РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1994

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.391 : 519.234.3

Г. И. Салов

(Новосибирск)

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ КОНТУРОВ, ЛИНИЙ, ПОЛОС И ХРЕБТОВ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ НА СЛУЧАЙНОМ ФОНЕ

Для обнаружения объекта заданной формы при отсутствии дополнительной априорной информации рекомендуется использовать непараметрические критерии. Наряду с известными (в теории проверки статистических гипотез), представлены также и новые критерии.

Введение. В технике, экспериментальной физике, космических и других исследованиях при анализе изображений (случайных полей) нередко требуется обнаружить контуры, прямые и кривые линии (траектории точки или частицы), полосы и хребты заданной формы. В известных простых подходах к решению этих задач, например, основанных на оценках производных сигнала или на применении так называемого преобразования Хока (и родственных ему), чтобы выбрать критическое значение (порог) для принятия решения, наблюдатель должен заранее знать распределения вероятностей интенсивности сигнала в точках объекта и в точках окружающего объект фона на изображении. Если же о распределениях неизвестно ничего, то упомянутые подходы требуют угадывания подходящего значения порога, что часто приводит к значительным (непредсказуемым) ошибкам, особенно когда изображение представляет собой неоднородное и (или) неизотропное поле. Поэтому эти подходы непригодны в тех приложениях, где опасно ошибочно принимать решение о наличии (отсутствии) объекта.

Другой метод обнаружения, безупречный с логической точки зрения, состоит в проверке соответствующей статистической гипотезы исходя из наблюдений. Ссылки на ранние статьи с таким подходом можно найти, например, в [1], в частности в предисловии к переводу, и в [2].

Общая схема обнаружения. Общую схему обнаружения можно представить следующим образом. С помощью одного перемещаемого окна наблюдения и одного процессора последовательно или с помощью набора окон наблюдения и множества процессоров параллельно (или параллельно-последовательно) исследуются возможные положения объекта на изображении путем проверки (в каждом положении) нулевой гипотезы H_0: в поле зрения объект отсутствует против альтернативной гипотезы H_1: объект есть. Решение отклонить или принять H_0 (критерий для H_0) основывается на значениях соответствующей статистики (или статистик), которая является функцией наблюдаемых случайных величин. Гипотезу H_0 следует отклонить (сделать вывод в пользу H_1) там, где значение статистики (статистик) достигает надлежащий критический уровень (порог). Пусть N — число исследуемых положений. Некоторые из всех N решений будут, вообще говоря, ложными. Если значение порога выбрано так, что вероятность отклонить гипотезу H_0, где на самом деле H_0 верна, равна β_1, то при большом числе таких положений наблюдатель будет ошибаться в доле случаев, примерно равной β_1.

Рассмотрим исключительно важную (типичную) для практики ситуацию, когда нет никакой априорной информации о статистических характеристиках интенсивности сигнала в точках объекта и фона. Более того, эти характеристики могут меняться по пространству, т. е. изображение может быть неоднородным и (или) неизотропным полем. В этой ситуации для проверки гипотезы H_0 необходим такой критерий, который не требует предположений о виде распределения вероятностей сигнала, оставляющих неизвестными лишь некоторые параметры. Поэтому такие критерии называют непараметрическими. Они основаны на статистиках, распределения которых при отсутствии объекта (при H_0) не зависят от неизвестных распределений наблюдаемых величин, отсюда требуемые пороги могут быть вычислены заранее.

На протяжении всей работы будем считать, что при исследовании каждого возможного положения объекта все наблюдаемые величины берутся в достаточно отдаленных друг от друга точках на изображении так, чтобы они могли рассматриваться как статистически независимые в совокупности, когда в поле зрения объект отсутствует (при H_0).

Критерии для обнаружения контуров. Наипростейший критерий, пригодный для обнаружения контура (или границы области) объекта заданной формы, а значит и для обнаружения самого объекта, — это широко применимый классический критерий знаков [3—8]. Для определенности будем рассматривать случай, где интенсивность сигнала в точках области объекта имеет тенденцию быть стохастически (в среднем) больше, чем в точках окружающего объект фона.

