

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

В. Ю. Осипов

(Санкт-Петербург)

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ОДНОМ КЛАССЕ  
ПРАКТИЧЕСКИ ВАЖНЫХ СЛОЖНЫХ ИНТЕРФЕРОГРАММ

Исследована коротковолновая асимптотика псевдоакустического поля дифракции. В рамках метода стационарной фазы осуществлено преодоление геооптических сингулярностей на огибающих и определена амплитуда поля как внутри псевдоакустики, так и на огибающих. Исследована автокорреляционная функция амплитудного пропускания транспаранта, на котором происходит дифракция плоской волны, и весовая функция, характеризующая долю участия площади исходного транспаранта в формировании факельной ячейки острия. Приведенные методы в общем случае могут быть применены для анализа оптических характеристик машинно-синтезированных интерферограмм, цифровых голограмм различных объектов, в том числе и априорно несуществующих, фазовых киноформов любой степени сложности и дифракционных решеток.

Для оптических информационных технологий актуально знать методику расчета и прогнозирования оптических свойств киноформов, машинно-синтезированных голограмм, фазовых «плоских» корректоров различного вида aberrаций и формы волновых фронтов и т. д. Такую задачу в настоящее время можно считать уже полностью исследованной. Последующее изложение на примере одного класса сложных интерферограмм покажет, каким образом некоторые различные методики могут быть применены для анализа свойств синтезированных элементов компьютерной оптики.

В [1, 2] нами уже исследовались как экспериментально, так и теоретически псевдоакустические когерентно-оптические волновые поля, возникающие при дифракции лазерного пучка на микро-транспарантах одного класса сложных интерферограмм. В [2] было показано, что распределение интенсивности псевдоакустического дифракционного поля в частотной плоскости  $\omega_x, \omega_y$ , т. е. и в области дифракции Фраунгофера, сводится (если не интересоваться нулевым порядком дифракции при  $\hat{\omega}_x = \hat{\omega}_y = 0$  от постоянной составляющей в функции амплитудного пропускания транспаранта) к вычислению квадрата двумерного интеграла

$$J(\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y) = \int_{-L_y}^{+L_y} \int_{-L_x}^{+L_x} \cos(ax(x^2 + y^2 - R^2)) \cos \hat{\omega}_x x \cos \hat{\omega}_y y dx dy \quad (1)$$

или квадрата одномерного, параметрического по  $\hat{\omega}$ , интеграла

$$J(\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y) = \frac{4\pi^{1/2}}{a^{1/2}} \int_0^{+L_x} \frac{\cos \left[ a(x^3 - xR^2) + \frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\omega}_y^2}{4xa} \right]}{x^{1/2}} \cos \hat{\omega}_x x dx. \quad (2)$$

Здесь  $a, R$  — параметры функции пропускания транспаранта, на котором происходит дифракция электромагнитной волны;  $L_x, L_y$  — параметры действующей апертуры транспаранта.

При этом в [2] в рамках скалярной теории рассматривалась дифракция «коротких» волн на структурах с функцией амплитудного пропускания  $T(x, y) = T_0/2(1 + \cos(ax(x^2 + y^2 - R^2)))$ , когда длина волны излучения  $\lambda$  значительно меньше обратных локальных пространственных частот  $2\pi/\omega_x$ ,  $2\pi/\omega_y$  в области действующей апертуры транспаранта. Здесь  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  — локальные круговые пространственные частоты в точке  $x$ ,  $y$  транспаранта:

$$\omega_x = a(3x^2 + y^2 - R^2), \quad (3)$$

$$\omega_y = 2axy. \quad (4)$$

Иными словами, исследовалась ситуация малых углов дифракции, когда не существенны различия между подходами Гюйгенса — Кирхгофа и Рэлея — Зоммерфельда [3] в вычислении дифракционного поля в дальней зоне. Случай дифракции «длинных» волн на структурах  $\cos(ax(x^2 + y^2 - R^2))$ , когда в ближней зоне имеют место экспоненциально затухающие с ростом  $z$  неоднородные приповерхностные волны, не интересен для рассмотрения.

Исследуемые псевдоакустические структуры формируются при дифракции на транспаранте в дальней зоне. Заметим, что при реализации данных структур без дополнительного фурье-объектива в точках плоскости экрана, перпендикулярной направлению распространения продифрагировавшего излучения, отсутствуют какие-либо реальные пересечения геометрических парциальных лучей. В этом случае псевдоакустика представляет собой промодулированное соответствующим образом распределение интенсивности вдоль волнового фронта расходящегося пучка, наблюдаемое в плоскости экрана. Такое распределение интенсивности волнового поля имеет место (при соответствующем масштабировании) в дальней зоне на любом расстоянии от транспаранта. При реализации структур с использованием фурье-объектива псевдоакустика реализуется лишь в плоскости фокуса фурье-объектива. В результате в каждую точку псевдоакустики приходит соответствующее число геометрических лучей от соответствующих точек транспаранта и имеются реальные пересечения лучевых траекторий.

