

УДК 681.2.08

В. М. Ефимов, А. Н. Касперович

(Новосибирск)

ОПТИМИЗАЦИЯ ДЕЦИМИРУЮЩЕГО ФИЛЬТРА В АЦП
С ДЕЛЬТА—СИГМА-МОДУЛЯЦИЕЙ

Исследуются три варианта построения децимирующего КИХ-фильтра, минимизирующего суммарную дисперсию ошибки АЦП с дельта—сигма-модуляцией. Даются численные оценки погрешности. Рассматриваются некоторые особенности многошаговой децимации.

Введение. Одним из главных вопросов при построении АЦП, основанных на дельта—сигма-модуляции ($\Delta\Sigma$), является расчет и проектирование оконечных фильтров, формирующих из битового высокочастотного потока данных $\Delta\Sigma$ многоразрядные отсчеты и позволяющих осуществлять децимацию (прореживание последовательности) этих отсчетов до частоты Найквиста. Этот вопрос имеет как теоретическое значение (например, для определения предельных возможностей, оценки потенциальной точности), так и прикладное (поскольку из-за ограниченности производительности таких фильтров осуществить одношаговую децимацию часто затруднительно и приходится понижать частоту дискретизации последовательно несколько раз — выполнять многошаговую децимацию). Это, в частности, обусловило разработку теории многошаговой децимации в АЦП с $\Delta\Sigma$ [1].

При практической реализации подобных фильтров неизбежно возникают дополнительные ошибки, которых не было бы в случае децимации с помощью идеального ФНЧ. Ниже изучается структура децимирующего фильтра с импульсной характеристикой конечной длительности, минимизирующего суммарную дисперсию ошибки преобразования при децимации; на основе этих исследований рассматривается многошаговая децимация.

1. Фильтр с импульсной характеристикой неограниченной длины. **Потенциальная точность.** Рассмотрим суммарную погрешность измерения АЦП с $\Delta\Sigma$ первого порядка стационарного сигнала $x(t)$ со спектром $S_x(\omega)$, ограниченным частотой $\omega_{\max} = \pi/\Delta_{\max}$. Если сигнал и погрешность не коррелированы, то дисперсия погрешности определяется очевидным соотношением (см. [2] и рис. 1):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\Sigma}^2(T) = \varepsilon_x^2(T) + \varepsilon_n^2(T) = & \int_{-\pi/\Delta_{\max}}^{+\pi/\Delta_{\max}} S_x(\omega) \left| 1 - W_x(\omega)W_y(\omega, T) \right|^2 d\omega + \\ & + \int_{-\pi/\Delta}^{+\pi/\Delta} S_n(\omega, \Delta) \left| W_y(\omega, T) \right|^2 d\omega, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $T = N\Delta$ — длина импульсной характеристики фильтра.

Спектральная плотность шума

$$S_n(\omega, \Delta) = ((\sin 0,5\omega\Delta)/0,5\Delta)^2 S_{\xi}(\omega, \Delta), \quad (1.2)$$

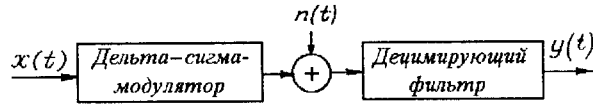


Рис. 1

где

$$S_{\xi}(\omega, \Delta) = \sum_k S_{\xi}(\omega - 2\pi k/\Delta) \quad (1.3)$$

— спектральная плотность шума квантования сигнала на выходе фильтра W_x после операции дискретизации по времени с шагом Δ [3]. Здесь первое слагаемое $\varepsilon_x^2(T)$ учитывает линейные искажения непосредственно сигнала $x(t)$, а второе слагаемое $\varepsilon_n^2(T)$ является дисперсией ошибки измерения, обусловленной шумами квантования.

В (1.1) фильтр

$$W_x(\omega) = (\sin 0,5\omega\Delta)/0,5\omega\Delta, \quad (1.4)$$

а

$$W_y(\omega, T) = \exp[-i(N+1)\omega\Delta/2] \sum_{k=1}^N \tilde{W}_{y,k} \exp[i\omega k\Delta] \quad (1.5)$$

— амплитудно-частотная характеристика КИХ-фильтра с коэффициентами $\tilde{W}_{y,k}$.

