой сетки», заключается в следующем. Пусть известны размеры изображений (в нашем случае ЭИ и РИ — квадраты размерами $H_1 \times H_1$ и $H_2 \times H_2$ соответственно, $H_1 > H_2$), количество точек в каждом из изображений (n_1 — число точек в ЭИ, n_2 — в РИ) и координаты этих точек ((x_i, y_i) — координаты точек в ЭИ, (u_j, v_j) — в РИ), причем каждая точка в ЭИ и РИ распределена равномерно и независимо от точек соответствующего ей изображения. Требуется определить параметры (a', b') такого параллельного сдвига РИ относительно ЭИ, в результате которого точки в парах сигнальных точек должны находиться в непосредственной близости друг от друга, так что (a', b') становятся близкими к истинным значениям параметров сдвига (a_0, b_0). Сигнальной будем называть такую пару точек, в которой одна точка, взятая из РИ, является образом другой, принадлежащей ЭИ, при совмещении ЭИ с РИ с параметрами (a_0, b_0).

Рассмотрим плоскость $0ab$, которую будем называть корреляционной плоскостью (КП). Множество всех допустимых параметров сдвига (a, b) между РИ и ЭИ, таких что РИ целиком находится в ЭИ, образует квадрат $D = [0, \Delta H] \times [0, \Delta H]$ на КП, где $\Delta H = H_1 - H_2$. Прямыми, параллельными осям $0a$ и $0b$, он разбивается на m^2 одинаковых квадратов размерами $h \times h$, причем $m = \Delta H / h$, $h \ll \Delta H$. Каждому из рассматриваемых квадратов, приписав ему индексы (A, B) и обозначив $D_{A,B}$, поставим в соответствие число $K(A, B)$:

$$K(A, B) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \chi\left(A - \left\lfloor \frac{x_i - u_j}{h} \right\rfloor, B - \left\lfloor \frac{y_i - v_j}{h} \right\rfloor\right), \quad \begin{array}{l} A = \overline{0, m-1}, \\ B = \overline{0, m-1}, \end{array} \tag{1}$$

где

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y = 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Получим функцию $K(A, B)$, которую будем называть корреляционной. Смысл функции $K(A, B)$ состоит в том, что она равна числу точек вида

$$(a_{ij}, b_{ij}) = (x_i - u_j, y_i - v_j), \quad i = \overline{1, n_1}, \; j = \overline{1, n_2}, \tag{2}$$

попавших в квадрат $D_{A,B}$ при нанесении этих точек на КП. Пусть $W^* = K(A^*, B^*) = \max_{A,B}(K(A, B))$.

Метод «редкой сетки» совмещения двух точечных изображений заключается в том, чтобы по максимуму W^* корреляционной функции найти индексы (A^*, B^*) самого «тяжелого» квадрата на КП и получить приближенные значения параметров сдвига (a', b'), усредняя координаты точек вида (2), попавших в указанный квадрат.

Оценка достоверности метода «редкой сетки». В [1] проблема достоверности рассматривается с точки зрения определения вероятности события, при котором «вес» квадрата на КП, содержащего (a_0, b_0), превосходит «вес» любого из оставшихся квадратов при условии, что РИ целиком находится в ЭИ. Такой подход удобен для сравнения эффективности нескольких методов совмещения точечных изображений, а также для оптимального выбора размера квадратов на КП. Однако при практической реализации метода «редкой сетки» утверждение о принадлежности РИ к ЭИ является лишь гипотезой, которую необходимо либо принять, либо отклонить на основе некоторого решающего правила. Далее описывается способ построения такого решающего правила, в котором используется одна из классических схем проверки статистических гипотез [5]. В данном случае эта схема заключается в создании критерия проверки нулевой гипотезы H_0, состоящей в том, что РИ и ЭИ независимы.

В качестве меры отклонения от H_0 рассмотрим максимум W^* корреляционной функции. Зададим уровень значимости ε. Критерий проверки H_0 построим следующим образом:

если конкретное значение W^* превзойдет пороговое d_0, отвечающее заданному ε, то H_0 отклоняется и принимается гипотеза, состоящая в том, что РИ целиком находится в ЭИ с параметрами сдвига (a', b'), близкими к (a_0, b_0), при этом возможность частичного пересечения РИ с ЭИ в данном случае неправдоподобна;

если $W^* < d_0$, то гипотеза H_0 принимается.