Хотя в работе [2] большое место уделялось геометрической интерпретации результатов дифракции на базе лучевых построений и на ее основе была вскрыта физическая «причина» возникновения в дифракционном эксперименте псевдоакустических структур, тем не менее имеет смысл более строго рассмотреть данный вопрос путем анализа коротковолновых асимптотик волнового поля, когда в пределе при уменьшении длины волны излучения последовательно реализуется переход к геометрическому квазиклассическому приближению. Исследование коротковолновых асимптотик поля методом стационарной фазы (или методом перевала) использовалось в ряде задач теории дифракции (например, в [4]) для построения геометрических описаний дифракционного поля как в освещенных, так и в теневых областях, а также для определения «эффективных источников» дифракционных волн [6, 7]. Кроме того, исследование лучевой структуры волнового поля, возникающего при дифракции на решетках с медленно меняющимися (в общем случае) параметрами, также является интересной и актуальной задачей [7]. Необходимость последующего рассмотрения обусловлена и практической важностью анализируемого класса интерференционных полей для систем с абберациями комы третьего порядка и ряда специальных задач оптической обработки информации и распознавания образов.

1. Асимптотический анализ одномерного дифракционного интеграла методом стационарной фазы. Оценка поля на огибающих. Асимптотическое поведение интегралов (1), (2) при  $a \rightarrow \infty$ ,  $R = \text{const}$  или при  $a \rightarrow \infty$ ,  $aR^2 = \text{const}$  может быть исследовано изложенным в [8] так называемым методом стационарной фазы. Поскольку этот метод\* используется для описания

\* В общем случае метод стационарной фазы применим и к вычислению фейнмановских континуальных интегралов, аппарат которых адекватно формулирует принцип Гюйгенса [10].

широкого спектра ситуаций, соответствующих диапазону от квазиклассического приближения в оптике до приближения Гюйгенса — Френеля в скалярной теории дифракции [9], то с его помощью могут быть определены особенности волнового поля на псевдокаустике и осуществлена их классификация. Одномерный параметрический интеграл (2), описывающий поле в дальней зоне, значительно сложнее интегрального представления функции Эйри  $Ai(t) \sim \int_0^{\infty} \cos(x^3/3 + xt)dx$ , поэтому решение (2) не выражается в виде этих функций и требует самостоятельного исследования.

Запишем (2), опуская некоторые постоянные множители и заменяя  $\cos \omega_x x$  при интегрировании четной функции комплексным представлением  $e^{i\omega_x x}$ , в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^{1/2}} \int_{-L_x}^{+L_x} \frac{\cos \left[ a|x|(x^2 - R^2) + \frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\omega}_y^2}{4|x|a} \right]}{|x|^{1/2}} e^{i\omega_x x} dx = \\ & = \int_{-L_x}^{+L_x} \frac{\exp \left[ i \left( a|x|(x^2 - R^2) + \frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\omega}_y^2}{4|x|a} + \hat{\omega}_x x \right) \right]}{|ax|^{1/2}} dx + \\ & + \int_{-L_x}^{+L_x} \frac{\exp \left[ i \left( -a|x|(x^2 - R^2) - \frac{\pi}{4} + \frac{\hat{\omega}_y^2}{4|x|a} + \hat{\omega}_x x \right) \right]}{|ax|^{1/2}} dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Воспользовавшись методом стационарной фазы при вычислении одномерных интегралов согласно [8] можно получить аналитические асимптотические оценки (5) для основных членов поля внутри псевдокаустики и на ее огибающих.

В первом случае асимптотическое разложение поля внутри каустики имеет вид:

$$J(\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y) \sim \sum_{\substack{x_1, x_2 \\ x_3, x_4}} \frac{1}{|x_i|^{1/2}} \frac{e^{i\xi_1(x_i)} \Gamma(1/2) e^{i\pi/4}}{2[\xi_1''(x_i)/2!]^{1/2}} + \sum_{\substack{x_5, x_6 \\ x_7, x_8}} \frac{1}{|x_i|^{1/2}} \frac{e^{i\xi_2(x_i)} \Gamma(1/2) e^{i\pi/4}}{2[\xi_2''(x_i)/2!]^{1/2}}, \quad (6)$$

где  $x_3 = -x_1$ ,  $x_4 = -x_2$ ,  $x_7 = -x_5$ ,  $x_8 = -x_6$ ,  $\xi_{1,2}(x) = \pm \left[ a|x|(x^2 - R^2) + \frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\omega}_y^2}{4|x|a} \right] + \hat{\omega}_x x$ ,  $\Gamma$  — гамма-функция. Стационарные точки  $x_1 - x_4$ ,  $x_5 - x_8$  находятся из условий равенства нулю первых производных функций  $\xi_{1,2}(x)$ :

$$\xi_{1,2}'(x) = \pm \left( 3ax^2 - aR^2 + \frac{\hat{\omega}_y^2}{4x^2 a} \right) + \hat{\omega}_x = 0, \quad (7)$$

