РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1993

УДК 535.8 : 535.514 : 535.317.61

В. Ю. Осипов

(Санкт-Петербург)

ОПТИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМЫЙ ДВУМЕРНЫЙ ФУРЬЕ-АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

Для ряда специальных задач оптической обработки информации представляет интерес тот факт, что при дифракции лазерного пучка на микротранспарантах одного класса сложных интерферограмм волновое поле в области дифракции Фраунгофера, а значит и квадрат модуля фурье-образа интерферограммы, имеют псевдокаустический характер. Теоретически исследованы особенности таких волновых полей (ячеистая структура внутренних областей, факельная структура острия и огибающих) и выявлена физическая причина их формирования. Проведен детальный численный расчет для распределения интенсивности дифракционного поля в дальней зоне, в рамках квазиклассических лучевых представлений осуществлена геометрооптическая интерпретация результатов дифракции.

Введение. В работе [1] сообщалось, что при падении лазерного пучка на микротранспарант изображения интерферограммы, представленной н рис. 1, с функцией амплитудного пропускания $T(x, y)$ в плоскости x, y вида

$$T(x, y) = T_0(1 + \cos(\varphi(x, y)))/2,$$
$$\varphi(x, y) = ax(x^2 + y^2 - R^2) \qquad (1)$$

и с локальными пространственными частотами ω_x, ω_y, равными

$$\omega_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = a(3x^2 + y^2 - R^2);$$
$$\omega_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2axy, \qquad (2)$$

результирующее волновое поле в области дифракции Фраунгофера имеет псевдокаустический вид с характерной факельной и ячеистой структурами (рис. 2). Здесь T_0 — величина максимального пропускания транспаранта, $a > 0$, R^2 — параметры записанной интерференционной картины.

Ввиду важности анализируемого класса интерференционных полей для ряда оптических систем [2, 3], в том числе и для систем с аберрациями комы третьего порядка [4, 5], их фурье-анализ представляется актуальным для ряда специальных задач оптической обработки информации и распознавания образов [6], оптического способа формирования и обработки радиосигналов с квадратичной частотной модуляцией [7, 8].

Последующее рассмотрение преследует в осно ом три цели: 1) пок зать детальную физическую «природу» во никновения в дифракционном эксперименте псевдокаустических структур волнового поля на основе геометрооптической интерпретации результатов дифракции в рамках квазиклассических лучевых представлений; 2) дать строгое доказательство того факта, что анализируемые дифракционные поля являются каустическими в

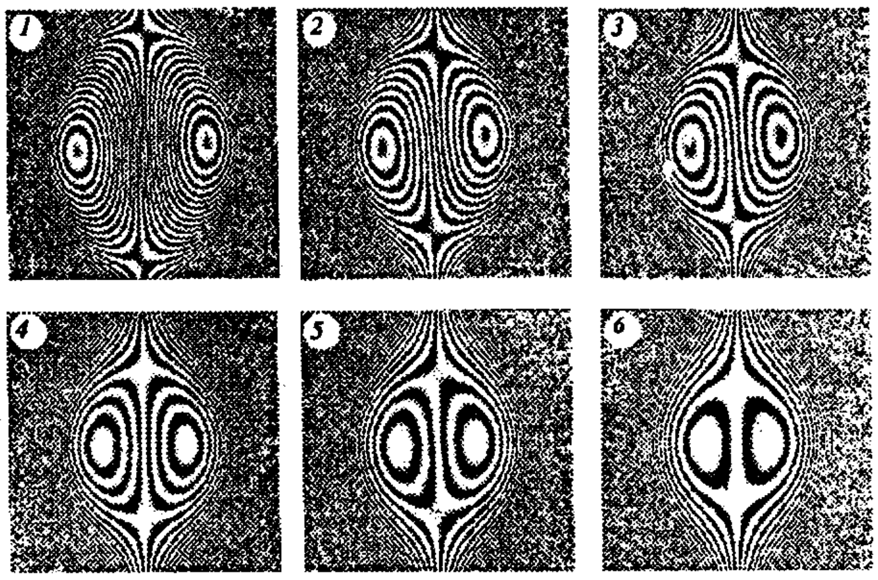

Рис. 1. Интерференционные поля вида $\cos(ax(x^2 + y^2 - R^2))$.
Параметры: $a = 0{,}2$; $R = 10$. Апертура: $-12{,}8 < x < +12{,}8$; $-12{,}8 < y < +12{,}8$

математическом аспекте, так как изначально это неочевидно; 3) исследовать особенности псевдокаустики на базе детальных численных расчетов.

Несмотря на то что в экспериментальном и даже теоретическом плане подобные дифракционные поля рассматривались, как это уже отмечалось в [1], рядом авторов применительно к оптическим системам с аберрациями комы третьего порядка [5, 9, 10] и геометрии эксперимента с фокусировкой, сформулированные выше задачи данного исследования не нашли должного отражения в литературе. Это связано с тем обстоятельством, что до 1964—1967 гг., т. е. до появления статей [11—14], в литературе отсутствовал корректный геометрооптический подход к анализу сложных волновых, в том числе и каустических, явлений (данный подход развивался далее в [15] и в окончательном и наиболее полном виде был сформулирован к 1980 году в [16, 17]), а в расчетном плане отсутствовали доступная вычислительная база для проведения расчетов с высоким быстродействием и алгоритм быстрого преобразования Фурье. Кроме того, как это указывалось в [1], получение анализируемого вида каустических полей в непосредственном дифракционном экс-

