

УДК 681.2.08

В. М. Ефимов, А. Н. Касперович
 (Новосибирск)

О СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ШУМА В АЦП
 С ДЕЛЬТА—СИГМА-МОДУЛЯЦИЕЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

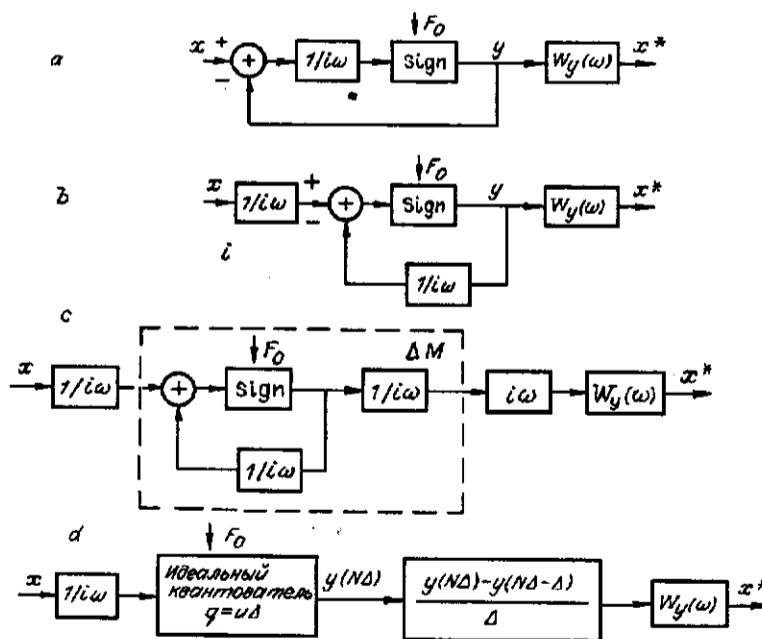
Показано, что основные соотношения для статистических характеристик ошибки аналого-цифрового преобразования с дельта—сигма-модуляцией вытекают из результатов теории квантования для идеального многоуровневого квантователя.

В последние годы АЦП, построенные на основе дельта—сигма-модуляции ($\Delta\Sigma$), переживают период активного развития. Для этих приборов разработаны теоретические основы (например, [1, 2]), позволившие создать большое количество практических реализаций.

Предлагаемый ниже материал имеет своей целью показать, что для анализа статистических характеристик АЦП с $\Delta\Sigma$, которому, в частности, посвящены [1] и [2], может быть использована и теория идеального многоуровневого квантователя, основы которой изложены в [3—6].

Вначале будет получено «схемное» доказательство предыдущего утверждения, а затем и соответствующие аналитические соотношения.

1. Эквивалентные преобразования функциональных схем. На рисунке, $a-d$ представлено четыре варианта одной и той же схемы $\Delta\Sigma$ первого порядка. Эти схемы эволюционируют от базовой схемы прибора с $\Delta\Sigma$ до идеального квантователя (шаг квантования $q = u\Delta$, u — квант $\Delta\Sigma$, Δ —



интервал дискретизации по времени), на вход которого подается интеграл от измеряемой величины x , а на выходе вычисляется первая конечная разность на интервале дискретизации Δ . Последняя схема, на наш взгляд, полностью адекватна базовой схеме $\Delta\Sigma\text{М}$ при уровне идеализации, используемом в [1] и [2].

2. Стационарный случайный сигнал на входе $\Delta\Sigma\text{М}$. Исходя из схемы рисунка, d шум преобразователя на входе восстанавливающего фильтра $W_y(\omega)$

$$n(t) = (\xi(t) - \xi(t - \Delta))/\Delta, \quad (2.1)$$

где $\xi(t)$ — ошибка квантования идеального квантователя [3]:

$$\xi(t) = \frac{q}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \left(2\pi k \int_0^t x(\Theta) d\Theta / q \right). \quad (2.2)$$

Корреляционная функция шума преобразователя в соответствии с (2.1)

$$R_n(\tau) = [2R_\xi(\tau) - R_\xi(\tau + \Delta) - R_\xi(\tau - \Delta)]/\Delta^2, \quad (2.3)$$

где $R_\xi(\tau)$ — корреляционная функция шума квантования.

Выполняя преобразования Фурье от (2.3), получим спектр мощности шума преобразования

$$S_n(\omega) = ((\sin 0,5\omega\Delta)/0,5\Delta)^2 S_\xi(\omega). \quad (2.4)$$

Спектральная плотность ошибки квантования $S_\xi(\omega)$ известна из [5]*:

$$S_\xi(\omega) = \frac{q^3}{4\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} f_x \left(\frac{\omega q}{2\pi k} \right), \quad (2.5)$$

где $f_x(z)$ — одномерная плотность вероятности измеряемого стационарного случайного сигнала $x(t)$.