Если длина импульсной характеристики фильтра T неограниченно увеличивается, то суммарная дисперсия ошибки $\varepsilon_{\Sigma}^2(\infty)$ минимизируется, когда (см. [2])

$$W_y(\omega, \infty) = S_x(\omega)W_x(\omega) / [S_x(\omega)W_x^2(\omega) + S_n(\omega, \Delta)]. \quad (1.6)$$

Если при этом спектральная плотность сигнала постоянна в полосе $|\omega| < \omega_{\max}$:

$$S_x(\omega) = \sigma_x^2 \frac{1}{2\omega_{\max}} [\omega_{\max} - |\omega|], \quad (1.7)$$

а спектр мощности шума квантования в полосе $|\omega| < \omega_{\max}$ определяется его значением при $\omega = 0$, то

$$W_y(\omega, \infty) = \frac{1[\omega_{\max} - |\omega|]}{W_x(\omega)(1 + 2\omega^2 S_{\xi}(0, \Delta)\omega_{\max}^2/\sigma_x^2)}. \quad (1.8)$$

Оптимальный фильтр в этом случае включает в себя идеальный ФНЧ.

Суммарная дисперсия ошибки при использовании такого фильтра [2]

$$\varepsilon_{\Sigma}^2(\infty) = \sigma_x^2 \left[1 - (1/\mu) \operatorname{arctg} \mu \right], \quad (1.9)$$

где

$$\mu = \sqrt{2S_{\xi}(0, \Delta)\omega_{\max}^3/\sigma_x^2}. \quad (1.10)$$

При высокой передискретизации ($\mu \rightarrow 0$), оставляя в (1.9) два первых члена разложения $\operatorname{arctg} \mu$ в ряд по степеням μ , получим «закон трех вторых» [3, 4]:

$$\varepsilon_{\Sigma}^2(\infty) \leq (2/3)S_{\xi}(0, \Delta)\omega_{\max}^3. \quad (1.11)$$

Соотношения (1.9) и (1.11) характеризуют предельно достижимую точность в приборах с $\Delta\Sigma$ М первого порядка, так как фильтр (амплитудно-частотная характеристика которого определяется соотношением (1.8)) физически нереализуем.

2. Фильтр с характеристикой конечной длины. Одношаговая децимация. Минимизация (1.1) при конечной длине $T = N\Delta$ импульсной характеристики фильтра $W_y(\omega, T)$, когда

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^2(T) = \sigma_x^2 \left\{ 1 - 2 \sum_{k=1}^N \tilde{W}_{y,k} \frac{\sin[\pi(k - (N+1)/2)/p]}{\pi(k - (N+1)/2)/p} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^N \tilde{W}_{y,k}^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^N \sum_{m=1}^N \tilde{W}_{y,k} \tilde{W}_{y,m} \frac{\sin[\pi(k-m)/p]}{\pi(k-m)/p} \right\}, \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_n^2(T) \approx \frac{2S_{\xi}(0, \Delta)}{\Delta^2} \left\{ \sum_{k=1}^N \tilde{W}_{y,k}^2 - \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{W}_{y,k} \tilde{W}_{y,k+1} \right\}, \quad (2.2)$$

где $p = \Delta_{\max}/\Delta$ — коэффициент передискретизации, связана с решением системы из N линейных уравнений для весовых коэффициентов фильтра $\tilde{W}_{y,k}$:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{y,k} \left(\sigma_x^2 + \frac{2S_{\xi}(0, \Delta)}{\Delta^2} \right) + \sigma_x^2 \sum_{m=1}^N \tilde{W}_{y,m} \frac{\sin[\pi(k-m)/p]}{\pi(k-m)/p} - \\ - \frac{S_{\xi}(0, \Delta)}{\Delta^2} (\tilde{W}_{y,k+1} + \tilde{W}_{y,k-1}) = \frac{\sin[\pi(k - (N+1)/2)/p]}{\pi(k - (N+1)/2)/p}, \quad (2.3) \end{aligned}$$

где $k = 1, \dots, N$; $\tilde{W}_{y,0} = \tilde{W}_{y,N+1} = 0$.