т. е. являются абсциссами точек  $M_1, M_2, \bar{M}_3, \bar{M}_4, M_5, M_6, \bar{M}_7, \bar{M}_8$ , координаты которых по  $x$  и  $y$  определяются приведенными ранее в [2] соотношениями. (Положение указанных точек на транспаранте показано на рис. 1, ранее приводившемся в [2].) При этом амплитуда поля определяется вторыми производными функций  $\xi_{1,2}(x)$ :

$$\xi_{1,2}''(x) = \pm \left( 6a|x| - \frac{\hat{\omega}_y^2}{2|x|^3 a} \right)$$

в точках  $x_i$ . Отметим, что выражение (6) справедливо только для амплитуды поля внутри псевдокаустики, так как на огибающих или вблизи нее оно

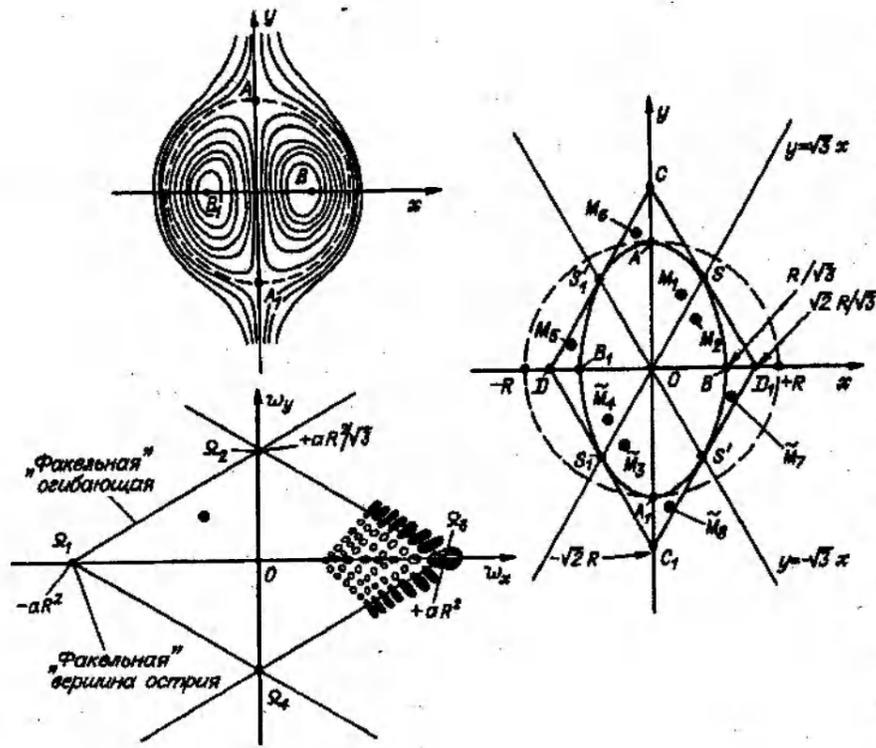


Рис. 1. Схема формирования дифракционного поля в рамках геометрических построений

приводит к сингулярности в амплитуде поля. Возникновение сингулярности происходит (например, для одного из квадрантов частотной плоскости  $\omega_x, \omega_y$ ) в результате сближения и совпадения точек  $x_1 = x_2, x_3 = x_4$ . При этом  $\xi_1''(x_{1,3}) = 0$ , и эту особенность в поведении функции  $\xi(x)$  вблизи стационарных точек  $x_1, x_3$  необходимо правильным образом учитывать для получения конечных величин для амплитуды поля на огибающих.

Во втором случае для основного члена асимптотического разложения поля на огибающих каустики (за исключением точек  $\hat{\omega}_x = 0, \hat{\omega}_y = \pm aR^2/\sqrt{3}$ ) имеем

$$J(\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y) \sim \sum_{x_1, x_3} \frac{1}{|x_i|^{1/2}} \frac{e^{i\xi_1(x_i)} \Gamma(1/3) \cos(\pi/6)}{3[\xi_1'''(x_i)/3!]^{1/3}} + \sum_{x_5, x_6 \atop x_7, x_8} \frac{1}{|x_i|^{1/2}} \frac{e^{i\xi_2(x_i)} \Gamma(1/2) e^{i\pi/4}}{2[\xi_2''(x_i)/2!]^{1/2}} \quad (8)$$

Здесь  $\xi_1'''(x) = 6a + \frac{3\hat{\omega}_y^2}{2x^4 a}$ , а точки  $x_1, x_3$  удовлетворяют условию  $\xi_1'(x_{1,3}) = -\xi_1''(x_{1,3}) = 0$ . Поскольку последнее условие выполняется при  $12a^2 x_{1,3}^4 = \hat{\omega}_y^2$ , то величина  $\xi_1'''(x_{1,3}) = 6a + 18a = 24a$  и постоянна на огибающей. В (8) первая сумма вычисляется на двух точках  $x_1, x_3$  (при этом  $x_1 = x_2, x_3 = x_4$ ) и непосредственно объясняет осцилляционную факельную структуру поля вдоль огибающих, а вторая сумма эквивалентна, следуя работе [2], учету перекрытия от симметричной псевдокаустики. Таким образом, амплитуда поля в основном определяется первой суммой и задается значениями третьей производной функции  $\xi_1(x)$  в точках  $x_1, x_3$ . В этом приближении устраняется сингулярность поля на огибающих, однако для корректного расчета амплиту-

ды поля на огибающих и в окрестности факельного острья целесообразно использовать оценку основного члена асимптотического разложения первичного двумерного интеграла (1).

