

УДК 771.64

Л. Н. Знаменская

(Красноярск)

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЕКТРОВ ФУРЬЕ ФИНИТНЫХ СИГНАЛОВ.  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Классическая теорема Котельникова [1] позволяет восстанавливать спектр Фурье  $f$  финитного сигнала  $y$ , сосредоточенного на отрезке  $[-\alpha, \alpha]$ , по множеству равномерных отсчетов спектра  $f(k\Delta)$  с шагом  $\Delta = 1/(2\alpha)$ :

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(k\Delta) \frac{\sin 2\pi\alpha(x - k\Delta)}{2\pi\alpha(x - k\Delta)}.$$

В практике нередко ситуации, когда исследуемый финитный сигнал может рассматриваться как кусочно-гладкая функция с компактным носителем, но для измерения доступен с достаточной точностью только участок спектра этого сигнала, т. е. некоторые значения преобразования Фурье этой функции. Айзенбергом [2, с. 207] была предложена интерполяционная формула

$$f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{f(x_k) \exp[2\pi i \alpha (z - x_k)] (-2i\sigma)}{(z - x_k - 2i\sigma)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{(z - x_j)(x_k - x_j - 2i\sigma)}{(z - x_j - 2i\sigma)(x_k - x_j)}, \quad (1)$$

позволяющая восстанавливать спектры Фурье  $f(z)$  финитных сигналов, сосредоточенных на отрезке  $[-\alpha, \alpha]$ , по известным значениям спектров  $f(x_k)$ , где  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  — набор частот, для которых известен спектр. Эта формула была теоретически обоснована Айзенбергом для финитных сигналов, при этом приводились близкие, необходимые и достаточные условия на набор  $x_k$  [2, § 30].

Для сигналов, сосредоточенных на отрезке  $[0, \alpha]$ , Айзенберг привел и теоретически обосновал аналог формулы (1):

$$f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{f(x_k) (-2i\sigma)}{(z - x_k - 2i\sigma)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{(z - x_j)(x_k - x_j - 2i\sigma)}{(z - x_j - 2i\sigma)(x_k - x_j)}, \quad (1')$$

ускоряющий вычисление за счет отсутствия трансцендентных функций.

Эксперимент, описанный в [3], показал, что формула (1') эффективно восстанавливает спектры Фурье двух сигналов: отрезок синусоиды от 0 до  $2\pi$ ; прямоугольник с носителем на отрезке [3, 5].

Область практической применимости этой формулы при неполной информации о носителе сигнала и роль параметра  $\sigma$  оставались фактически невыясненными. Выяснению этих факторов посвящена настоящая работа.

Автором проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого спектры 89 финитных сигналов восстанавливались по своим значениям на различных отрезках с помощью формул (1), (1') и формулы

$$f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{f(x_k)(-1)^k 2i\sigma}{(z - x_k + (-1)^k 2i\sigma)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{(z - x_j)(x_k - x_j + (-1)^k 2i\sigma)}{(z - x_j + (-1)^k 2i\sigma)(x_k - x_j)}, \quad (2)$$

предложенной автором. В каждой ситуации подбирались оптимальные значения параметра  $\sigma$ .

Следующая процедура позволила получить ту же точность вычисления непрерывного спектра Фурье сигнала  $y(t)$

$$F(y(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \exp(-2\pi i t x) dt, \quad (3)$$

как если бы мы считали этот интеграл по формуле трапеций, но со скоростью, присущей алгоритму БПФ.

Положим

$$\hat{y}(t) = \sum_{j=1}^m y(t_j) \delta(t - t_j),$$

где  $\delta(t - t_j)$  —  $\delta$ -функция Дирака. Тогда

$$F(\hat{y}(t)) = \langle \hat{y}(t), \exp(-2\pi i t x) \rangle = \sum_{j=1}^m y(t_j) \exp(-2\pi i t_j x)$$

— дискретный спектр Фурье сигнала  $y(t)$ . Пусть  $h(t)$  — треугольный сигнал:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right), & \text{если } 0 \leq x \leq \Delta; \\ \frac{1}{\Delta} \left(1 + \frac{x}{\Delta}\right), & \text{если } -\Delta \leq x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$H(t) = \hat{y}(t) * h(t) = \sum_{j=1}^m \hat{y}(t_j) h(t + t_j)$$