Пусть для $i = 1, ..., k$ ζ_i и ξ_i — величины интенсивности сигнала, наблюдаемые вблизи проверяемого положения контура по разные стороны от последнего. Если объект отсутствует, то величины ζ_i и ξ_i, принадлежащие относительно близким точкам, могут отличаться только лишь обычными случайными флуктуациями и, следовательно, имеют практически одну и ту же непрерывную функцию распределения вероятностей F_i, одинаковую для всех значений i, или же нет, когда фон неоднородный и (или) неизотропный. Если на проверяемом положении контур присутствует и величины $\zeta_1, ..., \zeta_k$ принадлежат точкам объекта, то ζ_i стохастически больше, чем ξ_i. Таким образом, для обнаружения контура представляется естественным проверить гипотезу H_0: для каждого i величины ζ_i и ξ_i стохастически равны (контур отсутствует) против альтернативной гипотезы H_1: ζ_i стохастически больше, чем ξ_i (контур есть). Критерий знаков для проверки гипотезы H_0 основан на статистике

$$\nu = \sum_{i=1}^{k} I\{\zeta_i - \xi_i > 0\},$$

равной количеству положительных разностей. Здесь и ниже $I\{A\}$ — индикатор события A, равный 1 или 0 в зависимости от того, произошло или не произошло событие A. Критерий знаков отклоняет гипотезу H_0 в пользу гипотезы H_1, когда $\nu \geq \lambda$, где порог $\lambda = \lambda(\beta_1)$ определяется по заданному допустимому уровню β_1 и равен наименьшему целому числу, такому что

$$\sum_{i=\lambda}^{k} C_k^i \, 2^{-k} \leq \beta_1,$$

где C_k^i — как обычно, число сочетаний из k элементов по i.

Фактически это проверка гипотезы о том, что вероятность успеха (или значение параметра) в биномиальном распределении с k испытаниями не превышает 1/2.

На протяжении всей работы предполагается, что наблюдаемые случайные величины интенсивности сигнала имеют непрерывные распределения, а значит, различны с вероятностью единица. Однако на практике вследствие округления возможны совпадения. Возникает вопрос, как поступать с разностями, обращающимися в нуль. (Известные рекомендации см., например, в [5, с. 160].)

Результаты обнаружения с помощью критерия знаков для реальных изображений поверхности Земли приведены в [9, 10].

Для увеличения вероятности обнаружения следует увеличить число наблюдений в окрестности контура. Пусть для каждого $i = 1, ..., k$ $\zeta_{i1}, ..., \zeta_{im}$ и $\xi_{i1}, ..., \xi_{in}$ — величины, наблюдаемые вдоль i-й нормали к проверяемому положению контура объекта по разные стороны от этого положения. Заметим, что m и n могут зависеть от i.

Будем считать, что при гипотезе H_0 (в поле зрения нет объекта) для $i = 1, ..., k$ величины $(\zeta_{i1}, ..., \zeta_{im}, \xi_{i1}, ..., \xi_{in})$, составляющие отдельный блок, имеют практически одну и ту же функцию распределения F_i.

Простейшим критерием для проверки H_0 в этой ситуации будет критерий, основанный на количестве μ блоков с превышающими наблюдениями. Элементы обеих групп $(\xi_{i1}, ..., \xi_{in})$ и $(\zeta_{i1}, ..., \zeta_{im})$ совместно упорядочим по возрастанию. Поскольку порядок следования элементов одной группы не имеет значения, т. е. они неразличимы между собой, то каждый элемент первой группы заменим на 0, а второй группы — на 1. При H_0 все $(n + m)!/(n!m!)$ мыслимых последовательностей из n нулей и m единиц равновероятны.