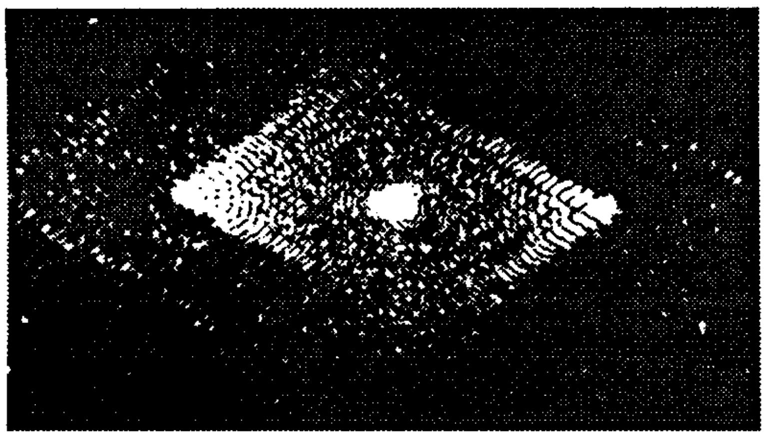

Рис. 2. Экспериментально синтезированная псевдокаустическая структура волнового поля, полученная при дифракции на микротранспаранте интерферограммы.
(Видны изображения, соответствующие +1-му и −1-му порядкам дифракции)

перименте было впервые осуществлено в [18] и, следовательно, не могло являться предметом для более раннего рассмотрения. Как следствие этого и простое аналитическое описание таких полей, приводимое в последующих разделах статьи и ранее в литературе не встречавшееся, является значительно более ясным и приемлемым для прикладных расчетов, чем, например, описание в неявном виде на базе функций Ломмеля [4].

Укажем также, что геометрооптическое истолкование результатов дифракции представляется интересным и в настоящее время [19] в связи со все еще открытыми вопросами лучевой структуры полей, возникающих при дифракции на решетках с медленно изменяющимися параметрами [20], а исследование тонкой структуры каустических полей представляет самостоятельный интерес для различных областей науки [21] и техники [22]. В связи с этим обстоятельством в данной работе уделено большое внимание изучению особенностей синтезированных псевдокаустических полей.

1. Численный фурье-анализ. Расчет поля дифракции. Исследование дифракции лазерного пучка на синтезированных сложных двумерных структурах осуществлялось и теоретически. В дальней зоне дифракции Фраунгофера угловое распределение интенсивности дифрагированного поля пропорционально квадрату модуля фурье-образа функции амплитудного пропускания исходной двумерной структуры (для позитивного микродиапозитива с амплитудной записью). Тогда без учета постоянной составляющей в функции амплитудного пропускания (т. е. не рассматривая нулевой порядок дифракции) и принимая во внимание, что интерферограмма обладает двумя осями симметрии x, y, задача сводится к вычислению квадрата следующего двумерного интеграла:

$$J(\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y) = \int_{-L_y}^{+L_y}\int_{-L_x}^{+L_x} \cos(ax(x^2 + y^2 - R^2))\cos\hat{\omega}_x x \cdot \cos\hat{\omega}_y y\,dx\,dy. \tag{3}$$

Здесь $\hat{\omega}_x$, $\hat{\omega}_y$ — пространственные частоты по x и y; L_x, L_y — параметры действующей апертуры транспаранта.

Отметим, что угловое распределение продифрагировавшего потока излучения $\Phi(\nu_x, \nu_y)$ в угловых координатах ν_x, ν_y пропорционально величине

$$\left[\frac{2\pi}{\lambda}\right]^2 \left|J\left(\frac{2\pi\nu_x}{\lambda}, \frac{2\pi\nu_y}{\lambda}\right)\right|^2$$

при малых углах дифракции, а переход к распределению интенсивности $I(X, Y)$ в плоскости экрана осуществляется пересчетом

$$X = f\nu_x = f\frac{\lambda\hat{\omega}_x}{2\pi},\ Y = f\nu_y = f\frac{\lambda\hat{\omega}_y}{2\pi},$$

$$I(X, Y) \sim \left[\frac{2\pi}{\lambda f}\right]^2 \left|J\left(\frac{2\pi X}{\lambda f}, \frac{2\pi Y}{\lambda f}\right)\right|^2.$$

Здесь f — расстояние от микродиапозитива до плоскости экрана, λ — длина волны.

Интеграл (3) при значениях пределов интегрирования $\pm L_x$ и $\pm L_y$, близких к условиям эксперимента (т. е. к реально действующей апертуре), вычислялся в частотной плоскости с помощью стандартного алгоритма быстрого двумерного преобразования Фурье (БПФ) типа Кули — Тьюки [14]. Для повышения разрешения в частотной плоскости изображение интерферограммы на двумерной сетке узлов окружалось в соответствии с [23, 24] так называемой «рамкой нулей», позволяющей значительно увеличить эффективно действующую квадратную апертуру в БПФ (в 2,87 раза по каждому из измерений). На рис. 3 показано распределение дифракционного поля, вычисленное методом БПФ при следующих параметрах: $a = 0{,}2$, $R = 10$, $|L_x| = 12{,}8$, $|L_y| = 12{,}8$, размер ячейки $\Delta x\Delta y \approx (8{,}9887 \cdot 10^{-3})^2$. Из полученного на ЭВМ распределения