и

$$F(H(t)) = F(\hat{y}(t)) F(h(t)).$$

Рассмотрим финитный сигнал  $y(t)$ , сосредоточенный на отрезке  $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{C} [-8, 8] = [-\beta, \beta]$ . После вычисления с помощью алгоритма БПФ дискретного спектра Фурье сигнала в точках  $t_j = -8,0 + (j-1)\Delta$ , где  $\Delta = 1/(2\beta)$ , этот спектр будем умножать на спектр Фурье треугольного сигнала  $h(t)$  в точках  $t_j$ , который легко вычисляется непосредственно по формуле

$$F(h(t_j)) = \left( \frac{\sin \pi \Delta t_j}{\pi \Delta t_j} \right)^2.$$

Эксперимент проводился следующим образом: вычислялись преобразования Фурье перечисленных ниже сигналов. На отрезках  $[0, 1]$  и  $[2, 3]$  фиксировалось по 16 равноотстоящих точек, и восстанавливался спектр в 16 точках на отрезке  $[1, 2]$ . Все вычисления проводились с двойной точностью. В ходе эксперимента в указанных условиях (т. е. при фиксированном  $m = 32$  и  $\Delta = 1/(2\beta)$ ) результаты восстановления спектров зависели от выбора параметра  $\sigma$ .

Сначала была проведена серия экспериментов (22) с прямоугольным сигналом малой длительности, по сравнению с отрезком  $[-\beta, \beta]$  (длительность сигнала 0,5, величина сигнала 1,0) носитель сигнала сосредоточен на отрезках  $[7,0, 7,5]$ ,  $[6,5, 7,0]$  и т. д. Постепенно носитель сигнала сдвигался к нулю и далее в отрицательную область. Для восстановления спектров Фурье сигналов, сосредоточенных на положительной части отрезка, использовалась формула (1'). Формула (1') начинала восстановление спектров Фурье при  $\alpha$ , удовлетворяющих условию  $2\alpha < \beta$ ; для  $\alpha = 3,5$  ошибка  $\epsilon$  равнялась  $2 \cdot 10^{-3}$  при  $\sigma = 0,4$ , а для  $\alpha = 2,0$  ошибка  $\epsilon$ , начиная с  $\sigma = 0,55$  и больше, равнялась  $1 \cdot 10^{-6}$ . Формула (2) начинала восстанавливать спектры Фурье для сигналов указанной серии с  $\alpha = 2,5$ , ошибка  $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$  — при  $\sigma = 1,71$ , а для  $\alpha = 2,0$  ошибка  $\epsilon$  равнялась  $1 \cdot 10^{-6}$  для  $\sigma = 1,05$  и больше (т. е. формула (2) восстанавливает спектры Фурье финитных сигналов указанной серии для  $\alpha$ , удовлетворяющих условию  $3\alpha < \beta$ ).

Если описывать частотные характеристики спектров Фурье указанных сигналов, то амплитуды спектров — монотонные функции на отрезках  $[0, 1]$  и  $[2, 3]$  и одинаковы для всех сигналов, а фазы имеют несколько локальных максимумов. Таким образом, формула (1) восстанавливает спектры Фурье тех из рассматриваемых сигналов, у которых фаза на отрезке  $[0, 1]$  имеет не более четырех локальных максимумов, а для формулы (2) — не более трех локальных максимумов.

Продолжим список исследованных сигналов. Обозначим:  $\chi(t, M) = \begin{cases} 1, & t \in M, \\ 0, & t \notin M \end{cases}$  — характеристическая функция множества  $M$ ;  $\varphi_k(t; x_1, y_1; \dots; x_k, y_k)$  — полунепрерывная снизу функция, график которой состоит из промежутков ломаной с вершинами  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$  и двух лучей оси абсцисс;  $g(t) = \varphi_2(t; 0, 0; 0,5; 1)$ ;  $s(t) = \sin(2t)$  на  $[0, \pi/4]$ .