Реализация этого решения при больших значениях N представляется достаточно проблематичной и, по-видимому, возможна только численными методами. При этом основные сложности вносятся вторым слагаемым (2.3), т. е. первой составляющей дисперсии ошибки в (1.1). В то же время решение задачи минимизации второй составляющей дисперсии ошибки связано с обращением трехдиагональной симметрической матрицы размером $N \times N$ с одинаковыми коэффициентами на каждой из диагоналей. Аналитическое обращение такой матрицы рассмотрено, например, в [5]. Поэтому целесообразно несколько видоизменить исходную постановку задачи и искать коэффициенты фильтра $\tilde{W}_{y,k}$, минимизируя шумовую составляющую дисперсии при дополнительных линейных связях, накладываемых на искомые коэффициенты:

$$\min_{\{\tilde{W}_{y,k}\}} \left[\frac{2S_{\xi}(0, \Delta)}{\Delta^2} \left\{ \sum_{k=1}^N \tilde{W}_{y,k}^2 - \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{W}_{y,k} \tilde{W}_{y,k+1} \right\} + \sum_{r=1}^R \lambda_r \sum_{k=1}^N \tilde{W}_{y,k} C_{rk} \right], \quad (2.4)$$

где λ_r — множитель Лагранжа.

С помощью дополнительных условий можно управлять размером дисперсии первой составляющей ошибки, потребовав, например, чтобы в полосе

частот $|\omega| \leq \omega_{\max}$ частотная характеристика фильтра (1.5) принимала на заданных заранее частотах ω_r определенные значения v_r ($r = 1, \dots, R$).

Это упрощенное решение распадается на два этапа. Вначале численными методами решается система из малого числа уравнений для определения множителей Лагранжа:

$$\sum_{m=1}^R \lambda_m \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^N C_{mp} C_{rk} a(p, k) / a(N) = v_r, \quad (r = 1, \dots, R), \quad (2.5)$$

затем определяются искомые коэффициенты фильтра по формуле

$$\tilde{W}_{y,k} = \sum_{m=1}^N C_m a(m, k) / a(N), \quad (2.6)$$

где

$$C_m = \sum_{r=1}^R \lambda_r C_{rm}. \quad (2.7)$$

В (2.5) и (2.6) величины $a(i, j)$ и $a(N)$ — соответственно минор и определитель трехдиагональной симметрической матрицы системы N уравнений:

$$2\tilde{W}_{y,k} - \tilde{W}_{y,k+1} - \tilde{W}_{y,k-1} + \sum_{r=1}^R \lambda_r C_{kr} = 0, \quad (2.8)$$

где $k = 1, \dots, N$; $\tilde{W}_{y,0} = \tilde{W}_{y,N+1} = 0$.

В рассматриваемом случае (см., например, [5])

$$a(i, j) = \begin{cases} (-1)^{i-j} j(N+1-i), & j \leq i; \\ (-1)^{i-j} i(N+1-j), & j \geq i; \\ a(N) = N+1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Отметим, что в [6] использован этот же метод при условии отсутствия искажений сигнала на нулевой частоте:

$$\sum_{k=1}^N \tilde{W}_{y,k} = 1. \quad (2.10)$$

Такой полуаналитический метод существенно сокращает вычисления, необходимые для определения коэффициентов фильтра $\tilde{W}_{y,k}$.

Рассмотрим далее еще более утилитарный подход, позволяющий при определенных условиях резко уменьшить число искомых величин, определяющих частотную характеристику фильтра W_y , и тем не менее сохранить возможность оценки дисперсии линейных искажений сигнала $\varepsilon_x^2(T)$. Этот подход заключается в том, что весовая характеристика, заданная на конечном промежутке, представляется рядом Фурье*:

$$\tilde{W}_y(k, T) = \left(C_0 + \sum_{m=1}^{N/2} 2C_m \cos m\pi \frac{2k-1}{N} \right) / N, \quad |2k-1| \leq N-1; \quad (2.11)$$

* Весовая функция фильтра $W_y(\omega, T)$ четная.

$$W_y(\omega, T) = C_0 \frac{\sin N\omega\Delta/2}{N\sin\omega\Delta/2} + \sum_{m=1}^{N/2-1} C_m \left[\frac{\sin(N\omega\Delta/2 + m\pi)}{N\sin(\omega\Delta/2 + m\pi/N)} + \frac{\sin(N\omega\Delta/2 - m\pi)}{N\sin(\omega\Delta/2 - m\pi/N)} \right]. \quad (2.12)$$

Отметим, что наиболее удобно использовать фильтр с частотной характеристикой (2.12), если число отсчетов кратно удвоенному коэффициенту передискретизации, т. е.

$$N = s2\Delta_{\max}/\Delta = 2sp, \quad (2.13)$$

где s — целое.