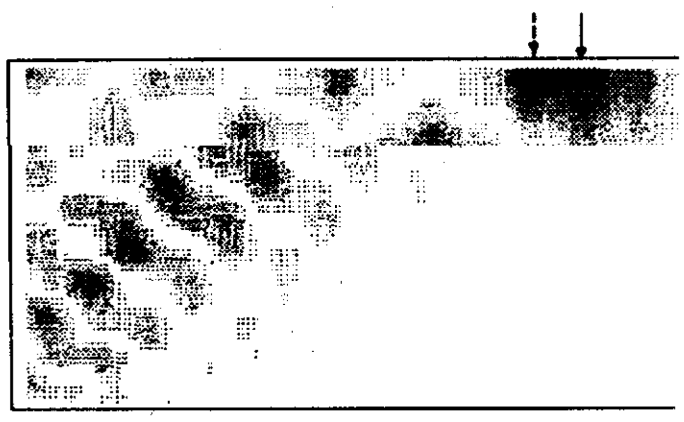

Рис. 3. Рассчитанное на ЭВМ распределение интенсивности волнового поля вблизи факельной вершины:

сплошной стрелкой показано положение области с наибольшей интенсивностью, штриховой — области с побочным неосновным максимумом

дифракционного поля можно сделать вывод о наличии ярко выраженной «двугорбой» структуры у факельной ячейки острия псевдокаустики и у некоторых факельных ячеек на огибающей. Здесь имеется в виду присутствие у соответствующих ячеек двух максимумов интенсивности поля. Наличие таких особенностей или возможность их появления ранее в литературе не отмечались. Выявление этих особенностей для конкретных экспериментальных полей стало возможным лишь в результате численных расчетов с высоким разрешением в частотной плоскости. Расчетное распределение дифракционного поля подтверждает также такие черты экспериментального поля рис. 2, как вытянутый и неровный характер факельных ячеек, находящихся на огибающей вдали от каустической вершины. Отметим, однако, что по результатам численных расчетов для вышеприведенных параметров область наибольшего значения интенсивности поля для одного из квадрантов* соответствует в частотной плоскости точке с координатами $(0{,}94\,aR^2, 0)$. На рис. 4 показано распределение знаков вещественной части преобразования Фурье внутри псевдокаустики, т. е. в соответствующей классическому рассмотрению области «света» (как в ячеистых областях с наибольшей интенсивностью (рис. 4, *a*), так и в областях с минимумом интенсивности (рис. 4, *b*)), и вне ее (см. рис. 4, *b*), т. е. в классически соответствующей области «тени». В областях с наибольшей интенсивностью изменение знака фурье-амплитуды происходит в «шахматном» порядке, т. е. для отсчетов, являющихся ближайшими соседями, имеет место изменение фазы на π (π — неопределенность). В минимумах интенсивности внутри псевдокаустики (междуячеечные области) и вне тела псевдокаустики изменение знака фурье-амплитуды носит уже другой характер. Быстрота изменения знака фурье-амплитуды в данном случае зависит от выбранной действующей в БПФ апертуры.

2. Анализ каустического характера поля дифракции в геометрооптическом приближении. В приближении геометрооптической теории дифракции при нормальном падении парциального луча на элемент двумерной амплитудной структуры с осциллирующей функцией пропускания, локальные прост-

---

* Расчетные карты распределения поля приведены для IV квадранта частотной плоскости при $\omega_x > 0$, $\omega_y < 0$.

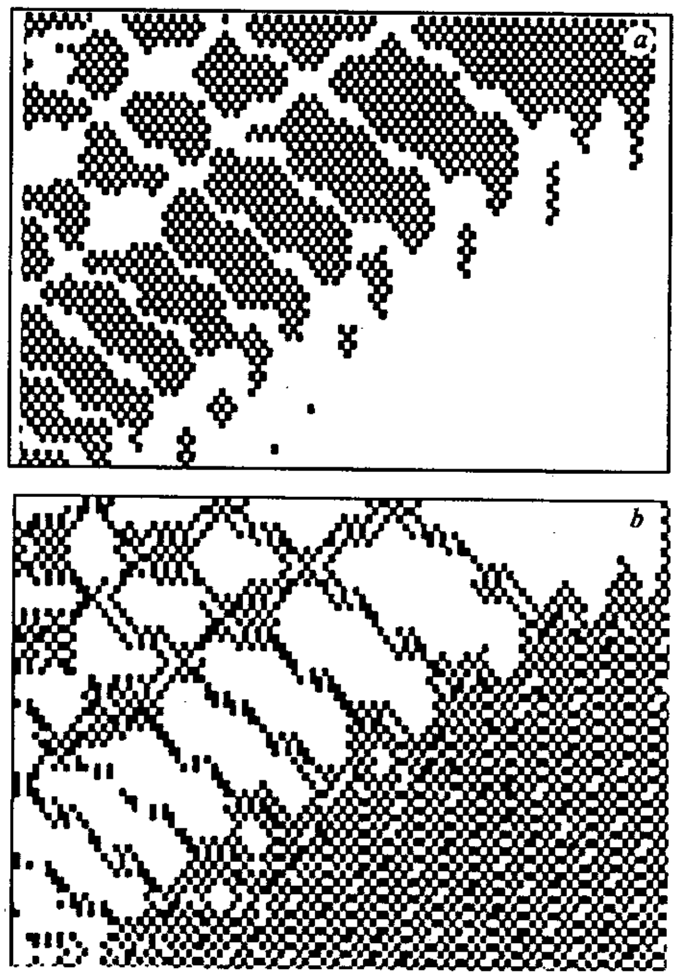

Рис. 4. Рассчитанное на ЭВМ распределение знака фурье-амплитуды в областях с наибольшей интенсивностью внутри псевдокаустики (*a*), в междуячеечных областях с минимальной интенсивностью внутри псевдокаустики и в области условной геометрической «тени» (*b*)