Прямоугольные сигналы:

$$\chi(t, [a, a + 0,5]) - \chi(t, [-a - 0,5, -a]) \quad (4)$$

для  $a = 0,0; 0,5; \dots; 3,0; 3,5$ ;

$$\chi(t, [a, a + 0,5] \cup [-a - 0,5, -a]) \quad (5)$$

для  $a = 0,0; 0,5; \dots; 3,0; 3,5$ ;

$$\begin{aligned} & \chi(t, [-2,5; -1,0] \cup [1,0; 1,5]); \quad \chi(t, [-2,5; -1,0] \cup [0,5; 1,0]); \\ & \chi(t, [-2,5; -1,0] \cup [0,0; 0,5]); \quad \chi(t, [-2,0; -0,5] \cup [1,0; 1,5]); \\ & \chi(t, [-1,5; 0,0] \cup [1,0; 1,5]); \quad \chi(t, [-1,0; 0,5] \cup [1,0; 1,5]); \\ & \chi(t, [-2,5; -1,0] \cup [-0,4; -0,3] \cup [-0,2; -0,1]) - \chi(t, [0,1; 0,2]); \\ & \chi(t, [-1,5; -1,0] \cup [-0,5; 0,0]) - \chi(t, [-2,0; -1,5] \cup [-1,0; -0,5]); \\ & \chi(t, [-2,0; -1,5] \cup [-1,0; -0,5]) - \chi(t, [-2,5; -2,0] \cup [-1,5; -1,0]); \\ & \chi(t, [-2,5; -2,0] \cup [-1,5; -1,0]) - \chi(t, [1,0; 1,5]). \end{aligned}$$

Кусочно-линейные сигналы:

$$\begin{aligned} & F(t) = \varphi_3(t; -1, 0; 0, 1; 1, 0); \\ & F(t + 1); \quad F(t + 2); \quad F(t - 1); \quad F(t - 2); \quad F(t - 0,5); \\ & F(t) + F(t + 2); \quad F(t) + F(t - 2); \quad \varphi_3(t; -1, 0; 0, 1; 2, 0); \\ & \varphi_3(t; -2, -1; 0, 1; 2, 0); \quad \varphi_4(t; -1, -1; 0, 1; 1, 0; 1,5; 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(t) &= \varphi_4(t; -1, -1; 0, 1; 1, 0; 1,5; 1); \quad G(-t); \\
&g(t + 1,5) + g(t + 1) - g(t - 0,5) - g(t - 1) + g(t - 1,5); \\
&g(t + 1) + g(t + 0,5) + g(t) + g(t - 0,5) + g(t - 1); \\
&g(-t + 0,5) - g(-t) + g(t) - g(t - 0,5); \\
&-g(-t + 1,5) + g(t + 0,5) - g(t - 0,5) + g(-t - 1,5); \\
&g(t + 1,5) + g(t + 1) - g(t - 1) + g(t - 1,5); \\
&-g(t + 1,5) + g(t + 1) + g(-t - 1,5) - g(-t - 2); \\
&-g(t + 2) + g(t + 1,5) + g(-t - 1,5) - g(t - 1,5); \\
&g(-t + 1,5) + g(-t + 1) + g(t + 1) - g(-t - 1) - g(t - 1) - g(t - 1,5); \\
&g(-t + 1,5) + g(-t + 1) + g(t + 1) - g(-t - 1,5) - g(t - 1,5); \\
&g(-t + 1) + g(t + 1) + g(-t - 0,5) + g(t - 0,5) + g(-t - 2) + g(t - 2); \\
&g(-t + 1) + \chi(t, [-1, 0,5]) + g(t - 0,5) - \chi(t; [1, 2]) + g(t + 2).
\end{aligned}$$

Кусочно-тригонометрические сигналы:

$$\begin{aligned}
&s(-t + \pi/4) + s(t) + s(t + \pi/4); \\
&-s(-t + \pi/2) + s(t - \pi/4) - s(-t - 3\pi/4); \\
&s(-t + 3\pi/4) - s(-t + \pi/2) + s(-t - \pi/2) + s(t - \pi/2); \\
&s(-t + \pi/2) + s(t) + s(-t - \pi/2); \\
&-s(-t + 3\pi/4) - s(-t + \pi/2) - s(-t + \pi/4) + \\
&+ s(t - \pi/4) + s(t - \pi/2) + s(t - 3\pi/4). \quad (6)
\end{aligned}$$