Из (2.4) и (2.5) получается окончательное выражение для усредненной по шкале прибора спектральной плотности шума $\Delta\Sigma\text{М}$ преобразователя:

$$S_n(\omega) = ((\sin 0,5\omega\Delta)/0,5\Delta)^2 \frac{q^3}{4\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} f_x \left(\frac{\omega q}{2\pi k} \right). \quad (2.6)$$

Если учесть операцию дискретизации шума по времени с шагом Δ , то

$$S_n(\omega, \Delta) = ((\sin 0,5\omega\Delta)/0,5\Delta)^2 S_\xi(\omega, \Delta), \quad (2.7)$$

где

$$S_\xi(\omega, \Delta) = \frac{q^3}{4\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sum_m f_x \left(\frac{\omega q}{2\pi k} + \frac{m q}{k \Delta} \right). \quad (2.8)$$

Из (2.5) следует, что для равномерной плотности вероятности сигнала спектр мощности $S_\xi(\omega, \Delta)$ сплошной и равномерный. Если плотность вероятности сигнала $f_x(z)$ достаточно «гладкая», а спектр мощности сигнала $S_x(\omega)$ сосредоточен в полосе частот $|\omega| < \omega_{\max}$, такой что $\pi/\omega_{\max}\Delta \gg 1$, то в качестве оценки для спектральной плотности преобразователя можно использовать

$$S_n(\omega, \Delta) = ((\sin 0,5\omega\Delta)/0,5\Delta)^2 S_\xi(0, \Delta), \quad (2.9)$$

* Производная от сигнала на выходе интегратора совпадает с сигналом на его входе. В (2.5) функция $f_x(z)$ четная, в общем случае вместо $f_x(z)$ в (2.5) следует подставить $(f_x(z) + f_x(-z))/2$.

где

$$S_{\xi}(0, \Delta) = \frac{q^3}{4\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sum_m f_x\left(\frac{m}{k} \frac{q}{\Delta}\right), \quad (2.10)$$

и считать спектр шума квантования *равномерным* с интенсивностью $S_{\xi}(0, \Delta)$.

В соответствии с (2.9) дисперсия ошибки после прохождения восстанавливающего фильтра $W_y(\omega)$ равна

$$\varepsilon^2 = S_{\xi}(0, \Delta) 2 \int_0^{\infty} ((\sin 0,5\omega\Delta)/0,5\Delta)^2 |W_y(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.11)$$

Отметим, что это соотношение является одним из видов записи — закона «трех вторых» [1], если квадрат модуля частотной характеристики восстанавливающего фильтра убывает достаточно быстро.

3. Постоянный сигнал на входе $\Delta\Sigma\text{М}$. Покажем, как с помощью простых и прозрачных преобразований выявляется тонкая структура шума, если воспользоваться соотношениями (1) из [5] и (2.3). Так как в рассматриваемом случае

$$\int_0^t x(\Theta) d\Theta = xt, \quad (3.1)$$

то*

$$R_n(\tau, x) = 2 \frac{u^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin^2(\pi kx/u) \cos(2\pi kx\tau/q), \quad (3.2)$$

а спектр мощности**

$$S_n(\omega, x) = \frac{u^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin^2(\pi kx/u) [\delta(\omega + 2\pi kx/q) + \delta(\omega - 2\pi kx/q)]. \quad (3.3)$$

Учтем операцию дискретизации по времени. Тогда

$$S_n(\omega, x, \Delta) = \frac{u^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin^2(\pi kx/u) \times \\ \times \sum_m [\delta(\omega + 2\pi kx/q + 2\pi m/\Delta) + \delta(\omega - 2\pi kx/q + 2\pi m/\Delta)]. \quad (3.4)$$

После этого легко вычисляется средний квадрат погрешности как функция от измеряемой величины x :

$$\varepsilon^2(x) = 2 \frac{u^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin^2(\pi kx/u) \sum_m \left| W_y\left(\frac{2\pi}{\Delta} (m + kx/u)\right) \right|^2. \quad (3.5)$$

Это соотношение совпадает с формулой (6.2) из [2].

* Заметим, что к этому же результату можно прийти, используя (2.1) и (2.2), вычислив корреляционную функцию величины (2.1) и применив операцию усреднения по времени.

** Усредняя (3.3) по x с весом $f_x(x)$, немедленно получим (2.6). Для фиксированного значения сигнала спектр мощности линейчатый.

Очевидно, что из-за коммутативности использованных при вычислениях операций

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2(x) f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega, \Delta) |W_y(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.6)$$

Усреднение (3.2) по шкале дает усредненную корреляционную функцию шума

$$R_n(\tau) = \frac{u^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin^2(\pi k x / u) (\tilde{f}_x(2\pi k \tau / q) + f_x(-2\pi k \tau / q)), \quad (3.7)$$

где $\tilde{f}_x(z)$ — характеристическая функция измеряемого сигнала.

Из изложенного выше следует, что основные результаты, связанные с оценкой точности АЦП с $\Delta\Sigma$ первого порядка, вытекают из теории идеального многоуровневого квантователя [3—5], при этом соотношения для усредненных по шкале прибора характеристик погрешности измерения определяются немедленно из [5], а для выявления поведения этих характеристик по шкале прибора требуются незначительные усилия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Candy J. C., Benjamin O. Y. The structure of quantization noise from sigma-delta modulation // IEEE Trans. Commun. 1981. 29, N 9.
2. Gray R. M. Spectral analysis of quantization noise in a single-loop sigma-delta modulator with dc input // IEEE Trans. Commun. 1989. 37, N 6.
3. Bennet W. F. Spectra of quantized signals // Bell Syst. Techn. J. 1948. 27, N 3.
4. Ефимов В. М. Квантование по времени при измерении и контроле. М.: Энергия, 1969.
5. Ефимов В. М. Оценка для спектральной плотности шума квантования по уровню // Автометрия. 1970. № 1.
6. Ефимов В. М., Касперович А. Н., Литвинов Н. В. Статистические характеристики ошибки аналого-цифрового преобразователя с цифровой коррекцией дрейфа // Труды симп. «Проблемы создания преобразователей формы информации». Киев, 1970.

Поступила в редакцию 26 января 1995 г.