Качество фильтра с частотной характеристикой (2.12) можно приблизительно оценить, имея в виду его аналоговый вариант ($N\sin\omega\Delta/2 \approx N\omega\Delta/2$). Положим, что спектральная плотность сигнала определяется соотношением (1.7). Тогда, как следует из (1.1), частотная характеристика в полосе частот $|\omega| < \omega_{\max}$ должна быть как можно ближе к единице, а вне пределов этой полосы — достаточно быстро убывать*.

Из теории интеграла Фурье следует, что для рассматриваемого случая условием убывания частотной характеристики со скоростью, пропорциональной $1/\omega^3$, является равенство

$$1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m C_m = 0. \quad (2.14)$$

Для убывания частотной характеристики со скоростью $1/\omega^5$ нужно, чтобы выполнялось еще одно равенство

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m^2 C_m^2 = 0 \quad (2.15)$$

и т. д.

Анализ (1.1) показывает, что достаточно хорошим первым приближением для $W_y(\omega, T)$ является частотная характеристика, для которой $C_0 = 1$ и s первых коэффициентов C_m в (2.12) равны 1, а два следующих коэффициента выбираются таким образом, чтобы обеспечить необходимую скорость убывания частотной характеристики фильтра для подавления шума и выравнивания частотной характеристики в полосе существования полезного сигнала. Общее число гармоник в (2.11) при этом равно $s + 2$. Скорость убывания частотной характеристики, как отмечалось выше, связана с дифференцируемостью весовой функции. Поэтому, если значения двух последних коэффициентов связать условием

$$1 - 2C_{s+1} + 2C_{s+2} \approx 0, \quad (2.16)$$

то частотная характеристика $W_y(\omega, T)$ при $|\omega| \gg \omega_{\max}$ убывает обратно пропорционально третьей степени частоты, что обеспечивает выполнение «закона трех вторых».

Второе уравнение, связывающее коэффициенты из (2.16), получается из условия минимума среднего квадрата ошибки искажения сигнала в полосе частот $|\omega| < \omega_{\max}$. Эта ошибка при постоянной спектральной плотности сигнала

* Искажения, вносимые фильтром $W_x(\omega)$, легко учесть.

ла в данной полосе пропорциональна среднему квадрату отклонения частотной характеристики $W_y(\omega, T)$ от единицы в полосе частот:

$$\min_{\{C_k\}} \varepsilon_x^2(T) = \sigma_x^2 \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} [1 - W_y(\omega, T)]^2 d\omega / 2\omega_{\max}. \quad (2.17)$$

С использованием всего вышеизложенного были проведены ориентировочные расчеты, в соответствии с которыми составляющая дисперсии шума*

$$\varepsilon_n^2(s) / \varepsilon_\Sigma^2(\infty) \approx 1 + (3/2 + 3C_{s+1}^2 + 3C_{s+2}^2) / s + (1 + 6C_{s+1}^2 + 12C_{s+2}^2) / s^2 + (1/4 + (7/2)C_{s+1}^2 + (25/2)C_{s+2}^2) / s^3. \quad (2.18)$$

При изменении s от 1 до 4 оптимальная величина C_{s+1}^2 меняется в достаточно узких пределах от 0,79 до 0,75, а C_{s+2}^2 — от 0,15 до 0,13.

Подсчеты по этой формуле показывают, что потери, вызываемые конечностью времени наблюдения, составляют при $s = 1$ примерно 12,5 дБ, при $s = 2$ — 7,5 дБ, при $s = 3$ — 5,3 дБ, при $s = 4$ — 4 дБ.

