

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.3.019 : 519.2

В. С. Киричук, В. П. Косых

(Новосибирск)

АЛГОРИТМ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ, ОСНОВАННЫЙ
НА СТРУКТУРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

На основе представления квантованного дискретизованного изображения в виде взвешенной суммы характеристических функций проанализированы искажения, вызываемые воздействием случайной помехи с заданным амплитудным распределением. Предложен алгоритм подавления помехи, вероятностные характеристики которого слабо зависят от функции распределения помехи, не уступающий по эффективности классическим алгоритмам фильтрации. Алгоритм реализован с применением операций математической морфологии.

При обработке цифровых изображений (дискретизованных по координатам и квантованных по амплитуде) корректное применение статистических методов оценивания (например, метода максимального правдоподобия) требует, как правило, выполнения нелинейных, практически не реализуемых процедур. В этих случаях предполагается либо возможность перехода к непрерывному представлению, либо допустимость асимптотического разложения выбранного критерия качества [1. С. 540]. Альтернативный подход состоит в построении эвристических нелинейных алгоритмов [2. С. 35], однако количественная оценка их эффективности представляет собой достаточно сложную задачу. В работе рассматривается один из таких алгоритмов, основанный на структурном представлении изображений, и проводится анализ его эффективности.

Модель дискретного квантованного изображения. Пусть $f(x)$ — квантованное на $n + 1$ уровней изображение, заданное на дискретном прямоугольном растре W и подчиняющееся дискретному распределению вероятностей $\Pi_l = P\{f = l\}$, а $x = (i, j) \in W$ — точка этого раstra с координатами (i, j) . Представим $f(x)$ в виде взвешенной суммы характеристических функций $u_l(x)$:

$$f(x) = \sum_{l=0}^n l u_l(x), \quad (1)$$

$$u_l(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_l, \\ 0, & x \in A_l^c, \end{cases}$$

где $A_l = \{x : f(x) = l\}$ — характеристическое множество. Очевидно, что

$$A_l \cap A_k = \emptyset \quad \text{при } l \neq k. \quad (2)$$

Определим множества $X_l = \{x : f(x) \geq l\}$, которые связаны с характеристическими множествами соотношением

$$X_l = \bigcup_{k=l}^n A_k. \quad (3)$$

В силу (2)

$$A_l = X_l \setminus X_{l+1}. \quad (4)$$

В общем случае X_l является совокупностью односвязных замкнутых областей (рис. 1, а):

$$X_l = \bigcup_m X_{lm}.$$

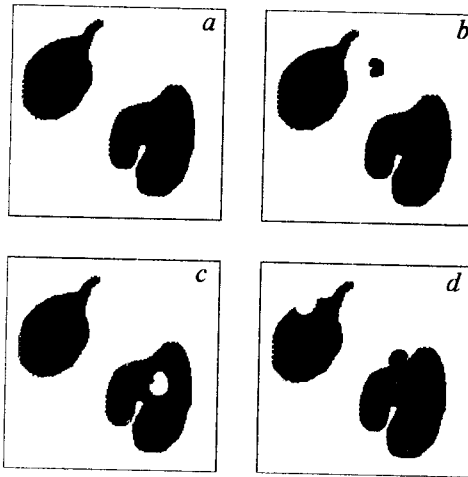


Рис. 1

Условие. Будем считать, что каждая замкнутая область X_{lm} содержит хотя бы одну точку, окруженную r слоями соседей.

В процессе регистрации на изображение накладывается аддитивный шум $\xi(x)$:

$$f_m(x) = f(x) + \xi(x) = \sum_{l=0}^n l u_{lm}(x), \quad (5)$$

что приводит к искажению характеристических множеств $A_l \rightarrow A_{lm}$ и соответственно множеств $X_l \rightarrow X_{lm}$ и характеристических функций $u_l \rightarrow u_{lm}$.