Сигналы (4)–(6) изображены на рис. 1, *a*–*d*, а их амплитуды спектров Фурье — на рис. 2, *a*–*d* соответственно. Для сигнала, изображенного на рис. 1, *a*, параметр  $\alpha = 3,5$  и  $3\alpha > \beta$ , поэтому формула (2) дает восстановление спектра с ошибкой  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-1}$  при  $\sigma = 1,02$ , но хотя  $2\alpha < \beta$ , тем не менее формула (1) дает ошибку  $\epsilon = 2,29$  при  $\sigma = 0,2$ , т. е. уже при шести локальных максимумах амплитуды (см. рис. 2, *a*) на отрезке  $[0, 1]$  формулы (1) и (2) не восстанавливают спектр Фурье.

Сигналы, изображенные на рис. 1, *b* и *2, c*, имеют пять локальных максимумов на отрезке  $[0, 1]$ , здесь  $3\alpha < \beta$  и формула (2) дает восстановление спектра с ошибкой  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$  при  $\sigma = 1,5$  и с ошибкой  $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$  при  $\sigma = 1,71$  соответственно. Формула (1) дает ошибку  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-1}$  при  $\sigma = 0,9$  и  $\sigma = 0,7$  соответственно. При отклонении  $\sigma$  от указанных значений всего на 5–10 % ошибка  $\epsilon$ , вопреки ожиданиям из [3], иногда возрастает на порядок. Обработанный материал пока не позволил выработать эффективные рекомендации по выбору параметра  $\sigma$ .

Кусочно-тригонометрический сигнал (6), изображенный на рис. 1, *d*, для его амплитуды спектра (см. рис. 2, *d*) неожиданно плохо восстанавливается формулой (1). Вероятно, это связано с тем, что разница между локальными максимумами на отрезке  $[0, 1]$  намного превышает длину самого отрезка, и хотя  $2\alpha < \beta$ , но формула (1) дает ошибку  $\epsilon = 2,88$  при  $\sigma = 0,2$ . Так как  $3\alpha > \beta$ , то ошибка в формуле (2)  $\epsilon = 2 \cdot 10^{-1}$  при  $\sigma = 0,9$  соответствует ожиданиям.