Обозначим через μ_i количество величин среди $\zeta_{i1}, ..., \zeta_{im}$, больших, чем $\max\limits_{1 \le j \le n} \xi_{ij}$. Эту статистику ввел Розенбаум для задачи с одним блоком (см., например, [5, с. 110]). Так как событие $\{\mu_i \ge r\}$, где r — положительное целое число, происходит тогда, когда, по меньшей мере, r последних мест в упорядоченной последовательности заняты единицами, а из $(m - r)$ единиц и n нулей можно составить $(n + m - r)!/(n!(m - r)!)$ различных последовательностей, то

$$P(\mu_i \ge r \mid H_0) = \frac{(n + m - r)!}{n!(m - r)!} : \frac{(n + m)!}{n!m!} = \frac{(n + m - r)!m!}{(n + m)!(m - r)!}. \tag{1}$$

Для каждого блока выберем $r_i = r(k, m(i), n(i))$ так, чтобы все события $\{\mu_i \ge r_i\}$ имели при H_0 одну и ту же вероятность, разумно малую и равную, скажем, p, и введем статистику

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} I\{\mu_i \ge r_i\}. \tag{2}$$

Критерий, основанный на статистике (2), отклоняет гипотезу H_0, когда $\mu \ge \lambda$, где порог λ — наименьшее число, такое что

$$\sum_{i=\lambda}^{k} C_k^i p^i (1 - p)^{(k - i)} \le \beta_1. \tag{3}$$

Этот критерий является относительно грубым.

Лучше подытоживает информацию в блоке статистика Манна — Уитни, равная количеству η_i пар ζ_{is}, ξ_{it} $(s = 1, ..., m;\ t = 1, ..., n)$, таких что $\zeta_{is} > \xi_{it}$ (см., например, [5—7, 11]). Отсюда более эффективный, чем предыдущий, критерий может быть основан на статистике

$$\eta = \sum_{i=1}^{k} \eta_i, \tag{4}$$

отклоняющей гипотезу H_0 в пользу H_1, когда $\eta \geq \lambda$. Порог λ — наименьшее число, такое что

$$\sum_{u \geq \lambda} P(\eta = u \mid H_0) \leq \beta_1.$$

В силу предположения независимости наблюдаемых величин

$$P(\eta = u \mid H_0) = \sum_{u_1 + \ldots + u_k = u} \prod_{i=1}^{k} P(\eta_i = u_i \mid H_0).$$

В [11] замечено, что

$$P(\eta_i = a \mid H_0) = p_{mn}(a) = \frac{m}{m+n} p_{m-1,n}(a-n) + \frac{n}{m+n} p_{m,n-1}(a), \tag{5}$$

где формально $p_{0j}(a) = p_{j0}(a) = 1$ при $a = 0$ и $p_{0j}(a) = p_{j0}(a) = 0$ при $a \neq 0$.

Критерии для обнаружения линий. Рассмотрим задачу обнаружения линии, интенсивность сигнала в точках которой стохастически (в среднем) больше интенсивности сигнала в точках окружающего ее фона. Изменения, необходимые для обнаружения и (или) темных линий на более светлом фоне, будут очевидны. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ — величины, наблюдаемые в точках на проверяемом положении линии, а $\xi_1, \ldots, \xi_k$ и $\psi_1, \ldots, \psi_k$ — параллельно по разные стороны от последнего. Как и выше, будем считать, что если в поле зрения объект отсутствует, то для каждого $i = 1, \ldots, k$ величины ζ_i, ξ_i и ψ_i, принадлежащие сравнительно близким точкам на i-й нормали к проверяемому положению и образующие i-й блок, имеют практически одну и ту же функцию распределения вероятностей F_i (гипотеза H_0). В этом случае вероятность события $A_i = \{\zeta_i > \xi_i \text{ и } \zeta_i > \psi_i\}$ равна 1/3. Если на проверяемом положении линия имеется, то вероятность события A_i больше, чем 1/3. Отсюда вытекает, что едва ли не самым простым в реализации и в этом отношении наиболее важным критерием для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1: $P(A_i) > 1/3$ (линия присутствует) будет критерий, основанный на статистике

$$\nu = \sum_{i=1}^{k} I\{A_i\}, \tag{6}$$

имеющей при H_0 биномиальное распределение с параметром $p = 1/3$. Гипотезу H_0 следует отклонить и принять решение, что на проверяемом положении присутствует линия, когда $\nu \geq \lambda$, где порог λ находится с помощью (3) при $p = 1/3$. Этот критерий является относительно грубым.

