

УДК 533.9 : 539.143.43

А. В. Лихачев, В. В. Пикалов
(Новосибирск)

ЧАСТОТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ АЛГОРИТМАХ ТРЕХМЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ*

Предлагаются новые методы частотной фильтрации, позволяющие улучшить качество томографической реконструкции алгебраическими алгоритмами. Разработанные процедуры включены в комплекс программ по решению задач трехмерной томографии. В процессе вычислительного эксперимента показана эффективность этих методов.

Введение. Рассмотрим задачу трехмерной томографии в параллельной и конусной постановках [1]. Схема сбора данных (с одного ракурса) для конусной постановки изображена на рис. 1. Здесь функция $g(x, y, z)$ задает распределение параметра (например, плотности), характеризующего объект, в точке S расположен источник зондирующего излучения. Излучение, прошедшее через объект, попадает на плоский двумерный детектор P , который формирует двумерное распределение $f(u, v)$. Параллельная схема сбора данных получается из соответствующей конусной путем удаления источника зондирующего излучения в бесконечность.

В дискретизованном виде задачу томографии можно свести к решению системы линейных алгебраических уравнений [1]:

$$Ag = f, \quad (1)$$

где A — матрица размерностью $I \times J$, $g \in R^J$, $f \in R^I$; g и f — векторы реконструируемой функции и проекционных данных соответственно.

В литературе неоднократно указывалось, что при решении задачи томографии в виде (1) алгоритмами типа ART, MART, SIRT [2] требуется дополнительная регуляризация итерационного процесса (см., например, [1, 3]). Для этой цели предлагается использовать частотную фильтрацию, а именно, решение, полученное на каждой итерации, обрабатывать адаптивным частотным фильтром.

Кроме того, для улучшения качества реконструкции предлагается уточнять спектр решения, получен-

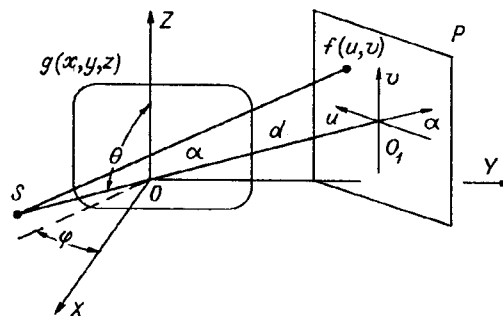


Рис. 1. Схема сбора данных с одного ракурса для конусной постановки трехмерной задачи томографии:

$g(x, y, z)$ — исследуемый объект; S — источник зондирующего излучения; P — плоский двумерный детектор; $f(u, v)$ — проекция объекта

* Работа выполнена при частичной поддержке Нидерландского научно-исследовательского общества (NWO), № 713-097, а также Российского фонда фундаментальных исследований, № 95-02-03615-А.

ного на каждой итерации, в соответствии с центральной проекционной теоремой [4].

Регуляризирующие фильтры низких частот. 1. Шаровой фильтр H_B , действие которого на дискретный фурье-образ $\tilde{g}(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq})$ дискретизованной функции $g(x_k', y_l', z_q')$ описывается следующим уравнением:

$$H_B \tilde{g}(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq}) = \begin{cases} \tilde{g}(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq}), & v_{xk}^2 + v_{yl}^2 + v_{zq}^2 \leq v_0^2, \\ 0, & v_{xk}^2 + v_{yl}^2 + v_{zq}^2 > v_0^2, \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}(K-1) \leq k \leq \frac{1}{2}(K-1), \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2}(L-1) \leq l \leq \frac{1}{2}(L-1),$$

$$-\frac{1}{2}(Q-1) \leq q \leq \frac{1}{2}(Q-1).$$

Рассматривается метод определения частоты отсечки v_0 , являющийся одной из разновидностей метода критерия невязки [5, 6]. Пусть δ^2 — некоторая точностная характеристика качества реконструкции в смысле отклонения по норме, в частности, в [5] такой величиной является норма шума измерений. В следующем разделе предложены два новых способа определения δ^2 . Будем полагать, что величина δ^2 нам известна. Искажения, вносимые фильтром в спектр решения, должны быть согласованы с δ^2 . Тогда величину v_0 можно найти из уравнения

$$\sum_{v_{xk}^2 + v_{yl}^2 + v_{zq}^2 > v_0^2} |\tilde{g}(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq})|^2 = \delta^2 \|g\|^2, \quad (3)$$