2. Асимптотический анализ методом стационарной фазы для двумерных интегралов. Преодоление геометрикооптических сингулярностей и корректная оценка поля в окрестности огибающих. Учитывая, что при  $k = 0$  функция  $\cos(\varphi(x, y))$ , где  $\varphi(x, y) = ax(x^2 + y^2 - R^2) + ky$ , четна по  $x$  и  $y$ , запишем интеграл (5) в комплексной форме:

$$\begin{aligned} & \int_{-L_y}^{+L_y} \int_{-L_x}^{+L_x} \exp[i(ax(x^2 + y^2 - R^2) + \hat{\omega}_x x + \hat{\omega}_y y)] dx dy + \\ & + \int_{-L_y}^{+L_y} \int_{-L_x}^{+L_x} \exp[-i(ax(x^2 + y^2 - R^2) + \hat{\omega}_x x + \hat{\omega}_y y)] dx dy. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда в соответствии с методом стационарной фазы для двумерных интегралов [8] вычислим амплитуды поля дифракции внутри псевдокаустики, а также на ее огибающих и острье.

Внутри псевдокаустики поле описывается следующим выражением:

$$J(\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y) \sim \sum_{\substack{M_1, M_2 \\ \tilde{M}_3, \tilde{M}_4}} \frac{2\pi i e^{i\mu^+(x_i, y_i)}}{[\mu_{xx}^+ \mu_{yy}^+ - \mu_{xy}^+]^{1/2}} + \sum_{\substack{M_5, M_6 \\ \tilde{M}_7, \tilde{M}_8}} \frac{2\pi i e^{i\mu^-(x_i, y_i)}}{[\mu_{xx}^- \mu_{yy}^- - \mu_{xy}^-]^{1/2}}. \quad (10)$$

Здесь  $\mu^\pm(x, y) = \pm ax(x^2 + y^2 - R^2) + \hat{\omega}_x x + \hat{\omega}_y y$ , а координаты стационарных точек  $M_i(x_i, y_i)$ , являющихся центрами френелевских сечений соответствующих парциальных лучей\*, определяются решениями уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu^\pm}{\partial x} = \mu_x(x, y) &= \pm a(3x^2 + y^2 - R^2) + \hat{\omega}_x = 0, \\ \frac{\partial \mu^\pm}{\partial y} = \mu_y(x, y) &= \pm 2axy + \hat{\omega}_y = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Записи  $\mu_{xx}^\pm, \mu_{yy}^\pm, \mu_{xy}^\pm$  означают соответственно вторые производные  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$  от функций  $\mu^+$  и  $\mu^-$ . Таким образом, выражение (11) определяется величинами  $\mu^\pm$  и  $\mu_{xx}^+ \mu_{yy}^+ - \mu_{xy}^+{}^2 = \mu_{xx}^- \mu_{yy}^- - \mu_{xy}^-{}^2 = 12a^2 x^2 - 4a^2 y^2$ , вычисленными в точках  $M_i(x_i, y_i)$ . Вторая сумма в (10) так же, как и в предыдущем разделе, эквивалентна учету перекрытия от симметричной относительно оси  $\omega_x = 0$  псевдокаустики. Выражение (10) для величин  $\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y$ , соответствующих каустической огибающей, приводит к появлению сингулярности в амплитуде поля (так как при совпадении  $M_1, M_2$  и  $\tilde{M}_3, \tilde{M}_4$  координаты точек связаны соотношением  $y_i = \sqrt{3} x_i$ ). Сингулярность в ситуации двукратного вырождения, однако, преодолевается в следующем приближении. При таком подходе, следуя [10, 11], неразличимость соответствующих лучей в общем случае означает в математическом отношении сильное перекрытие  $\pi$ -окрестностей стационарных точек дифракционного интеграла Гюйгенса — Кирхгофа. Критерием применимости формулы (10) является отсутствие перекрытия  $\pi$ -окрестностей соответствующих стационарных точек.

Отметим, что характер знаменателей в выражении (10) для амплитуды поля дифракции полностью соответствует (оцененной в [2] при грубом геомет-

\* В соответствии с [10] представление о френелевском объеме в геометрикооптическом подходе является физическим содержанием понятия «луч».