Предположим, что шум подчиняется дискретному распределению

$$p_m = P\{\xi(x) = m\}, \quad M_1 \leq m \leq M_2. \quad (6)$$

Тогда с вероятностью $v_0 = 1 - p_0$ точка уходит из множества A_l , а с вероятностью $v_l = \sum_{k \neq l} p_k p_{k-l}$ в A_l появляется новая точка. Соответственно вероятность ухода точек из X_l есть

$$\eta_0 = \sum_{k=l}^n \sum_{i=0}^{l-1} p_k p_{i-k}, \quad (7)$$

а вероятность прихода точек в X_l равна

$$\eta_l = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{i=l}^n p_k p_{i-k}. \quad (8)$$

Таким образом, воздействие шума на изображение $f(x)$ заключается в изменении множеств X_l . Возможны следующие ситуации:

- в X_l появляется новая область (рис. 1, b);
- в X_l появляется полость (рис. 1, c);
- искажается граница X_l , в частности, может измениться связность исходного множества X (рис. 1, d).

Алгоритм фильтрации. Для коррекции искажений, вносимых шумом в X_l , воспользуемся морфологическими операциями, описанными в [3]. Согласно [3], введем структурный элемент B , представляющий собой множество, один из элементов которого выделен в качестве начала. Обозначим через B_x

структурный элемент, начало которого помещено в точку x растра W . Тогда операцией эрозии (erosion) множества X посредством структурного элемента B называется операция, удовлетворяющая соотношению

$$Y = X \ominus B = \{x : B_x \in X\}.$$

Двойственная эрозии операция дилатации (dilation) определяется как

$$Y = X \oplus B = \{x : B_x \cap X \neq \emptyset\}.$$

Для двух множеств X_1 и X_2 и структурного элемента B определяются операции последовательной условной эрозии

$$Y = X_1 \ominus \{B\}; \quad X_2 = [([([X_1 \ominus B] \cup X_2] \ominus B) \cup X_2] \dots \ominus B) \cup X_2]$$

и последовательной условной дилатации

$$Y = X_1 \oplus \{B\}; \quad X_2 = [([([X_1 \oplus B] \cap X_2] \oplus B) \cap X_2] \dots \oplus B) \cap X_2],$$

в которых количество повторений определяется получением устойчивого результата.

В качестве структурного элемента B возьмем заданное на растре W множество, содержащее точку (начало), окруженную восьмью ее ближайшими соседями. Выполнив таким структурным элементом r -кратную эрозию множества $X_{\text{ш}}$:

$$Y_i = X_{\text{ш}} \ominus rB = \underbrace{(((X_{\text{ш}} \ominus B) \ominus B) \ominus \dots B)}_{r \text{ раз}},$$

удалим все области $X_{\text{ш}}$, не содержащие ни одной точки, имеющей более r полных слоев соседей. Согласно условию, таких областей не может быть на неискаженном изображении, следовательно, они обусловлены воздействием шума. Однако этой операцией будут искажены и остальные области $X_{\text{ш}}$. Восстановить их можно с помощью операции

$$Z_i = Y_i \oplus \{B\}; \quad X_{\text{ш}}.$$

Нетрудно убедиться, что алгоритм, состоящий из следующих шагов:

- 1) $Y_i = X_{\text{ш}} \ominus rB$,
 - 2) $Z_i = Y_i \oplus \{B\}; \quad X_{\text{ш}}$,
 - 3) $V_i = Z_i \oplus rB$,
 - 4) $X_{\text{ш}} = V_i \ominus \{B\}; \quad Z_i$,
- (9)

позволяет удалить из множества $X_{\text{ш}}$ все искажения, проявившиеся в виде новых изолированных областей или полостей, не содержащих ни одной точки, имеющей более r полных слоев соседей.

Применяя эту процедуру последовательно для всех значений l , можно получить все X_{lc} и, учитывая (4), A_{lc} и соответственно $u_{lc}(x)$. Тогда

$$f_c(x) = \sum_{l=0}^n l u_{lc}(x) \quad (10)$$

будет представлять собой фильтрованное изображение.