Более точным будет обнаружение на основе двух следующих статистик. Пусть для $i = 1, \ldots, k$ $\eta_{i1} = I\{\zeta_i > \xi_i\}$, $\eta_{i2} = I\{\zeta_i > \psi_i\}$ и

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{k} \eta_{ij} \quad (j = 1, 2). \tag{7}$$

Гипотезу H_0 следует отклонить и принять решение, что на проверяемом положении присутствует линия, если одновременно $\eta_1 \geq \lambda$ и $\eta_2 \geq \lambda$ при соответствующем значении λ. В отличие от суммарной статистики $\eta = \eta_1 + \eta_2$ использование η_1 и η_2 по отдельности лучше отвечает существу задачи и обеспечивает меньшую вероятность ложного обнаружения линии, когда вдоль проверяемого положения проходит, например, контур. Порог λ — наименьшее число, такое что

$$\sum_{u \geq \lambda} \sum_{v \geq \lambda} P(\eta_1 = u,\ \eta_2 = v \mid H_0) \leq \beta_1. \tag{8}$$

Согласно предположению независимости наблюдаемых величин,

$$P(\eta_1 = u,\ \eta_2 = \mathrm{v} \mid H_0) = \sum_{u_1+\ldots+u_k=u}\ \sum_{\mathrm{v}_1+\ldots+\mathrm{v}_k=\mathrm{v}}\ \prod_{i=1}^{k} P(\eta_{i1} = u_i,\ \eta_{i2} = \mathrm{v}_i \mid H_0). \tag{9}$$

В свою очередь,

$$P(\eta_{i1} = u_i,\ \eta_{i2} = \mathrm{v}_i \mid H_0) = \frac{1}{3C_2^{(u_i+\mathrm{v}_i)}}. \tag{10}$$

Последняя формула является следствием полученного ниже более общего результата.

Для дальнейшего повышения точности обнаружения линии необходимо увеличивать число наблюдаемых величин по каждую сторону от проверяемого положения. Пусть для $i = 1, \ldots, k$ $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}$ и $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{in}$ — величины, наблюдаемые в точках, лежащих по разные стороны от проверяемого положения линии вдоль i-й нормали.

В этой ситуации простой (но грубый) критерий, родственный (6), основан на числе ν событий $A_i = \{\zeta_i > \max(\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in},\ \psi_{i1}, \ldots, \psi_{in})\}$, при этом $p = 1/(2n + 1)$.

Эффективный критерий можно построить из статистик Манна — Уитни. Обозначим через η_{i1} (соответственно η_{i2}) количество величин среди $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}$ (соответственно $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{in}$), меньших, чем ζ_i. Используя эти статистики, определим η_1 и η_2, как в (7).

Гипотезу H_0, состоящую в том, что для каждого i все наблюдаемые величины $(\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}, \zeta_i, \psi_{i1}, \ldots, \psi_{in})$ подчиняются практически одной и той же функции распределения F_i (линия или какой-либо другой объект отсутствует), следует отклонить и принять решение, что на проверяемом положении присутствует линия, если одновременно $\eta_1 \geq \lambda$ и $\eta_2 \geq \lambda$ при соответствующем значении λ. Формулы (8) и (9) для определения подходящего значения порога λ применимы и здесь. Рассмотрим вероятность под знаком произведения в (9). Целесообразно охватить и случай с неравными числами n и m наблюдений по разные стороны от проверяемого положения (в блоке). Исходя из этого,

$$p_{nm}(u_i, \mathrm{v}_i) = P(\eta_{i1} = u_i, \eta_{i2} = \mathrm{v}_i \mid H_0) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\eta_{i1} = u_i, \eta_{i2} = \mathrm{v}_i \mid \zeta_i = s, H_0)\, dF_i(s) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} C_n^{u_i} [F_i(s)]^{u_i} [1 - F_i(s)]^{n-u_i} C_m^{\mathrm{v}_i} [F_i(s)]^{\mathrm{v}_i} [1 - F_i(s)]^{m-\mathrm{v}_i} dF_i(s).$$