ранственные частоты которой слабо зависят от координат x, y, на выходе системы, т. е. в зоне дифракции Фраунгофера, имеем, кроме луча, соответствующего нулевому порядку дифракции, два парциальных луча с угловыми координатами, равными $\lambda\omega_x/2\pi$, $\lambda\omega_y/2\pi$ и $-\lambda\omega_x/2\pi$, $-\lambda\omega_y/2\pi$, которые соответствуют +1-му и −1-му порядкам дифракции. Здесь ω_x, ω_y — локальные пространственные частоты по x и y в точках x, y транспаранта. В этом представлении бесконечно малый элемент транспаранта $dxdy$ рассматривается как прямолинейная дифракционная решетка с пространственной частотой $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ и углом между направлением «штрихов» и осью $0y$, равным $\operatorname{arctg} \frac{\omega_y}{\omega_x}$. Тогда распределение потока дифрагированного излучения в координатах ν_x, ν_y будет описываться преобразованием системы координат x, y (на которую падает исходный пучок света с постоянной интенсивностью по своей апертуре) в систему координат ω_x, ω_y. В случае если преобразование $\omega_x = f_x(x, y)$, $\omega_y = f_y(x, y)$ не имеет особенностей, то распределение потока дифрагированного излучения от одного из порядков дифракции в координатах ω_x, ω_y будет определяться отношением площади элемента $D(x, y)$ в плоскости x, y к площади соответствующего элемента $D(\omega_x, \omega_y)$ в плоскости ω_x, ω_y, т. е. является обратно пропорциональным якобиану преобразования:

$$\omega_x = f_x(x, y) = a(3x^2 + y^2 - R^2),$$

$$\omega_y = f_y(x, y) = 2axy.$$

В исследуемом случае якобиан D такого преобразования равен

$$\frac{D(\omega_x, \omega_y)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} & \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} & \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma ax & 2ay \\ 2ay & 2ax \end{vmatrix} = 12a^2x^2 - 4a^2y^2 \qquad (4)$$

и интенсивность поля дифракции $I \sim \frac{1}{D} = \frac{1}{12a^2x^2 - 4a^2y^2}$.

Видно, что при падении парциальных лучей на вход транспаранта вдоль линий $y = \pm\sqrt{3}x$ интенсивность дифракционного поля в угловых координатах бесконечно возрастает, что и соответствует бесконечной интенсивности в геометрооптическом приближении на огибающих псевдокаустик с параметрами $\omega_x = \pm aR^2 \pm \sqrt{3}\omega_y$ при $\omega_y > 0$ и $\omega_x = \pm aR^2 \pm \sqrt{3}\omega_y$ при $\omega_y < 0$ (рис. 5, где иллюстрируется геометрооптическая интерпретация результатов дифракции и показаны в плоскостях (x, y) и (ω_x, ω_y) соответствующие точки и геометрические области). В рассматриваемом случае, однако, преобразование $\omega_x = f_x(x, y)$, $\omega_y = f_y(x, y)$ имеет следующую особенность: каждой точке ω_x, ω_y соответствуют две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ из одного квадранта* в плоскости $x0y$. Для $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$ имеем

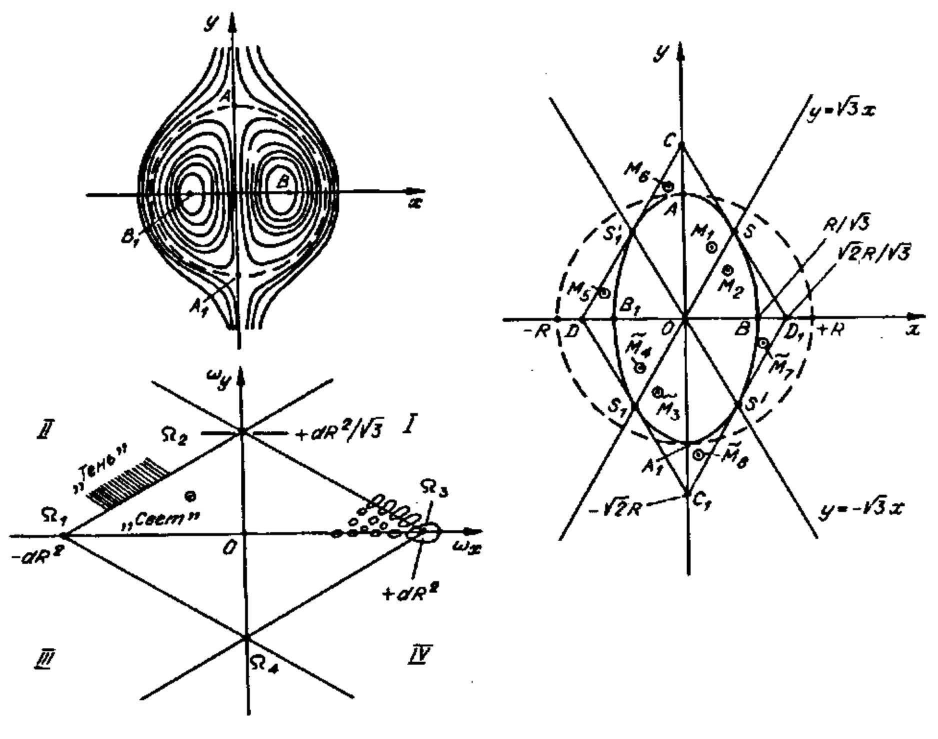

Рис. 5. Геометрооптическая интерпретация результатов дифракции

* Здесь имеются в виду две точки из квадранта $x > 0$, $y > 0$, лежащие внутри эллипса $3x^2 + y^2 = R^2$, и случай $R^2 > 0$.