где $\|g\|^2$ — квадрат нормы вектора $g \in R^J$:

$$\|g\|^2 = \sum_{j=1}^J g_j g_j^* = \sum_{j=1}^J |g_j|^2. \quad (4)$$

Можно показать, что левая часть уравнения (3), рассматриваемая как функция v_0 , монотонно не возрастает. Это позволяет численно решать (3), например, методом деления пополам.

2. Фильтр типа предложенного в работе [7] для устойчивого суммирования возмущенных рядов Фурье. Его действие на дискретный спектр функции описывается уравнением

$$H_{\Omega} \tilde{g}(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq}) = \frac{\tilde{g}(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq})}{1 + \alpha \Omega(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq})}. \quad (5)$$

В формуле (5) $\Omega(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq})$ — некоторый полином, определенный в частотной области; индексы k, l, q меняются в тех же пределах, что и в формуле (2). Параметр регуляризации α находится через величину δ^2 аналогично тому, как определяется частота отсечки, а именно, из уравнения

$$\sum_{k, l, q} \left| \tilde{g}(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq}) - \frac{\tilde{g}(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq})}{1 + \alpha \Omega(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq})} \right|^2 =$$

$$= \sum_{k, l, q} \frac{\alpha^2 \Omega^2(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq}) |\tilde{g}(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq})|^2}{(1 + \alpha \Omega(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq}))^2} = \delta^2 \|g\|^2. \quad (6)$$

Уравнение (6) также численно решается методом деления пополам, при этом полином $\Omega(v_{xk}, v_{yl}, v_{zq})$ принимает только положительные значения [7]. В процессе численного моделирования в данной работе используются три стабилизирующих полинома $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ вида

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= v_{xk}^2 + v_{yl}^2 + v_{zq}^2, \\ \Omega_2 &= \Omega_1 + v_{xk}^4 + v_{yl}^4 + v_{zq}^4, \\ \Omega_3 &= \Omega_2 + v_{xk}^6 + v_{yl}^6 + v_{zq}^6.\end{aligned}\tag{7}$$

Комбинированные алгоритмы. В случае если задачу томографии можно свести к обращению интегрального трехмерного P -преобразования [4], возможно использование центральной проекционной теоремы, которая позволяет оценить фурье-образ искомого решения на некоторых плоскостях в фурье-пространстве, не решая при этом обратной задачи томографии. Далее эти плоскости будем называть *проекционными плоскостями*. Двумерный фурье-образ каждой из проекций определяет значения трехмерного фурье-образа решения на одной из проекционных плоскостей. Плоскость детектирования (т. е. плоскость, в которой получена проекция) и проекционная плоскость связаны между собой следующим образом: проекционная плоскость проходит через начало координат в фурье-пространстве и имеет вектор нормали, совпадающий при изоморфном отождествлении пространства и фурье-пространства с вектором нормали к плоскости детектирования.