Реализация такой фильтрации не требует обязательного разложения изображения в суперпозицию характеристических функций, которое использовано здесь с целью пояснения механизма воздействия шума. В [3] определены морфологические операции над функциями, применение которых позволяет выполнить фильтрацию непосредственно исходного изображения:

эрозия функции $f(x)$ структурным элементом B

$$g(x) = f(x) \ominus B = \inf\{f(y) : y \in B_x\};$$

дилатация

$$g(x) = f(x) \oplus B = \sup\{f(y) : y \in B_x\};$$

последовательная условная эрозия функции $f(x)$ структурным элементом B при функции $h(x)$

$$g(x) = f(x) \ominus \{B\} \mid h(x) = \max[\dots \max[\max[f(x) \ominus B, h(x)] \ominus B, h(x)]];$$

последовательная условная дилатация

$$g(x) = f(x) \oplus \{B\} \mid h(x) = \min[\dots \min[\min[f(x) \oplus B, h(x)] \oplus B, h(x)]];$$

где количество повторений определяется получением устойчивого результата. (Здесь $\max(a, b)$ и $\min(a, b)$ обозначают соответственно максимальное и минимальное значения из пары (a, b) .)

Там же показано, что морфологические операции над функциями сводятся к последовательности соответствующих морфологических операций над множествами, построенными согласно (3).

Тогда алгоритм фильтрации (9) может быть представлен в виде следующей последовательности операций:

$$\begin{aligned} 1) \quad g_1(x) &= f_m(x) \ominus rB, \\ 2) \quad g_2(x) &= g_1(x) \oplus \{B\} \mid f_m(x), \\ 3) \quad g_3(x) &= g_2(x) \oplus rB, \\ 4) \quad f_c(x) &= g_3(x) \ominus \{B\} \mid g_2(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Следует отметить, что прототипом данного алгоритма послужил рассмотренный в [3. Р. 474—476] алгоритм чистки изображений, который может быть представлен в виде

$$f_c(x) = [f_m(x) \ominus rB] \oplus rB + [f_m(x) \oplus rB] \ominus rB - f_m(x). \quad (12)$$

Отличие (11) от (12) состоит в том, что последний помимо локальных выбросов подавляет узкие «каналы» и «хребты», тогда как первый сохраняет