$$x_{1,2} = \left[\frac{aR^2 + \omega_x \pm \sqrt{(aR^2 + \omega_x)^2 - 3\omega_y^2}}{6a}\right]^{1/2},$$

$$y_{1,2} = \frac{\omega_y}{2ax_{1,2}} \quad \text{при} \quad \begin{array}{l} \omega_x > -aR^2, \\ \omega_y > 0, \end{array} \tag{5}$$

т. е. это означает, что при нормальном падении парциальных лучей на точки M_1 и M_2 из одного квадранта на выходе (при учете только одного, например, +1-го порядка дифракции) будем иметь два параллельных интерферирующих в бесконечности луча с одинаковыми параметрами ν_x, ν_y (или же ω_x, ω_y). Для приходящих в тело псевдокаустики* двух любых парциальных лучей от одного из квадрантов транспаранта одна из таких точек M_1 лежит в верхнем сегменте эллипса $0AS$, а другая точка M_2 — в нижнем сегменте $0BS$. Сегменты данного эллипса ограничены прямой $y = \sqrt{3}x$, соответствующей в частотной плоскости огибающей псевдокаустики, дугами эллипса $3x^2 + y^2 = R^2$ — AS и SB, соответствующими одному отрезку $0 < \omega_y < aR^2/\sqrt{3}$, и отрезками $0 < x < R/\sqrt{3}$ и $0 < y < R$, переходящими в частотной плоскости в один отрезок — $aR^2 < \omega_x < 0$. При этом в геометрооптическом приближении точка пересечения S вышеуказанных прямой и эллипса соответствует точке $\omega_x = 0$, $\omega_y = aR^2/\sqrt{3}$ псевдокаустики, точки $x = R/\sqrt{3}$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = R$ — точке $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, а точка начала координат на транспаранте $x = 0$, $y = 0$ соответствует вершине псевдокаустики $\omega_x = -aR^2$, $\omega_y = 0$. Точки M_1 и M_2, лежащие по разные стороны от прямой $y = \sqrt{3}x$ на бесконечно малом удалении, соответствуют огибающей псевдокаустики (в этом случае дифракционные парциальные лучи, выходящие из этих точек, уже сливаются). Таким образом, в геометрооптическом приближении картины дифракции на сегментах $0AS$ и $0BS$ перекрываются. Поскольку площади областей $0AS$ и $0BS$ равны и составляют $\pi R^2/8\sqrt{3}$, то это означает, что формирование квадранта тела псевдокаустики происходит от перекрытия световых пучков с одинаковыми потоками интенсивности.

С учетом парциальных лучей, соответствующих −1-му порядку дифракции от центрально-симметричного квадранта, на выходе будем иметь четыре параллельных интерферирующих в бесконечности, т. е. в зоне дифракции Фраунгофера, луча. Анализ на ЭВМ 4-лучевой интерференции, соответствующей точкам входа на транспарант — M_1, M_2, $\tilde{M}_3$, $\tilde{M}_4$ (см. рис. 5), показал, что в соответствующей псевдокаустике классически разрешенной области, ограниченной в геометрооптическом приближении линиями «свет—тень», представление о формировании квадранта тела псевдокаустики в рамках 4-лучевой интерференции в бесконечности с учетом перекрытия в плоскости фурье-образа световых пучков от областей $A0S$, $B0S$ (парциальные лучи +1-го порядка) и областей A_10S_1, B_10S_1 (парциальные лучи −1-го порядка) полностью качественно описывает ячеистую структуру тела псевдокаустики и осцилляционный характер интенсивности поля вдоль огибающих и является достаточным. Здесь точки $\tilde{M}_4$, $\tilde{M}_3$ центрально-симметричны точкам M_1, M_2. Таким образом, сложное распределение интенсивности поля внутри 60°-ного сектора псевдокаустики однозначно задается исключительно фазовыми соотношениями между четырьмя рассмотренными интерферирующими лучами, т. е. всевозможный набор оптических разностей хода между этими лучами исчерпывающе определяет все основные особенности псевдокаустики, в том числе и на ее острие и огибающих. При этом формирование факельной структуры в окрестности вершины псевдокаустики соответствует в геометрооптиче-

---

* Подразумевается II квадрант в частотной плоскости при $\omega_x < 0$, $\omega_y > 0$, соответствующий дифракционным лучам +1-го порядка от точек M_1, M_2 (лучам −1-го порядка соответствует IV квадрант).