В работе [8] был рассмотрен трехмерный итерационный алгоритм GP1 типа Гершберга — Папулиса [9—11], основанный на центральной проекционной теореме. Здесь же предлагается синтезировать алгебраические алгоритмы и алгоритмы типа Гершберга — Папулиса. Такие томографические алгоритмы назовем *комбинированными*. Идея комбинированных алгоритмов состоит в исправлении фурье-образа решения, полученного на очередной итерации алгебраического алгоритма, в соответствии со значением фурье-образа искомого решения на проекционных плоскостях. Символически обозначая итерацию алгебраического алгоритма через A^{-1} , запишем комбинированный алгоритм в виде

$$\begin{aligned}g^{(n)}(x, y, z) &= \Phi_s^{(n)} F_3^{-1} \tilde{g}^{(n-1)}(v_1, v_2, v_3), \quad n = 1, 2, \dots, \\ \tilde{g}^{(n)}(v_1, v_2, v_3) &= \Phi_f^{(n-1)} F_3 A^{-1} g^{(n-1)}(x, y, z), \quad n = 1, 2, \dots, \\ g^{(0)}(x, y, z) &\in R^3,\end{aligned}\tag{8}$$

где F_3 и F_3^{-1} — операторы прямого и обратного трехмерного преобразования Фурье; $\Phi_s^{(n)}$ и $\Phi_f^{(n)}$ — соответственно операторы изменения n -го итерационного решения и его фурье-образа, которые отвечают за использование априорной информации.

Методы оценки величины δ^2 в итерационном процессе. 1. Первый метод определения δ^2 основан на оценке невязки дискретизованных проекций и псевдопроекции [8]. *Псевдопроекцией* вектора $g \in R^J$ назовем вектор $\hat{f} \in R^I$, такой что $\hat{f} = Ag$. Значение δ^2 , полученное по невязке проекций и псевдопроекции, обозначим через δ_p^2 . В работе δ_p^2 определялась на n -й итерации следующим образом:

$$\delta_p^2(n) = \frac{\|f - Ag^{(n)}\|^2}{\|f\|^2} = \frac{\|f - \hat{f}^{(n)}\|^2}{\|f\|^2}.\tag{9}$$

N	x_0	y_0	z_0	α	β	γ	c
1	0	0	0	0,40	0,40	0,40	0,4
2	0	0	0	0,20	0,125	0,125	1,5
3	0	0,5	0	0,20	0,1	0,1	1,0
4	0	-0,5	0	0,20	0,1	0,1	1,0
5	0	0,8	0	0,20	0,075	0,075	0,5
6	0	-0,8	0	0,20	0,075	0,075	0,5
7	0	0	0,5	0,20	0,1	0,1	1,0
8	0	0	-0,5	0,20	0,1	0,1	1,0
9	0	0	0,8	0,20	0,075	0,075	0,5
10	0	0	-0,8	0,20	0,075	0,075	0,5

2. Новый метод вычисления $\delta^2(n)$ опирается на спектральные оценки. Согласно центральной проекционной теореме, на каждой итерации имеется возможность оценивать невязку фурье-образа итерационного приближения и искомого решения на проекционных плоскостях. Это дает основу новому способу оценки δ^2 . Полученную таким способом оценку обозначим через δ_f^2 . В работе δ_f^2 определяется на n -й итерации согласно уравнению

$$\delta_f^2(n) = \frac{\sum_{m=1}^M \|\tilde{f}_m - \tilde{g}^{(n)}\|_{P_m}^2}{\sum_{m=1}^M \|\tilde{f}_m\|^2}, \quad (10)$$

где \tilde{f}_m — фурье-образ m -й проекции; $\tilde{g}^{(n)}|_{P_m}$ — интерполяция фурье-образа приближения, полученного на n -й итерации на m -ю проекционную плоскость; M — число направлений наблюдения объекта (число ракурсов).

Результаты численного моделирования. Для исследования свойств предлагаемых алгоритмов выполнен вычислительный эксперимент по реконструкции модели, состоящей из 10 гауссовых эллипсоидов:

$$g(x, y, z) = \sum_{i=1}^{10} c_i \exp\left(-\frac{\ln 2}{\alpha_i^2} (x - x_{0i})^2 - \frac{\ln 2}{\beta_i^2} (y - y_{0i})^2 - \frac{\ln 2}{\gamma_i^2} (z - z_{0i})^2\right). \quad (11)$$

Параметры гауссовых функций, входящих в (11), приведены в таблице.