рооптическом рассмотрении) величине интенсивности поля дифракции. Напомним, что в соответствии с [2] интенсивность поля должна быть обратно пропорциональна якобиану преобразования  $x, y \Rightarrow \omega_x, \omega_y$ :

$$\frac{D(\omega_x, \omega_y)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} & \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} & \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6ax & 2ay \\ 2ay & 2ax \end{vmatrix} = 12a^2x^2 - 4a^2y^2.$$

Для поля на острие и огибающих псевдокаустики имеем

$$J(\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y) \sim \sum_{M_1, \tilde{M}_3} \frac{\sqrt{2\pi} e^{j\pi/4} \Gamma(1/3) \cos(\pi/6) e^{j\mu^+(x_r, y_r)}}{3\mu_{yy}^{+1/2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\mu_{xx}^+ - \mu_{xy}^{+2}/\mu_{yy}^+] / 3! \right\}^{1/3}} + \sum_{\substack{M_5, M_6 \\ \tilde{M}_7, \tilde{M}_8}} \frac{2\pi j e^{j\mu^-(x_r, y_r)}}{[\mu_{xx}^- \mu_{yy}^- - \mu_{xy}^{-2}]^{1/2}}. \quad (12)$$

Здесь  $\mu_{yy}^+ = 2ax$ , а

$$\frac{\partial}{\partial x} [\mu_{xx}^+ - \mu_{xy}^{+2}/\mu_{yy}^+] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ 6ax - \frac{(2ay)^2}{2ax} \right] = 6a + \frac{(2ay)^2}{2ax^2} = 6a + 6a = 12a$$

для точек типа  $M_1, \tilde{M}_3$ , что приводит к конечной величине поля на огибающих. Выражение (12) было получено с помощью последовательных применений метода стационарной фазы — сначала путем интегрирования по  $y$ , а затем по  $x$ . Изменение порядка интегрирования не влияет на величину оценки, поскольку для стационарных точек  $M_1, \tilde{M}_3$ , удовлетворяющих условию  $y_i = \sqrt{3}x_i$ , имеет место соотношение

$$\mu_{yy}^{+1/2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\mu_{xx}^+ - \mu_{xy}^{+2}/\mu_{yy}^+] \right\}^{1/3} = \mu_{xx}^{+1/2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [\mu_{yy}^+ - \mu_{xy}^{+2}/\mu_{xx}^+] \right\}^{1/3} = (2ax)^{1/2} (12a)^{1/3}.$$

Заметим, что структура первой части выражения (12) была получена автором в результате проведения дополнительных аналитических исследований, выходящих за рамки известной монографии Папулиса [8]. Сингулярность на острие, имеющая место за счет  $x = 0$  при совпадении  $M_1$  и  $\tilde{M}_3$  (ситуация 4-кратного вырождения), может быть исследована подстановкой  $x = t^2$ .

Рассмотрим первую часть выражения (12) для точек центрального сечения псевдокаустики, т. е. при  $\omega_x = \text{const}$ ,  $\omega_y = 0$ . В этом случае одна пара стационарных точек  $M_1, \tilde{M}_3$  лежит на оси ординат при  $x = 0$ , а другая пара  $M_2, \tilde{M}_4$  — на оси абсцисс при  $y = 0$ . При  $\hat{\omega}_x = \text{const}$ ,  $\hat{\omega}_y \Rightarrow 0$  абсциссы первой пары точек равны

$$x_1 = |x_3| \approx \frac{\hat{\omega}_y}{2\sqrt{a(aR^2 + \hat{\omega}_x)^{1/2}}} \quad (13)$$

при  $-aR^2 < \hat{\omega}_x < 0$ ,  $\hat{\omega}_y > 0$ , а второй пары точек —

$$x_2 = |x_4| \approx \left[ \frac{aR^2 + \hat{\omega}_x}{3a} \right]^{1/2}. \quad (14)$$

Данные выражения получены при условии  $\sqrt{3}\hat{\omega}_y \ll aR^2 + \hat{\omega}_x$ . Хотя при  $\hat{\omega}_y = 0$  координаты  $x_{1,3}$  равны нулю, это, однако, не приводит к сингулярности в первой части выражения (12), поскольку в этом случае записанное выражение следует понимать в виде предела при  $\omega_y \Rightarrow 0$ . При таком подходе имеем

$$\lim_{\hat{\omega}_y \rightarrow 0} \frac{1}{|x_1|^{1/2} |\xi_1''(x_1)|^{1/2}} = \frac{1/\sqrt{2}}{(aR^2 + \hat{\omega}_x)^{1/2}} \quad (15)$$

при условии  $aR^2 + \hat{\omega}_x \gg \sqrt{3} \hat{\omega}_y / 2$ .