Если H_0 отклонена, то дальнейшее уточнение (a', b') может быть осуществлено с помощью некоторых достаточно очевидных процедур, приведенных, например, в [3].

Задача, таким образом, свелась к нахождению d_0.

Пусть выполняется гипотеза H_0. Тогда будем искать d_0 как минимальное целое d, при котором выполняется неравенство

$$P(W^* > d) \le \varepsilon. \tag{3}$$

В силу предположения о выполнении гипотезы H_0, а также о том, что точки ЭИ и РИ независимы и равномерно распределены, значения функции $K(A, B)$ являются одинаково распределенными дискретными случайными величинами $\gamma_{A,B}$, $A, B = \overline{0, m-1}$ ($W^* = \max(\gamma_{A,B})$). Кроме того, введем случайную величину γ, которая распределена так же, как и любая из $\gamma_{A,B}$, т. е. γ равна числу точек вида (2), попавших в некоторый квадрат D_h размером $h \times h$ в области D на КП; для удобства в качестве D_h будем использовать $D_{0,0}$.

Аналитически точно определить d_0 по неравенству (3) не представляется возможным, так как неизвестен ряд распределения не только W^*, но и γ. Однако удается точно получить $\mathrm{M}\gamma$ и $\mathrm{D}\gamma$. Поэтому сначала заменим (3) на неравенство

$$P(\gamma > d) \le \varepsilon / m^2. \tag{4}$$

В силу выполнения неравенства

$$P(W^* > d) = P\left(\sum_{A,B}\{\gamma_{A,B} > d\}\right) \le m^2 P(\gamma > d),$$

из которого следует, что (4) влечет за собой (3), неравенство (4) дает верхнюю оценку d_0. Данные компьютерного моделирования показывают, что при удачном выборе приближения для γ эта оценка достаточно точна.

Заменим в (4) γ на случайную величину ξ, закон распределения которой близок к γ и легко вычислим, причем при этом должны выполняться равенства

$$\mathrm{M}\xi = \mathrm{M}\gamma, \quad \mathrm{D}\xi = \mathrm{D}\gamma. \tag{5}$$

В качестве ξ было рассмотрено несколько подходящих по смыслу решаемой задачи и удовлетворяющих равенствам (5) случайных величин. Окончательный выбор ξ в пользу пуассоновской случайной величины, умноженной на константу, был сделан по результатам статистического моделирования, которые будут приведены ниже.

Получим далее формулы для $\mathrm{M}\gamma$ и $\mathrm{D}\gamma$. Напомним, что все приведенные ниже выкладки проводятся при условии выполнения H_0, т. е. при условии независимости ЭИ и РИ.

Представим γ в виде следующей суммы:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} I_{A_{ij}}, \tag{6}$$

где $I_{A_{ij}}$ — индикатор события A_{ij}, состоящего в том, что точка (a_{ij}, b_{ij}) попадает в квадрат D_h.

Осуществим параллельный сдвиг РИ относительно ЭИ так, чтобы параметры сдвига между ними соответствовали середине D_h. Тогда событие A_{ij} произойдет только в том случае, если i-я точка из ЭИ попадет в квадрат $h \times h$ с центром в j-й точке из РИ. Для любого положения j-й точки из РИ вероятность такого события равна h^2/H_1^2. Отсюда следует, что $\mathrm{M}I_{A_{ij}} = h^2/H_1^2$ $(i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2})$ и в соответствии с (6)

$$\mathrm{M}\gamma = n_1 n_2 h^2/H_1^2. \tag{7}$$

Дисперсию $\mathrm{D}\gamma$ также получим, пользуясь (6):

$$\mathrm{D}\gamma = \mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} I_{A_{ij}}\right) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \mathrm{cov}(I_{A_{ij}}, I_{A_{kl}}). \tag{8}$$

При вычислении ковариаций в (8) рассмотрим три возможных случая:

1) $i = k$, $j = l$. Тогда $\mathrm{cov}(I_{A_{ij}}, I_{A_{ij}}) = \mathrm{D}I_{A_{ij}} = h^2(1 - h^2/H_1^2)/H_1^2$. Число таких ковариаций в (8) равно $n_1 n_2$.