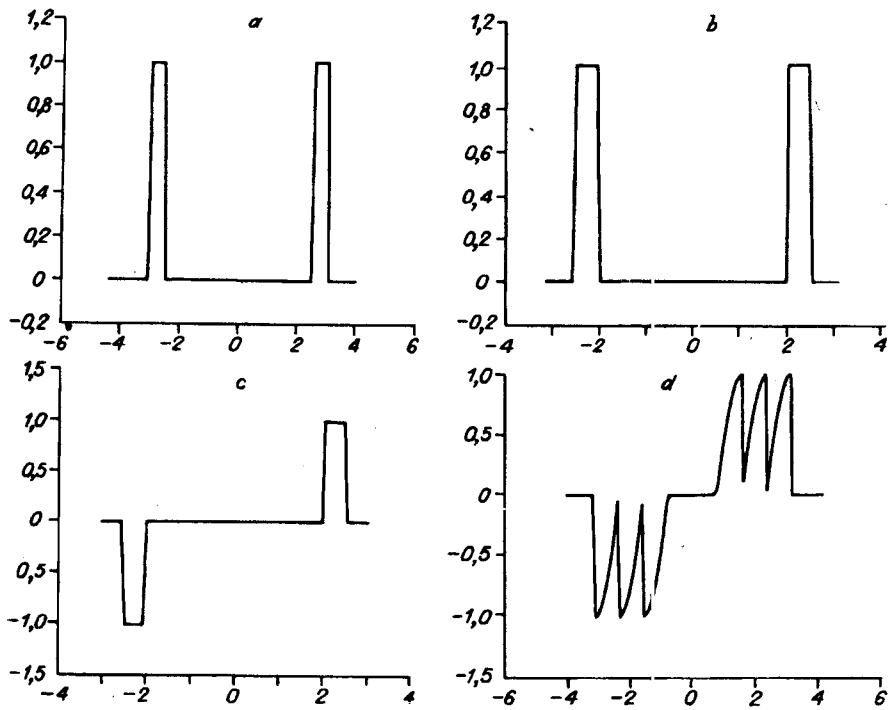


Рис. 1

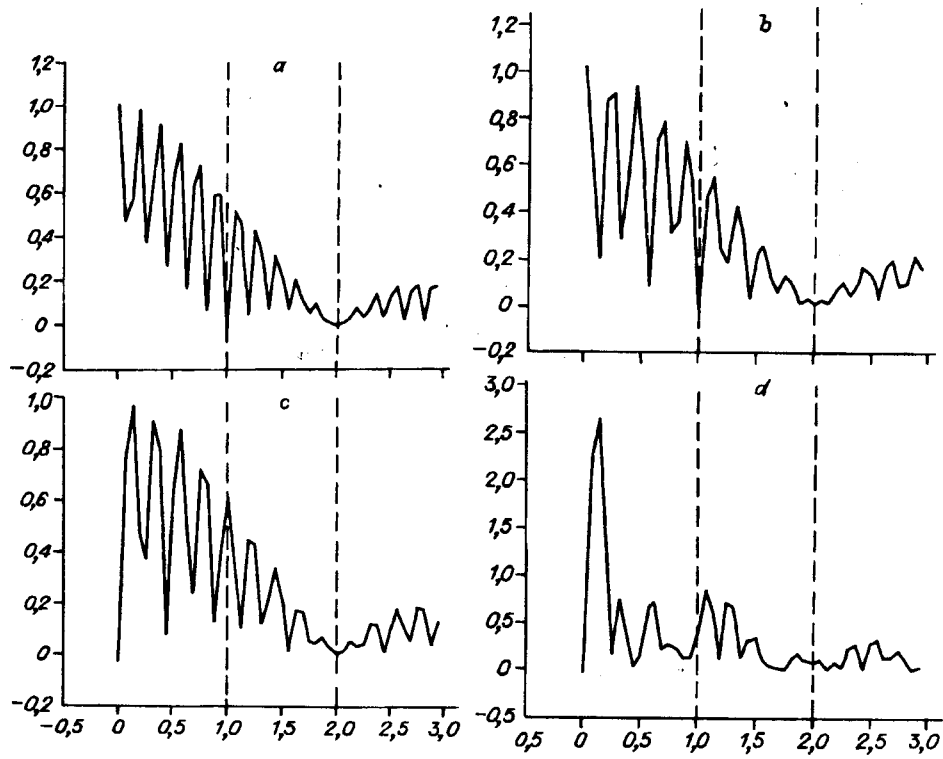


Рис. 2

## ВЫВОДЫ

Если значения спектров известны в узлах, отстоящих друг от друга на величину  $\Delta = 1/(2\beta)$ , то формула (1) работает для подавляющего большинства сигналов с  $2\alpha < \beta$ . Исключение составили сигналы с сильно осциллирующей амплитудой спектра (как правило, при пяти и более локальных максимумах на отрезке, с которого снимаются данные спектра).

Более быстрая формула (1') пригодна исключительно для сигналов, сосредоточенных на положительной полуоси.

Если значения спектров известны в узлах, отстоящих друг от друга на величину  $\Delta = 1/(2\beta)$ , то формула (2) работает для подавляющего большинства сигналов с  $3\alpha < \beta$ . Исключение составили сигналы с сильно осциллирующей амплитудой спектра (как правило, при шести и более локальных максимумах на отрезке, с которого снимаются данные спектра).

Результаты интерполяции спектров Фурье финитных сигналов по формулам (1), (1') и (2) сильно зависят от выбора параметра  $\sigma$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котельников В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Мат. к I Всесоюз. съезду вопр. техн. реконстр. связи: Сб. науч. трудов.: Управл. связи РККА, 1933.
2. Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. — Новосибирск: Наука, 1990.
3. Айзенберг Л. А., Кравцов Б. А., Шаймкулов Б. А. Об интерполяции сигналов с финитным спектром Фурье. Вычислительный эксперимент // Автометрия. — 1989. — № 4.

*Поступила в редакцию 23 марта 1993 г.*

---