ском приближении интерференции четырех «неразличимых»* парциальных близки, а лучи, им соответствующие, «неразличимы», т. е. для четырех лучей. (точки $\widetilde{M}_3$ и $\widetilde{M}_4$ также практически тождественны, и лучи, им соответствующие, «неразличимы»). Здесь имеется в виду что для произвольной точки, лежащей на факельной ячейке огибающей, лишь разность хода между парой лучей, исходящих из точек M_1, M_2, и разность хода между парой лучей, исходящих из точек $\widetilde{M}_3$, $\widetilde{M}_4$, не превышает $\lambda/2$. Необходимо, однако, отметить, что, строго говоря, при $R^2 > 0$ в каждую точку квадранта тела псевдокаустики приходят еще парциальные лучи +1-го порядка от точек M_5, M_6 (см. рис. 5) и парциальные лучи −1-го порядка от точек $\widetilde{M}_7$, $\widetilde{M}_8$, что соответствует учету перекрытия псевдокаустик от +1-го и −1-го порядков дифракции. Координаты этих точек для $-aR^2 < \omega_x < aR^2$ (дающих такие же значения ω_x, ω_y, что и M_1, M_2) имеют вид

$$x_{5,6} = -\left[\frac{aR^2 - \omega_x \pm \sqrt{(aR^2 - \omega_x)^2 - 3\omega_y^2}}{6a}\right]^{1/2}; \tag{6}$$

$$y_{5,6} = -\frac{\omega_y}{2ax_{5,6}}; \quad x_{7,8} = -x_{5,6}; \quad y_{7,8} = -y_{5,6}. \tag{7}$$

Это соответствует в геометрооптическом рассмотрении 8-лучевой интерференции, но в случае больших параметров $R^2 > 0$, когда перекрытие псевдокаустик несущественно (см. рис. 1), этот эффект не является определяющим и им можно пренебречь. Для ω_x, ω_y, соответствующих факельной огибающей (при этом точки M_1 и M_2 совпадают и лежат на прямой $y = \sqrt{3}x$ в первом квадранте), точки M_5, M_6 из второго квадранта лежат на прямой $y = R\sqrt{2} + \sqrt{3}x$ (см. рис. 5), являющейся касательной к эллипсу в точке $S'_1(-R/\sqrt{6}, R/\sqrt{2})$ пересечения эллипса с прямой $y = -\sqrt{3}x$, и расположены по разные стороны от S'_1.

В итоге в квадранте тела псевдокаустики перекрываются также световые пучки от сегментов $DB_1S'_1$, S'_1AC с площадями, равными $\frac{R^2}{2\sqrt{3}}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. Аналогичное рассмотрение для точек $\widetilde{M}_7$, $\widetilde{M}_8$ позволяет сделать такие же выводы и для центрально-симметричных сегментов D_1BS', $S'A_1C_1$. Тогда вершине псевдокаустики $(-aR^2, 0)$ будут соответствовать, кроме точки начала координат, еще точки $(\pm R\sqrt{2/3}, 0)$ и $(0, \pm R\sqrt{2})$, являющиеся вершинами ромба.

Изложенные факты означают, что падающий на двумерную дифракционную структуру в область 60°-ного ромба DCD_1C_1 поток излучения после

---

* Хотя бесконечно узкий парциальный луч — идеализированное геометрооптическое понятие, в волновой теории ему соответствует лучевая трубка с объемом, ограниченным так называемым френелевским объемом луча [16]. Поэтому неразличимость лучей означает на самом деле сильное перекрытие (в направлении распространения) их френелевских объемов. В исследуемой ситуации плоскость экрана находится в области дифракции Фраунгофера и разность оптических путей между произвольно выбранной точкой экрана и двумя любыми точками транспаранта намного меньше $\lambda/2$ (λ — длина волны). Поэтому в данном случае при дифракции на микротранспаранте (без использования фурье-объектива) два произвольных параллельных луча условно считаются «неразличимыми», если разность хода между ними не превышает $\lambda/2$, и «различимыми» в противоположном случае. В случае наличия дополнительного фурье-объектива между экраном и транспарантом будет иметь место реальная (в соответствии с критерием [16]) неразличимость парциальных лучей, формирующих факельное острие и огибающие.

дифракции ограничивается в плоскости фурье-образа областью 60°-ного ромба $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$, ориентированного под углом 90° к ромбу на транспаранте, а каустические огибающие есть не что иное, как «складки» преобразования $(x, y) \Rightarrow (\omega_x, \omega_y)$, осуществляемого из координатной плоскости в частотную при дифракции света на исследуемом сложном транспаранте.

В заключение следует отметить, что если для одиночной псевдокаустики область «тени» вне угла ее раствора является в физически строгом смысле классически недоступной для формирующих тело данной псевдокаустики четырех дифракционных парциальных лучей, исходящих из точек M_1, M_2, $\tilde{M}_3$, $\tilde{M}_4$, то с учетом слабо проявляющегося эффекта перекрытия псевдокаустик от +1-го и −1-го порядков дифракции область вне угла раствора псевдокаустики будет уже условной зоной «тени», поскольку в нее будут приходить парциальные дифракционные лучи от точек M_5, M_6, $\tilde{M}_7$, $\tilde{M}_8$, имеющие, однако, очень слабую, пренебрежимо малую интенсивность.