Видно, что по мере приближения к факельной вершине ( $\hat{\omega}_x \Rightarrow -aR^2$ ) вдоль оси  $\hat{\omega}_y = 0$  значение данного предела бесконечно возрастает. Можно показать, что при  $\hat{\omega}_y \Rightarrow 0$

$$\{|x_{1,3}| \cdot |\xi_1''(x_{1,3})|\}^{1/2} = \{|x_{2,4}| \cdot |\xi_1''(x_{2,4})|\}^{1/2} = \left[ 2(aR^2 + \hat{\omega}_x) - \frac{3\hat{\omega}_y^2}{2(aR^2 + \hat{\omega}_x)} \right]^{-1/2}$$

Это свидетельствует о том, что точки  $M_1, \bar{M}_3$  и  $M_2, \bar{M}_4$  при  $\hat{\omega}_y = 0$  вносят одинаковый весовой вклад в формирование точки центрального разреза псевдокаустики, т. е. формирование точек центрального сечения происходит за счет суперпозиции четырех парциальных лучевых полей с одинаковыми амплитудными коэффициентами. При  $\hat{\omega}_y = 0, \hat{\omega}_x \Rightarrow -aR^2$  точки  $M_1, \bar{M}_3$  и  $M_2, \bar{M}_4$ , оставаясь на осях  $u$  и  $x$ , движутся к началу координат  $(0, 0)$ , и в рамках геометрической интерпретации парциальные амплитуды волн в лучевой сумме (6) бесконечно возрастают.

Подстановка координат стационарных точек в выражение (10) подтверждает, что при движении к факельной вершине вдоль центрального разреза ( $\hat{\omega}_y = 0, \hat{\omega}_x \Rightarrow -aR^2$ ) модуль результирующей амплитуды поля возрастает не быстрее чем  $-(aR^2 + \hat{\omega}_x)^{-1/2}$ . При движении к факельной вершине вдоль огибающих модуль амплитуды поля также растет не быстрее чем  $-(aR^2 + \hat{\omega}_x)^{-1/2}$ , что видно из выражения (12).

Соответствующее рассмотрение можно провести и для второй части выражения (12), т. е. для вклада от симметричной псевдокаустики. При этом аналогично имеем

$$\lim_{\hat{\omega}_y \rightarrow 0} \frac{1}{|x_{5,7}|^{1/2} |\xi_2''(x_{5,7})|^{1/2}} = \frac{1/\sqrt{2}}{(aR^2 - \hat{\omega}_x)^{1/2}}$$

3. Автокорреляционная функция и пространственная фильтрация факельной ячейки острия. Автокорреляционная функция  $\alpha(\Delta x, \Delta y)$  от распределения  $\cos(ax(x^2 + y^2 - R^2))$  может быть вычислена на основании теоремы Винера — Хинчина как преобразование Фурье от спектральной плотности мощности функции  $\cos(ax(x^2 + y^2 - R^2))$ , т. е. находится в виде преобразования Фурье от распределения интенсивности дифракционного поля псевдокаустики.

Функция  $\alpha(\Delta x, \Delta y)$  рассчитывалась численно на ЭВМ с использованием метода БПФ при значениях параметров  $a = 0,2, R = 10$ . Результаты такого расчета представлены на рис. 2. Из рисунка видно, что главные максимумы (основные пики) автокорреляционной функции лежат на прямой  $\Delta y = -\sqrt{3} \Delta x$ . Ранее было показано, что точки прямых  $y = \pm \sqrt{3} x$  на исходном транспаранте дают основной вклад (при геометрической интерпретации результатов дифракции) в формирование факельных огибающих в частотной плоскости. Таким образом, для данного типа двумерных сигналов автокорреляционная функция «выделяет» геометрическую форму кривой в плоскости  $(x, y)$ , соответствующую каустической огибающей в частотной плоскости. По-

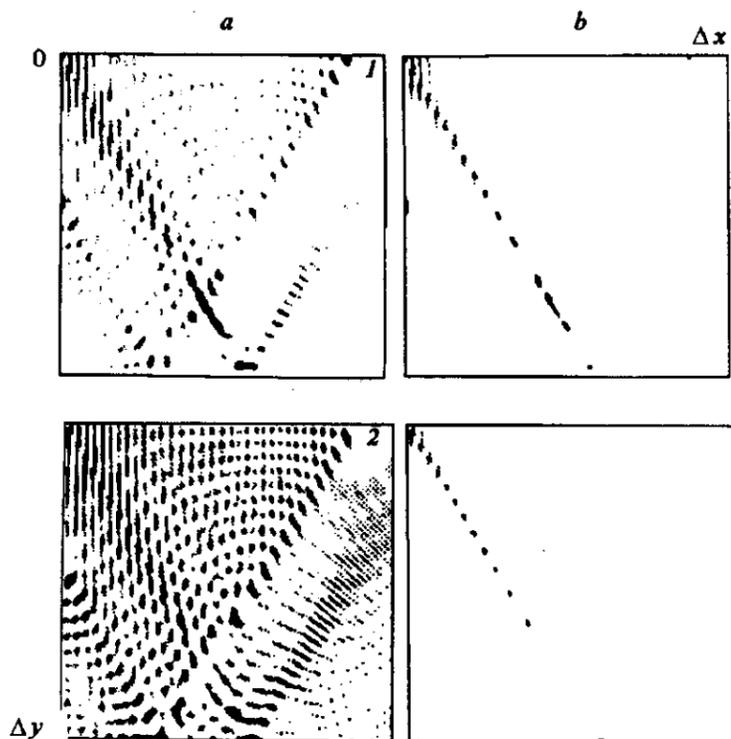


Рис. 2. Изображение положительной и отрицательной части автокорреляционной функции двумерного сигнала в двухградационной шкале. (На изображении фиксируются лишь области, значение функции в которых превышает некоторый заданный пороговый уровень):