Замена переменных $F_i(s) = t$ в интеграле Стилтьеса приводит к интегралу известного вида (см., например, [12, с. 756]), откуда

$$p_{nm}(u_i, \mathrm{v}_i) = C_n^{u_i} C_m^{\mathrm{v}_i} \frac{1}{(n + m + 1) C_{(n+m)}^{(u_i+\mathrm{v}_i)}}, \tag{11}$$

что при $n = m = 1$ дает формулу (10). Полученные соотношения (8)—(11) позволяют определить надлежащее значение порога λ.

Критерии для обнаружения полос. Предположим, что ширина полосы задана числом w наблюдений поперек полосы, которые можно считать статистически независимыми. Пусть для каждого $i = 1, \ldots, k$ $\zeta_{i1}, \ldots, \zeta_{iw}$ — наблюдаемые величины интенсивности сигнала в точках, расположенных поперек проверяемого положения полосы, а $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}$ и $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{in}$ — в точках, расположенных по разные стороны от проверяемого положения вдоль i-й нормали к его средней линии. Гипотеза H_0 (в поле зрения объект отсутствует) состоит в том, что величины $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}, \zeta_{i1}, \ldots, \zeta_{iw}, \psi_{i1}, \ldots, \psi_{in}$ имеют практически одну и ту же функцию распределения вероятностей F_i. При слишком большом значении n или w это не совсем реалистично.

Простым критерием для обнаружения полосы, интенсивность сигнала в точках которой стохастически (в среднем) больше, чем в точках фона, будет обобщение критерия (2). Обозначим через μ_{i1} (соответственно μ_{i2}) количество величин среди $\zeta_{i1}, \ldots, \zeta_{iw}$, больших, чем $\max\limits_{1 \le j \le n} \xi_{ij}$ (соответственно $\max\limits_{1 \le j \le n} \psi_{ij}$). Согласно (1)

$$p = P\{\mu_{i1} > r,\ \mu_{i2} > r \mid H_0\} = \frac{(2n + w - r)!w!}{(2n + w)!(w - r)!}, \tag{12}$$

и в качестве простой статистики для проверки H_0 можно взять

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} I\{\mu_{i1} > r,\ \mu_{i2} > r\}$$

при надлежащем значении r. Гипотезу H_0 следует отклонить, когда $\mu \ge \lambda$, где порог λ определяется с помощью (12) и (3).

Более эффективный критерий является аналогом критерия, рассмотренного в предыдущем разделе. Пусть η_{i1} (соответственно η_{i2}) обозначает количество пар ζ_{is}, ξ_{it} (соответственно ζ_{is}, ψ_{it}) ($s = 1, \ldots, w$; $t = 1, \ldots, n$), таких что $\zeta_{is} > \xi_{it}$ (соответственно $\zeta_{is} > \psi_{it}$), и пусть η_j ($j = 1, 2$) определяются формулой (7). Как и в случае обнаружения линий, гипотезу H_0 следует отклонить, когда $\eta_1 \ge \lambda$ и $\eta_2 \ge \lambda$. Формулы (8) и (9) для определения порога λ применимы и здесь. Что касается вероятностей $P(\eta_{i1} = u_i,\ \eta_{i2} = v_i \mid H_0)$, то разностное уравнение (5) заменяется уравнением [13]

$$p_{wnm}(a, b) = P(\eta_{i1} = a,\ \eta_{i2} = b \mid H_0) = \frac{w}{w + n + m} p_{w-1, nm}(a - n,\ b - m) +$$
$$+ \frac{n}{w + n + m} p_{w, n-1, m}(a, b) + \frac{m}{w + n + m} p_{wn, m-1}(a, b), \tag{13}$$

где n и m — числа элементов в блоке по разные стороны от проверяемого положения полосы.