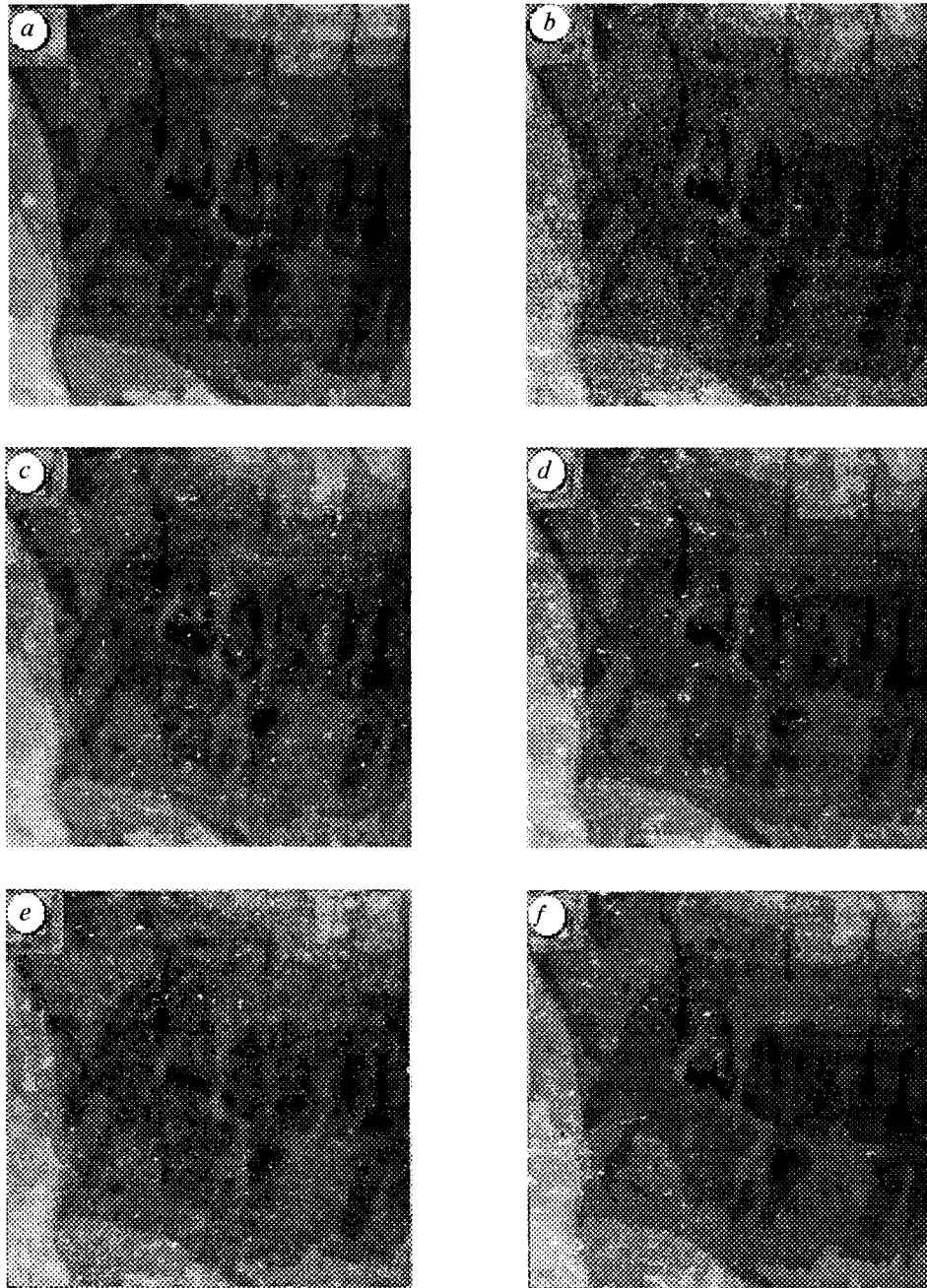


Рис. 2

такие детали, если они являются продолжениями более крупных образований на изображении. Для сравнения с известными фильтрами на рис. 2 приведены результаты фильтрации одного и того же изображения (рис. 2, *b*) линейным фильтром типа «скользящее среднее» с размером окна 3×3 (рис. 2, *c*), медианным фильтром с окном 3×3 (рис. 2, *d*) и фильтрами (1) и (12) с $r = 1$, что эквивалентно окну того же размера (рис. 2, *e, f* соответственно). На рис. 2, *a* показано исходное изображение без шума. Среднеквадратичное отклонение σ от незашумленного изображения составляет 12,35; 9,08; 6,57; 13,10 и 6,66 для рис. 2, *b—f* соответственно.

Анализ ошибок. Из рис. 1 и описания алгоритма следует, что неустранимые ошибки возникают по двум причинам:

а) образование в X_i областей и полостей, содержащих хотя бы одну точку, окруженную более чем r слоями соседей;

б) приход и уход точек на границах областей X_{im} .

Для анализа ошибок вида «а» необходимо оценить вероятности возникновения шумовых образований. Используя теорию серий успехов [4. С. 321—326], можно показать, что распределение числа N_s образований заданной конфигурации, содержащих S точек, на поле из N точек (в пренебрежении граничными эффектами) асимптотически стремится к нормальному распределению:

$$N_s \in N(N/v, N\sigma^3/v), \quad (13)$$

где

$$v = (1 - \eta^r) / [(1 - \eta)\eta^r];$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{[(1 - \eta)\eta^r]^2} - \frac{2S + 1}{(1 - \eta)\eta^r} - \frac{\eta}{(1 - \eta)^2},$$