1 — положительная часть функции, 2 — отрицательная; изображение с низким уровнем порога (а) и с высоким уровнем порога (б)

видимому, это является следствием более общего свойства, связанного с тем обстоятельством, что преобразование

$$\omega_x = f_x(x, y), \quad \omega_y = f_y(x, y)$$

отображает плоскость  $(x, y)$  на плоскость  $(\omega_x, \omega_y)$  неоднозначно, т. е. имеет место наличие «складки», приводящей к тому, что два соседних «листа»-сегмента, имеющих общую границу, из координатной плоскости преобразуются в частотной плоскости в один «лист».

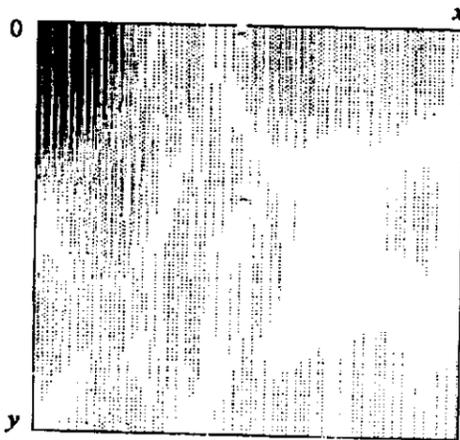
Детальное исследование, однако, показало, что положение пиков-максимумов автокорреляционной функции не связано с положением максимумов ячеек на огибающих простым соотношением

$$\omega_x = f_x(x, y), \quad \omega_y = f_y(x, y).$$

Хотя данные факты еще требуют дальнейшего изучения, тем не менее уже определенный на ЭВМ вид автокорреляционной функции интерференционного поля важен для задач распознавания интерферограмм в случае систем с сильной «зашумленностью» оптического тракта.

Таким образом, в работе показано, что псевдокаустическое поле дифракции имеет описание не только на основе волновой теории, но и в рамках квазиклассического геометрикооптического подхода на базе лучевых построений. Данный факт интересен в связи с тем обстоятельством, что в соответствии с волновой теорией, например, формирование области факельного

Рис. 3. Изображение весовой функции, характеризующей долю площади в квадранте транспаранта, ответственную за формирование ячейки острия. (Показано распределение модуля весовой функции при высоком уровне порога)



острия происходит в области дифракции Фраунгофера практически за счет большей части площади исходного транспаранта, а не за счет окрестностей точки начала координат ( $M_1 = M_2 = \bar{M}_3 = \bar{M}_4 = 0$ ) и точек  $D, C, D_1, C_1$  (расположение данных точек на транспаранте приведено на рис. 1). Для проверки этого обстоятельства проводился следующий вычислительный эксперимент: от псевдокаустики в частотной плоскости  $\omega_x, \omega_y$  отфильтровывалась факельная ячейка острия и вычислялось обратное преобразование Фурье. Из результатов данной операции в плоскости  $x, y$  вычиталось исходное распределение  $\cos(ax(x^2 + y^2 - R^2))$ , фурье-образ которого и подвергался вначале селективной фильтрации. В результате в плоскости  $x, y$  была получена весовая функция (рис. 3, 4) с максимумом в начале координат  $(0, 0)$ , характеризующая вклад каждой точки исходного транспаранта в формирование факельного острия.

4. Общие вопросы и дополнительные замечания. А. Изложенные в данной и предыдущих работах [1, 2] результаты, очевидно, нетрудно распространить и на случай дифракции плоской волны на «мелком» поверхностном рельефе типа

$$h = h_0(1 + \cos(ax(x^2 + y^2 - R^2)))/2,$$

где  $h_0 \leq 0,1\lambda$ . Здесь подразумевается, например, как случай дифракции при отражении от «металлического» рельефа, так и случай дифракции при «преломлении», когда, распространяясь в диэлектрической однородной среде, плоская волна при выходе из нее дифрагирует на соответствующем фазовом рельефе. В последнем случае величина  $h_0$  может быть несколько большей в меру близости показателя преломления диэлектрической среды к единице.