Критерии для обнаружения хребтов. Рассмотрим случай с минимальным числом наблюдений на проверяемой области хребта. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ — величины в точках на гребне исследуемого положения хребта, и для каждого $i = 1, \ldots, k$ пусть ξ_{i1}, ξ_{i2} и ψ_{i1}, ψ_{i2} — величины, наблюдаемые по разные стороны от гребня вдоль i-й нормали к гребню. Здесь снова будем проверять гипотезу H_0: при любом i величины $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \zeta_i, \psi_{i1}, \psi_{i2}$ имеют практически одну и ту же функцию распределения F_i (в поле зрения объект отсутствует). Однако теперь альтернативная гипотеза H_1 состоит в утверждении, что при любом $i = 1, \ldots, k$ ζ_i стохастически (в среднем) больше, чем ξ_{i1} и ψ_{i1}, в свою очередь, ξ_{i1} больше, чем ξ_{i2}, а ψ_{i1} больше, чем ψ_{i2}. Простейший критерий для проверки гипотезы H_0 основан только на числе ν блоков, таких что $\zeta_i > \xi_{i1} > \xi_{i2}$ и $\zeta_i > \psi_{i1} > \psi_{i2}$. В силу предположения независимости наблюдаемых величин

$$P(\xi_{i2} < \xi_{i1} < \zeta_i,\ \psi_{i2} < \psi_{i1} < \zeta_i \mid H_0) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi_{i2} < \xi_{i1} < \zeta_i,\ \psi_{i2} < \psi_{i1} < \zeta_i \mid \zeta_i = s, H_0) dF_i(s) =$$
$$= \int_{-\infty}^{s} [P(\xi_{i2} < \xi_{i1} < s) \mid H_0]^2 dF_i(s). \tag{14}$$

В свою очередь,

$$P(\xi_{i2} < \xi_{i1} < s \mid H_0) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(\xi_{i2} < \xi_{i1} < s \mid \xi_{i1} = t, H_0) dF_i(t) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{s} P(\xi_{i2} < t \mid H_0) dF_i(t) = \frac{1}{2}\,[F_i(s)]^2. \tag{15}$$

Подстановка (15) в (14) дает

$$P(\xi_{i2} < \xi_{i1} < \zeta_i, \psi_{i2} < \psi_{i1} < \zeta_i \mid H_0) = \frac{1}{20}. \tag{16}$$

Отсюда порог λ для простейшего критерия ($\nu \geq \lambda$) определяется соотношением (3) при $p = 1/20$.

Более эффективным будет критерий, основанный на статистиках $\eta_{i1} = I\{\zeta_i > \xi_{i1} > \xi_{i2}\}$ и $\eta_{i2} = I\{\zeta_i > \psi_{i1} > \psi_{i2}\}$ и определении суммарных статистик η_1 и η_2 с помощью (7). Гипотезу H_0 следует отклонить, если одновременно $\eta_1 \geq \lambda$ и $\eta_2 \geq \lambda$. Соотношения (8) и (9) для выбора λ остаются в силе и здесь. Теперь нужно только найти вероятности, родственные (10). Схема (14)—(16) дает:

$$P(\eta_{i1} = 0,\ \eta_{i2} = 1 \mid H_0) = P(\eta_{i1} = 1,\ \eta_{i2} = 0 \mid H_0) = 7/60,$$

$$P(\eta_{i1} = 0,\ \eta_{i2} = 0 \mid H_0) = 43/60, \qquad P(\eta_{i1} = 1,\ \eta_{i2} = 1 \mid H_0) = 1/20.$$