Составляющая дисперсии, обусловленная отклонением частотной характеристики фильтра от единицы в полосе частот $|\omega| < \omega_{\max}$, оказывается пренебрежимо малой для $s = 1$ и $s = 2$ вплоть до коэффициента передискретизации, равного 512 при равномерной плотности вероятности сигнала. Для $s = 3$ и $s = 4$ наблюдаются небольшие колебания частотной характеристики, которые приводят к тому, что

$$\varepsilon_x^2(s) / \varepsilon_\Sigma^2(\infty) \approx 1, \quad (2.19)$$

если коэффициент передискретизации не превышает 256. По-видимому, эти колебания могут быть уменьшены либо небольшим отклонением коэффициентов C_k от 1 при $k \leq s$, либо путем использования числа коэффициентов, равного $(s + 3)$, для введения еще одного дополнительного условия, позволяющего подавить флуктуации частотной характеристики при $|\omega| < \omega_{\max}$, сохранив при этом скорость ее спада.

Для фильтрации ошибок при измерении постоянного сигнала близким к оптимальному оказывается фильтр, весовая характеристика которого

$$\tilde{W}_y(k, T) = (1 + \cos(\pi(2k - 1)/2N)) / N, \quad (2.20)$$

а частотная характеристика

$$W_y(\omega, T) = \frac{\sin N\omega\Delta/2}{N\sin\omega\Delta/2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(N\omega\Delta/2 + \pi)}{N\sin(\omega\Delta/2 + \pi/N)} + \frac{1}{2} \frac{\sin(N\omega\Delta/2 - \pi)}{N\sin(\omega\Delta/2 - \pi/N)}. \quad (2.21)$$

Этот фильтр также обеспечивает убывание частотной характеристики со скоростью, обратно пропорциональной третьей степени частоты. Дисперсия ошибки измерения при этом определяется соотношением

$$\varepsilon_n^2(s) / \varepsilon_\Sigma^2(\infty) \approx 4/5s^3. \quad (2.22)$$

Из (2.22) следует, что уже при $s = 1$ фильтр с частотной характеристикой (2.21), где время наблюдения определяется соотношением (2.13), превосходит идеальный фильтр нижних частот.

Приведенные в этом разделе результаты конкретных расчетов характеризуют потенциально достижимую точность при фиксированной длительности импульсной характеристики фильтра $T = N\Delta$.

* При получении (2.18) квадрат частотной характеристики аппроксимировался кусочно-линейно.

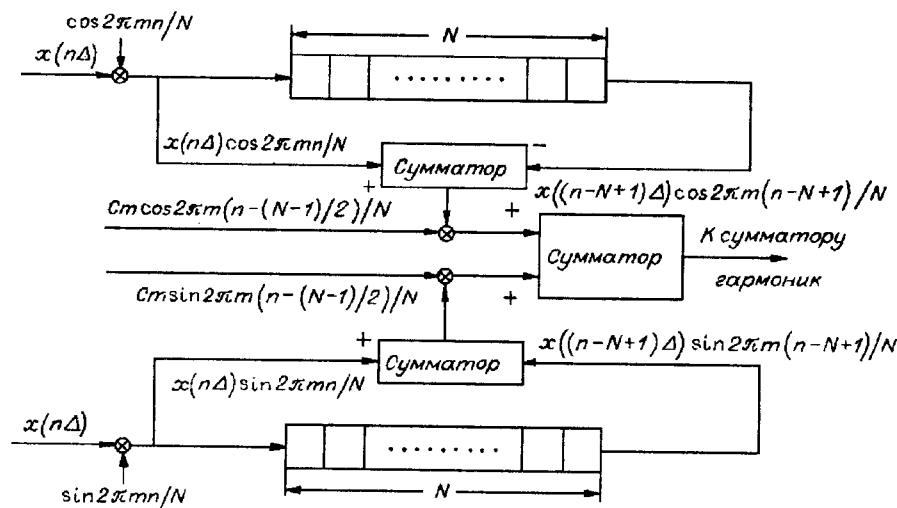


Рис. 2

Схема одного канала для m -й составляющей фильтра с импульсной характеристикой (2.11) изображена на рис. 2. Используемый здесь алгоритм позволяет осуществить вычисления рекурсивно во времени и избежать при этом накопления ошибок. Общее число умножений на один отсчет при одношаговой децимации составляет $4(s + 2)$, а сложений — $2 + 6(s + 2)$.