2) $i = k, j \neq l$. Тогда $\mathrm{cov}(I_{A_{ij}}, I_{A_{il}}) = \mathrm{M}I_{A_{ij}}I_{A_{il}} - \mathrm{M}I_{A_{ij}}\mathrm{M}I_{A_{il}} = P(A_{ij}A_{il}) - (\mathrm{M}I_{A_{ij}})^2$.

Событие $A = A_{ij}A_{il}$ произойдет только тогда, когда в результате выполнения указанного выше параллельного сдвига РИ относительно ЭИ в квадрат $h \times h$ с центром в i-й точке из ЭИ (обозначим его D_i) попадут j-я и l-я точки из РИ. Поскольку все точки обоих изображений распределены равномерно и независимо друг от друга, вероятность интересующего нас события равна квадрату отношения площади пересечения D_i с РИ к площади РИ. Однако D_i может пересекаться с РИ либо полностью, либо частично, либо вовсе не пересекаться. Поэтому искомую вероятность вычислим по формуле полной вероятности. В результате получим

$$P(A) = \iint_M p(x, y) P(A/X = x, Y = y)\,dx\,dy, \tag{9}$$

где M — множество положений центра D_i, $M = [0, H_1] \times [0, H_1]$; (X, Y) — случайные координаты центра D_i; $p(x, y)$ — совместная плотность распределения (X, Y).

В силу равномерного распределения точек ЭИ $p(x, y) = H_1^{-4}$, $(x, y) \in M$. Вследствие равномерного распределения и независимости точек из РИ

$$P(A/X = x, Y = y) = (f(x)f(y)/H_2^2)^2,$$

где $f(x)$, $f(y)$ — размеры прямоугольника пересечения D_i с РИ;

$$f(z) = \begin{cases} z, & 0 \le z < h, \\ h, & h \le z < H_2, \\ H_2 + h - z, & H_2 \le z < H_2 + h, \\ 0, & H_2 + h \le z < H_1. \end{cases}$$

Из формулы (9) получаем

$$P(A) = \iint\limits_M p(x, y)(f(x)f(y)/H_2^2)^2 dxdy =$$

$$= \left(\int\limits_0^{H_2+h} f^2(x)dx \right)^2 / (H_1^2 H_2^4) = h^4(H_2 - h/3)^2/(H_1^2 H_2^4).$$

Тогда

$$\operatorname{cov}(I_{A_{ij}}, I_{A_{il}}) = \frac{h^2}{H_1^2}\left(\frac{h^2}{H_2^2} - \frac{h^2}{H_1^2} - \frac{2h^3}{3H_2^3} + \frac{h^4}{9H_2^4} \right).$$

Сумма (8) содержит $n_1 n_2 (n_2 - 1)$ таких ковариаций.

3) $i \neq k$. Тогда индикаторы $I_{A_{ij}}$ и $I_{A_{kl}}$ независимы, следовательно,

$$\operatorname{cov}(I_{A_{ij}}, I_{A_{kl}}) = 0.$$

Подставив полученные ковариации в (8) и упростив выражение, имеем

$$D\gamma = n_1 n_2 \frac{h^2}{H_1^2}\left(1 + (n_2 - 1)\frac{h^2}{H_2^2}\left(1 - \frac{2h}{3H_2} + \frac{h^2}{9H_2^2} \right) - n_2 \frac{h^2}{H_1^2} \right). \qquad (10)$$

Сравнивая $M\gamma$ и $D\gamma$, определяемые по формулам (7) и (10) соответственно, представим $D\gamma$ в виде

$$D\gamma = cM\gamma,$$

где

$$c = 1 + (n_2 - 1)\frac{h^2}{H_2^2}\left(1 - \frac{2h}{3H_2} + \frac{h^2}{9H_2^2} \right) - n_2 \frac{h^2}{H_1^2}.$$

Как уже отмечалось, в настоящей работе предлагается в качестве приближения к γ взять случайную величину ξ, такую что

$$\xi = c\eta, \qquad (11)$$

где η — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $\lambda = M\gamma/c$. Очевидно, что η удовлетворяет условиям (5).