Еще более эффективным представляется следующий критерий. Пусть $\eta_{i1} = I\{\zeta_i > \xi_{i1}\}$, $\eta_{i2} = I\{\zeta_i > \psi_{i1}\}$, $\eta_{i3} = I\{\xi_{i1} > \xi_{i2}\}$, $\eta_{i4} = I\{\psi_{i1} > \psi_{i2}\}$, и пусть

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{k} \eta_{ij} \qquad (j = 1, \ldots, 4).$$

Гипотезу H_0 следует отклонить и принять решение, что на проверяемом положении присутствует хребет, когда $\eta_1^* = \min(\eta_1, \eta_2) \geq \lambda_1$, а $\eta_2^* = \min(\eta_3, \eta_4) \geq \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 следует выбрать так, чтобы

$$\sum_{u \geq \lambda_1} \sum_{v \geq \lambda_1} \sum_{s \geq \lambda_2} \sum_{t \geq \lambda_2} \sum_{u_1+\ldots+u_k=u} \sum_{v_1+\ldots+v_k=v} \sum_{s_1+\ldots+s_k=s} \sum_{t_1+\ldots+t_k=t} \prod_{i=1}^{k} p(u_i, v_i, s_i, t_i) \leq \beta_1 \tag{17}$$

и

$$P(\eta_1^* \geq \lambda_1 \mid H_0) \cong P(\eta_2^* \geq \lambda_2 \mid H_0). \tag{18}$$

Используя схему (14)—(16), получим значения вероятностей

$$p(u_i, v_i, s_i, t_i) = P(\eta_{i1} = u_i,$$

$$\eta_{i2} = v_i,\ \eta_{i3} = s_i,\ \eta_{i4} = t_i \mid H_0),$$

которые приведены в таблице. Знак равенства в соотношениях (17) и (18) из-за дискретности входящих в них величин может не достигаться.

u_i	s_i \ t_i / v_i	$s_i=0$, $t_i=0$	$s_i=0$, $t_i=1$	$s_i=1$, $t_i=0$	$s_i=1$, $t_i=1$
0	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{2}{15}$
0	1	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{11}{120}$	$\frac{1}{30}$
1	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{11}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{30}$
1	1	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{20}$

Заключение. Приведенные в предыдущих разделах непараметрические критерии являются простыми с вычислительной точки зрения и не требуют арифметических действий над числами с «плавающей запятой».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Теория** обнаружения сигналов и ее применения // ТИИЭР.—1970.—58, № 5.
2. **Томас Дж. Б.** Непараметрические методы обнаружения сигналов // Там же.
3. **Ван дер Варден Б. Л.** Математическая статистика.—М.: ИЛ, 1960.
4. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез.—М.: Наука, 1964.
5. **Гаек Я., Шидак З.** Теория ранговых критериев.—М.: Наука, 1971.
6. **Кендалл М. Дж., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи.—М.: Наука, 1973.
7. **Холлендер М., Вулф Д.** Непараметрические методы статистики.—М.: Финансы и статистика, 1983.
8. **Боровков А. А.** Математическая статистика. Дополнительные главы.—М.: Наука, 1984.
9. **Аргунов Л. П., Дементьев В. Н., Игуменова И. А. и др.** Об одном статистическом подходе к задаче автоматизированного выделения линейных элементов на аэрокосмических снимках // ДАН.—1988.—299, № 1.
10. **Алексеев А. С., Пяткин В. П., Салов Г. И.** Простые непараметрические критерии обнаружения кратеров на аэрокосмических изображениях // Исследования Земли из космоса.—1993.—№ 1.
11. **Mann H. B., Whitney D. R.** On a test of whether one of two random variables is stohastically larger than the other // An. Math. Stat.—1947.—18.—P. 50.
12. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления.—М.: Физматгиз, 1962.—Т. 2.
13. **Whitney D. R.** A bivariate extension of the U statistic // An. Math. Stat.—1951.—22.—P. 274.

Поступила в редакцию 29 марта 1993 г.