3. Многошаговая децимация. Рассмотренный в предыдущем разделе фильтр с частотной характеристикой (2.12) может быть при наличии соответствующих вычислительных мощностей использован при многошаговой децимации. По-видимому, наименьшим значением N при этом является число 16. Частотная характеристика такого фильтра изображена на рис. 3. Там же изображены частотные характеристики фильтров, построенные по 32 и 64 отсчетам. Из этого рисунка следует, что при коэффициенте передискретизации $p = 2^n$ децимация может быть осуществлена следующим образом: выполняется последовательно $n - 3$ операции децимации с уменьшением числа отсчетов в 2 раза после фильтрации этим фильтром, затем проводится еще одна операция фильтрации, после которой осуществляется децимация с уменьшением числа отсчетов в 8 раз.

По точности этот случай примерно соответствует рассмотренному в предыдущем разделе одношаговому децимирующему фильтру при $s = 1$. Если последний фильтр перед децимацией в 8 раз построить по 32 отсчетам, то точность будет эквивалентна точности одношагового фильтра при $s = 2$. Построение этого фильтра по 64 отсчетам будет приблизительно обеспечивать точность, соответствующую $s = 4$. Отметим, что общее число операций умножения, приходящееся на один интервал дискретизации, для этих примеров одинаково и приблизительно равно 24. Пересчет длительностей импульсных характеристик этих фильтров в число отсчетов исходной передискретизированной последовательности с интервалом дискретизации Δ даст значения, равные соответственно $4p$, $8p$ и $12p$, вместо $2p$, $4p$ и $8p$ для одношагового децимирующего фильтра.

Отметим, что рассмотренная в этом разделе медленная многошаговая децимация фильтрами с короткой импульсной харак-

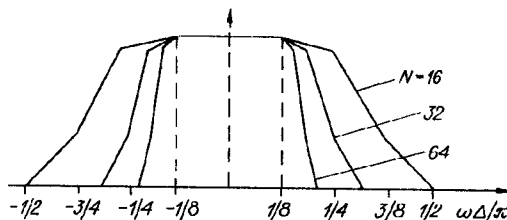


Рис. 3

теристикой требует примерно в 2 раза больше операций умножения и операций сложения на один отсчет передискретизированной последовательности, чем при одношаговой децимации. Поэтому представляется целесообразным осуществлять децимацию в два этапа: сначала, используя фильтр с $s = 1$ ($N = 2p$), выполнить децимацию в $p/8$ раз, затем, применяя фильтр с более высоким значением $s \geq 4$, провести децимацию в 8 раз. При этом необходимое число умножений на один отсчет передискретизированной последовательности примерно равно 12.

Заключение. Представляется, что использование при децимации фильтров с характеристикой (2.12) может дать выигрыш по сравнению с общепринятой децимационной процедурой, так как оно не только обеспечивает более высокую скорость убывания частотной характеристики, но и позволяет легко управлять последней в полосе полезного сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Candy J. C. Decimation for sigma delta modulation // IEEE Trans. Commun. 1986. 34, N 1.
2. Ефимов В. М., Касперович А. Н. Потенциальная точность некоторых измерительных схем // Автометрия. 1995. № 3.
3. Ефимов В. М., Касперович А. Н. О статистических характеристиках шума в АЦП с дельта—сигма-модуляцией первого порядка // Автометрия. 1995. № 2.
4. Candy J. C., Benjamin O. I. The structure of quantization noise from sigma—delta modulation // IEEE Trans. Commun. 1981. COM 29, N 9.
5. Ефимов В. М., Полосьмак В. Г., Резник А. Л. Аналитические и компьютерные алгоритмы обращения ленточных матриц // Автометрия. 1985. № 6.
6. Gray R. M. Spectral analysis of quantization noise in a single-loop sigma—delta modulator with dc input // IEEE Trans. Commun. 1989. 37, N 6.

Поступила в редакцию 29 марта 1995 г.

Реклама продукции в нашем журнале — залог Вашего успеха!