По ряду распределения η, который в отличие от γ легко находится, оценим d_0 как минимальное целое d, удовлетворяющее неравенству

$$P(\xi > d) < \varepsilon/m^2. \qquad (12)$$

Результаты компьютерного моделирования. Несмотря на то что полученная оценка d_0 является приближенной, исследования, проведенные по методу статистических испытаний на компьютере, показали ее высокую точность.

В этих исследованиях рассматривались следующие оценки d_0 (см. таблицу): d_1 — выборочная квантиль максимума W^* корреляционной функции $K(A, B)$ порядка $1 - \varepsilon$ (оценка d_0 методом Монте-Карло); остальные четыре оценки d_0 получены по неравенству (12), где в качестве ξ взяты: для d_2 случай-

n_1, n_2	d_0', d_0''	d_1	d_2 p_2	d_3 p_3	d_4 p_4	d_5 p_5
100, 100	11, 11	11	11 0,026	9 0,326	15 0,0	11 0,026
200, 100	16, 17	16	16 0,038	14 0,275	20 0,001	16 0,038
100, 1000	53, 54	53	53 0,047	50 0,163	58 0,009	55 0,028
200, 1000	88, 90	89	89 0,041	85 0,126	93 0,010	90 0,027
100, 2000	95, 97	96	97 0,031	92 0,110	104 0,006	100 0,021
200, 2000	159, 165	162	162 0,045	158 0,078	170 0,010	167 0,018

ная величина (11), т. е. пуассоновская, умноженная на константу, для d_3 нормальная, для d_4 случайная величина, имеющая гамма-распределение, для d_5 отрицательно-биномиальная, причем для всех этих случайных величин выполнялись равенства (5).

В таблице приведены результаты проведения серии из $N = 1000$ экспериментов для нескольких пар значений параметров (n_1, n_2), остальные параметры фиксировались: $H_1 = 1024$, $H_2 = 512$, $h = 16$, $\varepsilon = 0,05$. Каждый такой эксперимент включал в себя компьютерное моделирование не зависящих друг от друга ЭИ и РИ, вычисление максимума W^* корреляционной функции $K(A, B)$ по методу «редкой сетки», проверку гипотезы H_0 по критериям, использующим в качестве порогового значения d_2, d_3, d_4, d_5 соответственно, и накопление статистической информации. С тем, чтобы показать, насколько точны полученные оценки порогового значения d_0, в таблице приведены границы (d_0', d_0'') 95 %-ного доверительного интервала для d_0, а также частоты p_2, p_3, p_4, p_5 неверного срабатывания критериев проверки H_0 с соответствующими пороговыми значениями. Чем ближе p_i $(i = \overline{2, 5})$ к ε, тем точнее оценка d_i порогового значения d_0.

В [6] показано, что, используя порядковые статистики $W^*_{(i)}$, $i = \overline{1, N}$, т. е. упорядоченные по возрастанию значения W^*, полученные в N экспериментах, можно найти такие r и s, что $P(W^*_{(r)} \le d_0 \le W^*_{(s)}) \ge 1 - \alpha$ (в нашем случае $\alpha = 0,05$). Выбор r и s осуществляется на основе неравенства

$$\sum_{i=r}^{s-1} C_N^i p^i (1 - p)^{N-i} \ge 1 - \alpha,$$

где $p = 1 - \varepsilon$. Применяя нормальную аппроксимацию биномиального распределения (так как правило трех сигм для последнего при заданных N и p выполняется), получаем следующее правило:

$$d_0' = W^*_{(r)}, \qquad d_0'' = W^*_{(s)},$$

где

$$r = \lceil Np - u_\alpha \sqrt{Np(1 - p)} \rceil, \quad s = \lceil Np + u_\alpha \sqrt{Np(1 - p)} \rceil + 1,$$

u_α — верхняя $\alpha/2$-значимая точка стандартного нормального распределения.