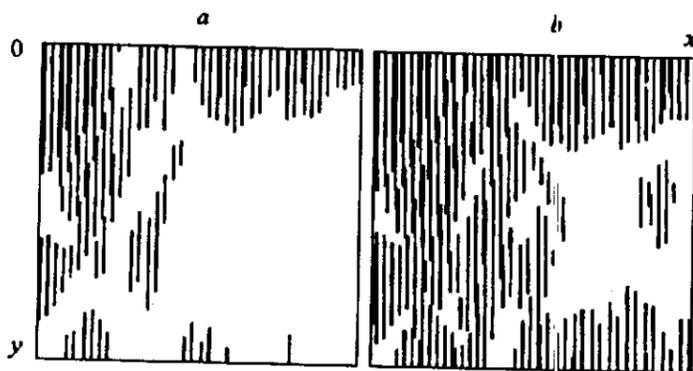


Рис. 4. Изображение знакового распределения весовой функции: изображение с высоким уровнем порога (а) и с низким уровнем порога (б)

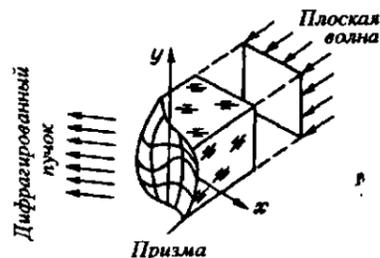


Рис. 5. Дифракция при преломлении на «крупном» диэлектрическом рельефе

Гораздо более интересный результат возникает при распространении полученных результатов на случай дифракции при «преломлении» на «крупном» диэлектрическом рельефе (рис. 5) вида

$$h(x, y) = \bar{h} + h_0 a x(x^2 + y^2 - R^2).$$

Здесь имеется в виду, например, что в области эффективно открытой апертуры отклонение рельефа от среднего уровня  $\bar{h}$  значительно больше  $\lambda$  (так, для приведенной в [12] интерферограммы это соответствует максимальному отклонению рельефа от центрального среднего уровня в  $\pm 10\lambda/(n-1)$ , где  $n$  — показатель преломления диэлектрической среды). Исследованные в [1] интерферограммы представляют тогда систему линий уровней соответствующего «крупного» рельефа с шагом, равным  $\lambda/(n-1)$ . Интересной особенностью такой дифракции является наличие в дальней зоне только одной псевдокаустики, что ясно из рассмотрения соответствующих построений для преломленных парциальных лучей. В отличие от ситуации дифракции на решеточной прозрачной структуре (когда имеется перекрытие псевдокаустик от  $+1$ -х и  $-1$ -х порядков дифракции) в данном случае имеет место лишь одна псевдокаустика и разделение областей внутри тела псевдокаустики и вне ее на области «света» и геометрической «тени» является вполне корректным. Уменьшение длины волны излучения будет приводить в таком случае к более мелкозернистой ячеистой структуре тела псевдокаустики, общие же размеры, ориентация и положение последней будут оставаться неизменными. Таким образом, такая ситуация достаточно иллюстративна при анализе коротковолновых асимптотик поля, поскольку при рассмотрении дифракции на решеточных структурах изменение длины волны приводит к сдвигу факельной вершины псевдокаустики и изменению масштаба.

Аналогичные выводы с определенной степенью точности можно сделать и по отношению к характеру эволюции сферического сходящегося волнового фронта, искаженного aberrациями комы третьего порядка [12].

Б. В реальных оптических фокусирующих системах с aberrациями комы третьего порядка каустические структуры, соответствующие по внешнему виду псевдокаустике, реализуются в плоскости экрана при косом падении коллимированного пучка на фокусирующую систему. Формирование каустической картины в экранной плоскости, перпендикулярной оптической оси сходящегося, искаженного aberrациями сферического волнового фронта, можно математически описать в результате анализа прохождения электромагнитной волны через соответствующую двумерную дифракционную структуру и идеальную тонкую линзу с соответствующим фокусным расстоянием. Тем самым можно определить эффективный «дифракционный эквивалент» исследуемой фокусирующей системы. (Строго говоря, такой «дифракционный эквивалент» должен иметь не амплитудный, а крупномасштабный фазовый характер, поскольку в первом случае в фокальной плоскости появляются два центрально-симметричных изображения.)

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипов В. Ю., Осипов Ю. В. Оптический синтез и двумерный фурье-анализ сложных КЧМ-интерференционных полей // ЖТФ.—1992.—62, вып. 6.
2. Осипов В. Ю. Оптически реализуемый двумерный фурье-анализ сложных КЧМ-интерференционных полей // Автометрия.—1993.—№ 6.
3. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику: Пер. с англ. /Под ред. Г. И. Косоурова.—М.: Мир, 1970.

4. Кинбер Б. Е., Хестанов Р. Х. Дифракционное поле в освещенной области // Изв. вузов. Радиофизика.—1967.—X, № 2.
5. Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн.—Киев: Наук. думка, 1988.
6. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции.—М.: Связь, 1978.
7. Кинбер Б. Е., Кондратенко П. С. Дифракция на решетках с медленно меняющимися параметрами // Письма в ЖТФ.—1989.—15, вып. 5.
8. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике: Пер. с англ.—М.: Мир, 1971.
9. Зверев В. А. Радиооптика (Преобразование сигналов в радио и оптике).—М.: Сов. радио, 1975.
10. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Границы применимости метода геометрической оптики и смежные вопросы // УФН.—1980.—132, вып. 3.
11. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.—М.: Наука, 1980.
12. Осиков В. Ю. Дифракция на сложных синтезированных решетках-интерферограммах // Автометрия.—1993.—№ 4.

*Поступила в редакцию 9 декабря 1993 г.*