3. Особенности дифракционного интеграла. Интегрирование по y в двумерном интеграле (3) можно осуществить и аналитически, если заменить интервал интегрирования $(-L_y, +L_y)$ на интервал от $-\infty$ до $+\infty$. При этом замена конечных пределов интегрирования на $-\infty$ и $+\infty$ слабо влияет на величину искомого интеграла, поскольку вклад от сильноосциллирующей при больших $+y$ и $-y$ подынтегральной функции мал. Производя ряд математических преобразований и сводя некоторые возникающие при этом выражения к известным табличным интегралам, можно представить анали-

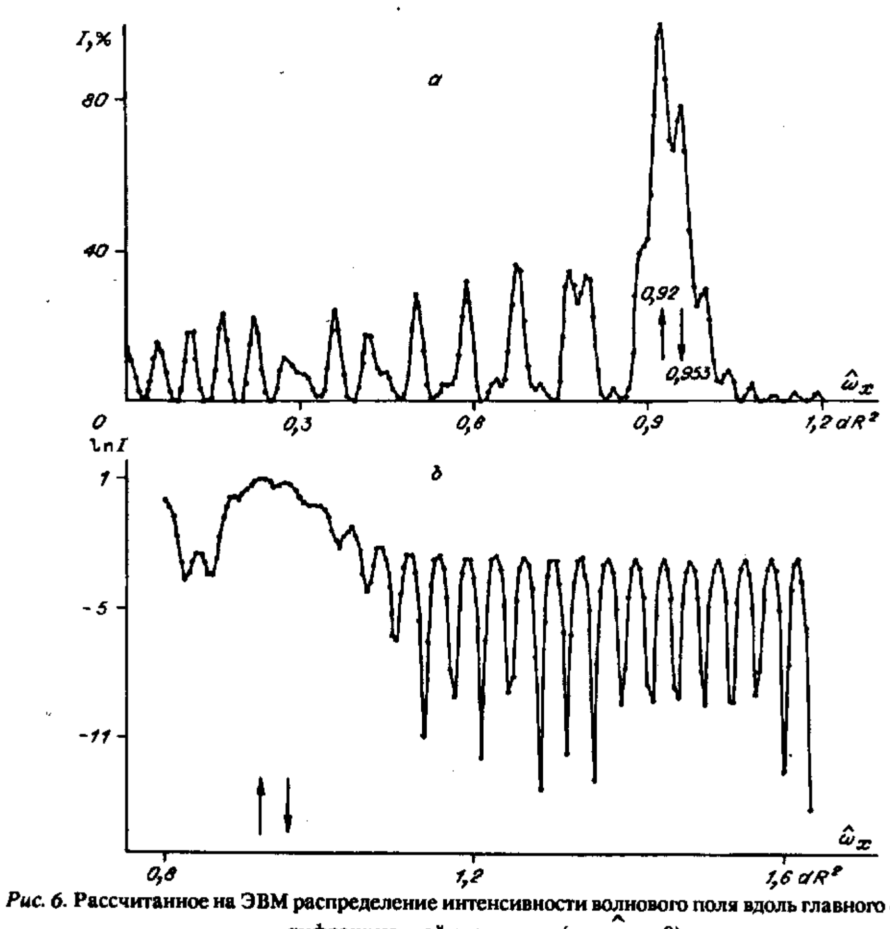

Рис. 6. Рассчитанное на ЭВМ распределение интенсивности волнового поля вдоль главного сечения дифракционной структуры (при $\hat{\omega}_y = 0$):

а — распределение интенсивности (I) вдоль $\hat{\omega}_x$ в нормальных координатах, *б* — в полулогарифмических координатах ($\ln I$ от $\hat{\omega}_x$)

зируемый двумерный интеграл (3) в виде параметрического по $\hat{\omega}_y$ одномерного интеграла:

$$J(\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y) = \frac{4\pi^{1/2}}{a^{1/2}} \int\limits_0^{+L_x} \frac{\cos\left[a(x^3 - xR^2) + \frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\omega}_y^2}{4xa}\right]}{x^{1/2}} \cos\hat{\omega}_x x dx. \qquad (8)$$

Подынтегральное выражение в (8) имеет особенность при $\hat{\omega}_y \neq 0$, заключающуюся в том, что при $x \Rightarrow 0$ амплитуда и частота осцилляций первого сомножителя бесконечно возрастают (при $\hat{\omega}_y = 0$ бесконечного роста частоты осцилляций при $x \Rightarrow 0$ не происходит). Для расчета $J(\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y)$ при $\hat{\omega}_y = 0$ рассчитывался интеграл, получаемый из (8) подстановкой $x = t^2$. Последний интеграл анализировался численно на 14 400 узлах в интервале от 0 до $L_x^{1/2} = \sqrt{13}$. График зависимости $|J(\hat{\omega}_x, 0)|^2$ показан на рис. 6, *a* и полностью соответствует распределению интенсивности $I(\hat{\omega}_x)$ волнового поля вдоль центрального сечения экспериментально синтезированной дифракционной структуры. На рис. 6, *b* рассчитанная зависимость представлена в полулогарифмических координатах $\ln I$ от $\hat{\omega}_x$. На рис. 6, *a* также отчетливо видна соответствующая двумерной картине рис. 3 «двугорбая» структура факельной ячейки острия, что подтверждает ранее полученный результат.