Анализируя данные, приведенные в таблице, нетрудно заметить, что оценка d_2 значительно точнее, чем d_3, d_4, d_5. В то же время, практически не уступая d_1 по точности, оценка d_2 на несколько порядков превосходит ее по быстродействию. Так, например, для $n_1 = 200$, $n_2 = 2000$ машинное время, затрачиваемое на получение d_1, более чем 60 000 раз превосходит аналогичное время для d_2.

Улучшенная реализация метода «редкой сетки» и ее достоверность. Поскольку положение (a_0, b_0) равновероятно в пределах каждого из квадратов $D_{A,B}$, то в некоторых случаях возможны «высыпания» точек вида (2), соответствующих парам сигнальных точек, в соседние квадраты и, как следствие, ухудшение работоспособности рассматриваемого метода [3]. Для устранения этого недостатка предлагается следующее.

Уменьшим вдвое размер h квадратов $D_{A,B}$ на КП и будем искать максимум функции:

$$\widetilde{K}(A', B') = K'(A', B') + K'(A' + 1, B') + K'(A', B' + 1) + K'(A' + 1, B' + 1),$$

$$A', B' = \overline{0, 2m - 2},$$

где $K'(A', B')$ получена из функции (1) заменой h на $h' = h/2$. Тогда максимум $\widetilde{W}$ функции $\widetilde{K}(A', B')$ будет равняться весу самой «тяжелой» четверки соседних квадратов $D_{A',B'}$ на КП, а приближенные значения (a', b') параметров сдвига — средним координат точек вида (2), попавших в указанную четверку квадратов.

Критерий проверки H_0 построим на тех же, что и для первой реализации, принципах. Оценим d_0 по неравенству (12), в котором m^2 заменяется на $(2m - 1)^2$. Здесь используется тот факт, что все $\widetilde{K}(A', B')$ распределены также, как и γ, а общее число различных значений (A', B') равно $(2m - 1)^2$. Результаты компьютерного моделирования показали, что такая оценка порогового значения достаточно точна. Лишь с ростом n_1 и n_2 она становится немного больше той, которая посчитана методом Монте-Карло, что на практике является не столь критичным.

Гипотеза H_0 отклоняется, если произойдет событие $\{\widetilde{W} > d_0\}$, и принимается в противном случае.

Заключение. В данной работе предложен новый подход к оценке достоверности совмещения точечных изображений по методу «редкой сетки». Этот подход основан на построении критерия проверки нулевой гипотезы, которая заключается в предположении о независимости двух точечных изображений. Теоретически обоснован и практически (методом Монте-Карло) проверен способ построения такого критерия для случая, когда между ЭИ и РИ, в свою очередь являющихся фрагментами соответствующих пуассоновских полей, в качестве параметров связи возможен только параллельный сдвиг в пределах ЭИ. Рассмотрена также улучшенная реализация метода «редкой сетки», позволяющая более точно локализовать сгущение точек вида (2) на КП, вызванное наличием пар сигнальных точек, что значительно увеличит как точность, так и надежность оценки (a_0, b_0). При этом быстродействие метода уменьшится лишь незначительно, так как подавляющее большинство арифметических операций приходится на формирование матрицы значений функций $K(A, B)$ и $K'(A', B')$ и составляет $0(n_1 n_2)$ для обеих реализаций данного метода совмещения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анисимов Б. В., Курганов В. Д., Злобин В. К. Распознавание и цифровая обработка изображений.—М.: Высш. шк., 1983.

2. Белоглазов И. Н., Тарасенко В. П. Корреляционно-экстремальные системы.—М.: Сов. радио, 1974.

3. Злобин В. К., Кобзев В. Н. Корреляционное отождествление звездных конфигураций для целей координатной привязки аэрокосмических снимков // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка.—1982.—№ 1.

4. **Злобин В. К., Кобзев В. Н.** Цифровая корреляционно-экстремальная система совмещения двух изображений // Специализированные и комбинированные вычислительные устройства.—Рязань: РРТИ, 1979.

5. **Крамер Г.** Математические методы статистики.—М.: Мир, 1975.

6. **Дэйвид Г.** Порядковые статистики.—М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 5 января 1993 г.