Аксонметрическая проекция сечения трехмерной модели плоскостью $x = 0$ представлена на рис. 2.

Приведены результаты реконструкции по незашумленным проекциям (за исключением расчета для рис. 4). Внесение шумов в проекционные данные не меняет принципиально характера поведения алгоритмов.

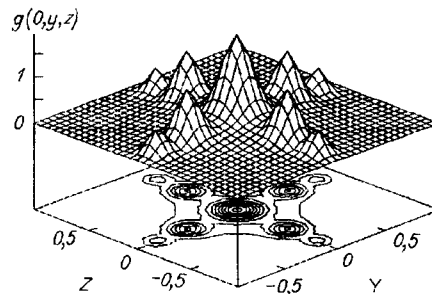
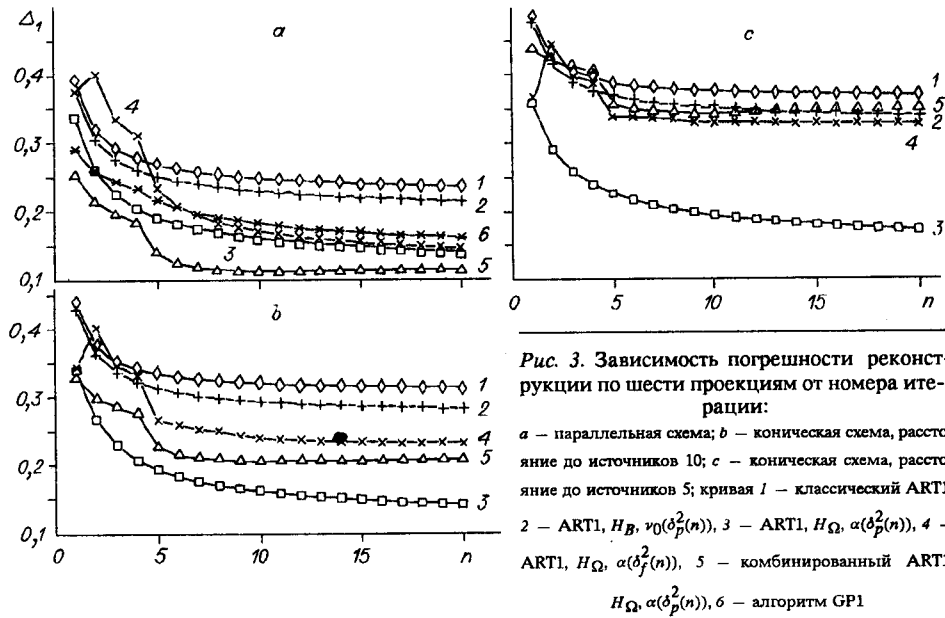


Рис. 2. Аксонметрическая проекция сечения трехмерной модели плоскостью $x = 0$



На рис. 3, а—с приведены погрешности восстановления модели по шести незашумленным проекциям. В качестве области реконструкции взят куб с центром в начале координат и длиной стороны, равной в безразмерных единицах 2. Реконструкция проводилась на сетке $65 \times 65 \times 65$, сетка на проекциях 65×65 . Рис. 3, а относится к реконструкции по параллельной проекционной схеме. Плоскости детектирования перпендикулярны плоскости (x, y) , по азимутальному углу их распределение равномерно (через 30°) в интервале от 0 до 150° . Рис. 3, б, с иллюстрируют восстановление по коническим проекционным схемам с источниками, расположенными равномерно в интервале от 0 до 150° на окружности, лежащей в плоскости (x, y) . Для рис. 3, б радиус окружности 10, а для рис. 3, с — 5. Приведенные графики выражают зависимость нормированного среднеквадратичного отклонения Δ_1 от номера итерации:

$$\Delta_1 = \left(\frac{\|g - g^{(n)}\|^2}{\|g\|^2} \right)^{1/2}, \quad (12)$$

где g и $g^{(n)}$ — модель и n -е итерационное решение соответственно.