причем в это число входят и образования других конфигураций, покрывающих заданную. Ошибкам вида «а» соответствуют образования, покрывающие квадрат площадью $(2r + 1)^2$. Следовательно, среднее число неустранимых областей равно N_1/v при $\eta = \eta_1$, а неустранимых полостей — соответственно N_2/v при $\eta = \eta_0$, где N_1 — число мест возможного расположения полостей внутри X_i , а N_2 — число мест возможного расположения областей вне X_i . Оценки N_1 и N_2 в конкретной реализации можно получить, выполнив эрозию множества X_i и его дополнения структурным элементом соответствующего размера. Тогда среднее число неустранимых полостей составит $N_{s1} = N_1/v(\eta_0)$, а неустранимых областей — $N_{s2} = N_2/v(\eta_1)$.

В качестве примера вычислим среднее число неустранимых искажений для $\eta_1 = \eta_0 = 0,25$ (вероятность того, что точка останется на данном уровне, равна 0,5, а вероятности прихода на уровень и ухода из него одинаковы и составляют 0,25) при $r = 1$ ($S = 9$). В этом случае $v(\eta_1) = v(\eta_0) \approx 3 \times 10^5$. Для изображения, состоящего из $N \approx 10^6$ точек при $N_1 + N_2 \approx N$ среднее число неустранимых искажений вида «а» составит

$$N_{s1} + N_{s2} \approx 10^6 / (3 \times 10^5) \approx 3,$$

т. е. такие искажения представляют собой чрезвычайно редкие события. На рис. 3, а приведено модельное зашумленное изображение ($N \approx 4 \times 10^4$, $\sigma = 23,1$, разница между уровнями внешнего и внутреннего квадратов равна 16), на рис. 3, б—д — результаты применения соответственно медианного фильтра ($\sigma = 4,3$), фильтра (11) ($\sigma = 18,5$) и фильтра (12) ($\sigma = 1,5$). Хорошо видно, что на участках с постоянным значением сигнала фильтром (12) помехи подавлены полностью.

К сожалению, авторам не удалось вычислить вероятности искажений границ. Простейшие

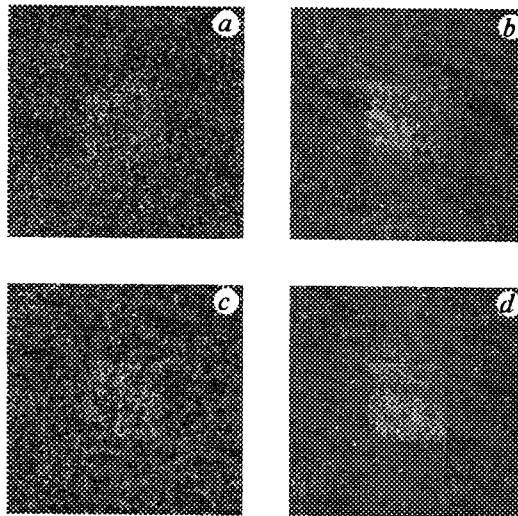


Рис. 3

качественные соображения состоят в том, что в силу линейной зависимости параметров распределения (13) от N вероятность возникновения граничных искажений уменьшается с уменьшением длины границы множества X_l .

Таким образом, предлагаемый алгоритм фильтрации обеспечивает уверенное подавление шума при сохранении мелких деталей, представляющих собой «отростки» крупных образований, слабо зависит от формы распределения шума (вероятностные свойства алгоритма определяются только двумя интегральными характеристиками распределения η_0 и η_l) и не уступает по эффективности классическим алгоритмам фильтрации. Наиболее эффективная область его применения — подавление мощной помехи на достаточно простых изображениях, содержащих крупные области постоянной яркости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
2. Адаптивные методы обработки изображений /Под ред. В. И. Сифорова, Л. П. Ярославского. М.: Наука, 1988.
3. Serra J. Image analysis and mathematical morphology. L.: Academic Press, 1982.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1967.

Поступила в редакцию 29 мая 1995 г.

Реклама продукции в нашем журнале — залог Вашего успеха!