Параметрический интеграл (8) при $\hat{\omega}_y \neq 0$ (для большого числа срезов) анализировался методом одномерного БПФ. В этом случае исследовался фурье-образ заданной на интервале $-L_x$ — $+L_x$ четной функции:

$$\frac{\cos\left[a|x|(x^2 - R^2) + \frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\omega}_y^2}{4|x|a}\right]}{|x|^{1/2}}.$$

Расчеты, проведенные при $L_x = 12{,}8$ для большого набора значений $\hat{\omega}_y$, подтвердили, что максимальная интенсивность поля дифракции в среднем имеет место в точках ($\hat{\omega}_x = \pm 0{,}94aR^2$; $\hat{\omega}_y = 0$), а угол раствора псевдокаустики — 60°, т. е. это означает, что замена пределов интегрирования $\pm L_y$ на $\pm\infty$ в исходном двумерном интеграле правомерна и одномерный интеграл (8) удовлетворительно описывает структуру поля дифракции.

Геометрооптическую интерпретацию, приведенную в разд. 2, можно осуществить и математически строго, путем анализа дифракционного интеграла (3) в рамках метода стационарной фазы для двумерных интегралов [25], т. е. с помощью выделения для анализируемого интеграла соответствующих лучевых сумм, вычисляемых на соответствующих стационарных точках. При таком подходе критерий неразличимости парциальных дифракционных лучей означает на самом деле сильное перекрытие π-окрестностей стационарных точек дифракционного интеграла Гюйгенса — Кирхгофа [16], т. е. π-окрестностей точек M_1, M_2, $\tilde{M}_3$, $\tilde{M}_4$, являющихся центрами френелевских сечений соответствующих лучей (но при реализации режима дифракции Фраунгофера не на бесконечности, а лишь при геометрии эксперимента с фурье-объективом посередине между облучаемым транспарантом интерферограммы и плоскостью регистрации фурье-образа). Асимптотической оценки дифракционного интеграла методом стационарной фазы оказывается достаточно для корректного преодоления геометрооптических сингулярностей в амплитуде поля на острие и огибающих и осуществления классификации особенностей с четырехкратным (факельная вершина) и двухкратным (огибающие псевдокаустики) вырождением по числу парциальных лучей на базе критерия о перекрытии π-окрестностей соответствующих стационарных точек. Полное рассмотрение указанных вопросов нетрудно провести дополнительно.

Детальный теоретический анализ рассмотренных явлений, и в частности фурье-анализ сложных интерференционных полей, синтезированных с помощью бифокальной линзы (БЛ) из исландского шпата [2, 3], представляется актуальным в связи с тем обстоятельством, что согласно [2, 6] при использовании БЛ возможно формирование широкого набора интерференционных картин с плавно изменяющимися параметрами (см. рис. 1), что, в свою очередь, позволяет использовать БЛ в качестве элемента специализированных оптических вычислителей с записью интерференционных полей на голографических средах, а также при реализации фазовых элементов в адаптивных устройствах компенсации соответствующих аберраций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипов В. Ю. Дифракция на сложных синтезированных решетках-интерферограммах // Автометрия.—1993.—№ 4.
2. Осипов В. Ю., Осипов Ю. В. Оптический синтез и двумерный фурье-анализ сложных КЧМ-интерференционных полей // ЖТФ.—1992.—62, вып. 6.
3. Осипов Ю. В., Осипов В. Ю. Интерференционное поле бифокальной линзы из одноосных кристаллов // ОМП.—1991.—№ 1.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.—М.: Наука, 1970.
5. Encyclopedia of Physics /Ed. by S. Flügge. Vol. XXIV. Fundamentals of Optics.—Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1956.—P. 44.
6. Osipov Yu. V., Metlitsky E. A. // Pattern Recognition and Image Analysis.—1991.—1, N 2.—P. 247.
7. А. с. 1521048 СССР. /Ю. В. Осипов, В. С. Фирсов, В. Ю. Осипов, Е. Г. Шемшуренко.—Бюл. № 41.
8. А. с. 1494728 СССР. /Ю. В. Осипов, В. С. Фирсов, В. Ю. Осипов, Е. Г. Шемшуренко.—Бюл. № 26.
9. Kingslake R. // Proc. Phys. Soc. Lond.—1948.—61.—P. 147.
10. Nienhuis K. // Thesis.: University of Groningen, 1948.
11. Кравцов Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика.—1964.—VII, № 4.
12. Кравцов Ю. А. // Там же.—№ 6.
13. Кинбер Б. Е., Хестанов Р. Х. // Изв. вузов. Радиофизика.—1967.—X, № 2.
14. Cooley J. W., Tukey J. W. // Math. Comput.—1965.—19.—P. 297.
15. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции.—М.: Связь, 1978.
16. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. // УФН.—1980.—132, вып. 3.
17. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.—М.: Наука, 1980.
18. Осипов В. Ю., Осипов Ю. В. // Тез. докл. II Всесоюз. конф. «Оптическое изображение и регистрирующие среды».—Л., 1990.—Т. 2.
19. Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн.—Киев: Наук. думка, 1988.
20. Кинбер Б. Е., Кондратенко П. С. // Письма в ЖТФ.—1989.—15, вып. 5.
21. Зельдович Я. В., Мамаев А. В., Шиндарин С. Ф. // УФН.—1983.—139, вып. 1.
22. Осипов Ю. В., Осипов В. Ю. // ОМП.—1988.—№ 7.
23. Компьютеры в оптических исследованиях /Под ред. Б. Фридена. Сер. Проблемы прикладной физики.—М.: Мир, 1983.
24. Бахрах Л. Д., Курочкин А. П. Голография в микроволновой технике.—М.: Сов. радио, 1979.
25. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике: Пер. с англ.—М.: Мир, 1971.

Поступила в редакцию 19 января 1993 г.