На рис. 3, а—с кривая 1 получена при классической реализации алгоритма ART1, кривая 2 — при включении после каждой итерации фильтра H_B с частотой отсечки, полученной по $\delta_p^2(n)$, кривые 3, 4 — при включении фильтра H_Ω с $\Omega = \Omega_3$, параметр регуляризации вычисляется по $\delta_p^2(n)$ и $\delta_f^2(n)$ соответственно, кривая 5 получена для комбинированного ART1 при включении фильтра H_Ω ($\Omega = \Omega_3$) с параметром регуляризации, определяемым по $\delta_p^2(n)$. На рис. 3, а (параллельная проекционная схема) дополнительно приведена кривая 6, полученная для алгоритма GP1 типа Гершберга — Папулиса, разработанного в [8]. Для параллельной проекционной схемы комбинированный алгоритм дает наилучший результат. Хороший результат дает ART1 с фильтром H_Ω , причем для обоих способов вычисления параметра регуляризации α как по $\delta_p^2(n)$, так и по $\delta_f^2(n)$, начиная с 10-й итерации, кривые практически совпадают. При переходе к коническим проекционным схемам (см. рис. 3, б, с) качество реконструкции всеми алгоритмами ухудшилось. Наиболее сильно качество реконструкции упало для комбинированного алгоритма и ART1 с

фильтром H_Ω и $\alpha(\delta_f^2(n))$. Это является вполне естественным, поскольку в данных алгоритмах используется центральная проекционная теорема, которая, вообще говоря, не применима для конических проекций. Качество реконструкции алгоритмом ART1 с фильтром H_Ω и параметром релаксации α , вычисляемым по $(\delta_p^2(n))$, для конических схем изменилось незначительно, что свидетельствует о большей универсальности оценки по проекции и псевдопроекции. Изломы на кривых 4—6 соответствуют итерациям, на которых изменялся (уменьшался) параметр, впервые введенный в [11], определяющий максимальное расстояние от узла трехмерной сетки, в который производится интерполяция, до проекционной плоскости. В работе [8] этот параметр был назван «толщиной слоя сноса». Вариация этого параметра позволяет ускорить сходимость итерационного процесса и повысить точность реконструкции.

Визуально качество реконструкции можно оценить по рис. 4, а, б, где приведены аксонометрические проекции сечений плоскостью $x = 0$ результатов реконструкции по зашумленным проекциям. В обоих случаях на проекции накладывался аддитивный случайный шум с нормальным распределением и амплитудой, составляющей 5% от максимального значения на проекции. Для рис. 4, а восстановление производилось по 10 параллельным проекциям. Здесь использовался комбинированный ART1, при включении фильтра H_Ω ($\Omega = \Omega_3$, $\alpha(\delta_p^2(n))$), 10 итераций. Для рис. 4, б реконструкция велась по 10 коническим проекциям с расстоянием до источников, равным 5. Использовался ART1 при включении фильтра H_Ω ($\Omega = \Omega_3$, $\alpha(\delta_p^2(n))$), 20 итераций. Заметно ухудшение качества реконструкции для конической схемы.

На основании проведенных вычислительных экспериментов по применению частотной регуляризации в алгебраических алгоритмах малоракурсной томографии сделаны следующие выводы:

1. При действии фильтров низких частот H_B и H_Ω на приближения, получаемые на каждой итерации алгебраическими алгоритмами реконструкции ART1, MART и SIRT, достигнуто существенное улучшение качества восстановления по сравнению с классической реализацией этих алгоритмов. Такое улучшение получено при реконструкции как по идеальным, так и по зашумленным проекциям.

2. При параллельной схеме получения данных комбинированные алгоритмы дают лучшие результаты, нежели классические. Наилучшее качество реконструкции достигнуто при использовании частотной регуляризации в комбинированных алгоритмах. В этом случае комбинированный ART1 дает также лучшее качество реконструкции по сравнению с алгоритмом GP1.

3. Определение частоты отсечки фильтра H_B или параметра регуляризации фильтра H_Ω по $\delta_f^2(n)$ и $\delta_p^2(n)$ при реконструкции по параллельным проекциям

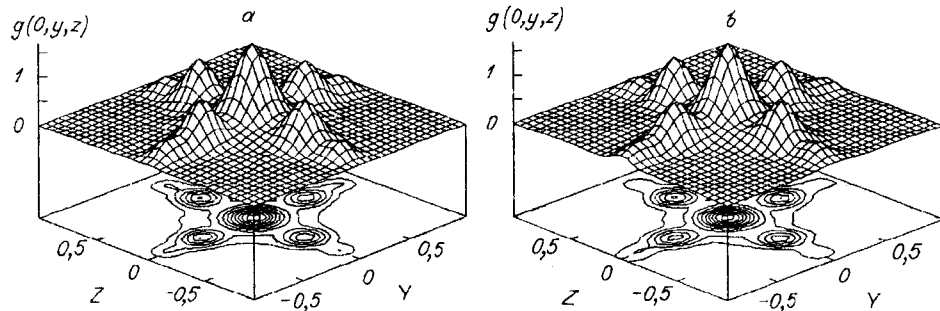


Рис. 4. Аксонометрические проекции сечений плоскостью $x = 0$ результатов реконструкции: а — реконструкция по 10 параллельным проекциям, комбинированный ART1 с фильтрацией, $\Delta_1 = 0,129$; б — реконструкция по 10 коническим проекциям (расстояние до источников 5), ART1 с фильтрацией, $\Delta_1 = 0,199$

дает результаты, близкие к оптимальным. При конической схеме получения данных оценки по $\delta_p^2(n)$ оказываются предпочтительнее.

4. В большинстве рассмотренных случаев фильтр H_Ω более эффективен, нежели фильтр H_B .

Заключение. Предлагаемая частотная фильтрация, включенная в алгебраические алгоритмы реконструкции, служит эффективным средством повышения качества томограмм. Методы вычисления параметров, характеризующих фильтры, основанные на теории регуляризации некорректных задач, дают возможность адаптировать их к особенностям алгоритма и проекционных данных. Вычислительный эксперимент подтверждает правильность полученных теоретических оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Herman G. T. Image Reconstruction from Projections. The Fundamentals of Computerized Tomography. N. Y.: Academic Press, 1980. (Пер. с англ.: Г. Т. Хермен. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983).
2. Censor Y. Finite series-expansion reconstruction methods // Proc. IEEE. 1983. 71, N 3. P. 409.
3. Likhachov A. V., Pickalov V. V. A modification of ART method for cone-beam tomography of high space resolution // International Symposium on Computerized Tomography: Abstracts. Novosibirsk: Inst. Math. SD RAS, 1993. P. 86.
4. Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. B. G.: Teubner, and Wiley, 1986. (Пер. с англ.: Ф. Наттерер. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990).
5. Морозов В. А. О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации // ЖВММФ. 1968. 8, № 2.
6. Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
8. Баландин А. Л., Лихачев А. В., Панферов Н. В. и др. Томографическая диагностика излучающих плазменных объектов. М., 1991. (Препр. /АН СССР. ФИАН; 78).
9. Defrise M., De Mol C. A regularized iterative algorithm for limited-angle inverse Radon transform // Optica Acta. 1983. 30, N 4. P. 403.
10. Вишняков Г. Н., Гильман Г. А., Левин Г. Г. Восстановление томограмм при ограниченном числе проекций. Итерационные методы // Оптика и спектроскопия. 1985. 58, вып. 2.
11. Melnikova T. S., Pickalov V. V. Computer-aided plasma tomography // High Temperature Dust Laden Jets in Plasma Technology: Proc. Inter. Workshop, Novosibirsk, USSR, 6—8 September 1988. Utrecht: VSP, 1989. P. 257.

Поступила в редакцию 1 марта 1995 г.