РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1995

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.728.2

В. М. Ефимов, А. Н. Касперович

(Новосибирск)

ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫХОДНОЙ БИТОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЕЛЬТА—СИГМА-МОДУЛЯТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПРИ ПОСТОЯННОМ СИГНАЛЕ НА ВХОДЕ*

Рассматривается структура выходной битовой последовательности дельта—сигма-модулятора (ΔΣМ) первого порядка в зависимости от постоянного входного сигнала, даются правила формирования последовательности и рекурсии, обеспечивающие определение ее характеристик. Получено соотношение для спектра мощности последовательности и определяется остаточная энергия шума после ее фильтрации идеальным фильтром нижних частот.

Изучению характеристик сигнала на выходе ΔΣМ с одним интегратором при постоянном сигнале на входе посвящено значительное количество работ, из которых основными являются [1—3]. Полученные в [1, 2] соотношения для спектра мощности выходной последовательности отличаются тем, что его ординаты не упорядочены по частоте. В [3] приводится решение, основывающееся на непосредственном анализе структуры последовательностей на выходе ΔΣМ, что позволило получить формулы, в которых ординаты спектра мощности неявно зависят от значения входного сигнала ΔΣМ. Получаемые при этом соотношения для спектра мощности выходной последовательности адекватны соотношениям из [1, 2], но, на наш взгляд, недостаточно полны. Изложенный в настоящей статье материал является развитием положений работы [3].

1. **Структура последовательностей на выходе дельта—сигма-модулятора первого порядка.** Будем рассматривать ΔΣМ с компаратором, выходная характеристика которого

$$y_x(k\Delta) = \mathrm{sign}\, z_x(k\Delta - \Delta), \tag{1.1}$$

где $z_x(k\Delta - \Delta)$ и $y_x(k\Delta)$ — сигналы на входе и выходе компаратора; функция sign$z$ равна положительной единице при $z \geq 0$ и отрицательной — при $z < 0$; Δ — интервал дискретизации по времени.

Входной сигнал ΔΣМ представляется несократимой рациональной дробью $x = K/N$, лежащей в диапазоне $|x| \leq 1$. В силу очевидной симметрии ниже рассматривается только сигнал $0 \leq x \leq 1$.

Периодическая битовая последовательность $y_x(k\Delta)$, возникающая на выходе ΔΣМ, имеет тот же спектральный состав, что и рассматриваемая в [3], так как последняя может быть получена путем добавления ко всем элементам $y_x(k\Delta)$ положительной единицы и последующего деления полученного результата на два. При сравнении с другими результатами, чтобы учесть последнюю

* Работа выполнена при содействии Российского фонда фундаментальных исследований (№ 95-01-00098).

операцию, полученные ниже значения составляющих спектра мощности последовательности должны уменьшаться в 4 раза.

Среднее значение последовательности $y_x(k\Delta)$ на ее периоде M равно сигналу x на входе ΔΣМ:

$$\langle y_x(k\Delta)\rangle = (1/M)\sum_{k=n}^{n+M} y_x(k\Delta) = x. \qquad (1.2)$$

Если обозначить число положительных единиц последовательности на периоде M через λ, а число отрицательных — через μ, то очевидно, что

$$\begin{aligned} \lambda &= (N + K)(3 - (-1)^{N+K})/4, \\ \mu &= (N - K)(3 - (-1)^{N+K})/4. \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Период последовательности

$$M = N(3 - (-1)^{N+K})/2. \qquad (1.4)$$

Помимо величин λ, μ и M, важной характеристикой последовательности является параметр ν — целая часть отношения числа положительных и отрицательных единиц последовательности на периоде M:

$$\nu = [\lambda/\mu]. \qquad (1.5)$$

Анализ показывает (см. также [3]), что при фиксированном $\nu(1, 2, \dots)$ любая последовательность $y_x(k\Delta)$ ($\Pi_x(\nu)$) состоит из двух типов элементарных последовательностей: $\Pi(\nu + 1)$ и $\Pi(\nu)$. Последовательность $\Pi(\nu + 1)$ содержит $(\nu + 1)$ идущих подряд положительных единиц (+1) и одну отрицательную единицу (−1). Условно можно обозначить, что

$$\Pi(\nu + 1) = \{+1\}^{\nu+1}\{-1\}^1, \qquad (1.6)$$

а последовательность

$$\Pi(\nu) = \{+1\}^{\nu}\{-1\}^1. \qquad (1.7)$$

Общее число элементарных последовательностей обоего типа, входящих в общую последовательность $\Pi_x(\nu)$, равно μ. Число последовательностей первого типа $\Pi(\nu + 1)$

$$p = \lambda - \mu\nu, \qquad (1.8)$$

а число последовательностей второго типа

$$r = \mu(\nu + 1) - \lambda. \qquad (1.9)$$

При этом последовательности $\Pi(\nu + 1)$ и $\Pi(\nu)$ «равномерно» перемешаны между собой.

В соответствии с (1.5) диапазон входного сигнала x разбивается на области

$$(\nu - 1)/(\nu + 1) \le x \le \nu/(\nu + 2). \qquad (1.10)$$

Сигнал, попадающий в область (1.10),

$$x = (p\nu + r(\nu - 1))/(p(\nu + 2) + r(\nu + 1)). \qquad (1.11)$$

Введение параметра ν и соотношения (1.11) позволяет описать любое рациональное число $0 \le x \le 1$.

Построение точного решения — общей последовательности на выходе ΔΣМ по заданному входному сигналу $x = K/N$ — очевидно: по числам K и N определяются величины λ, μ, M и ν из соотношения (1.3) и (1.5); затем из соотношений (1.8) и (1.9) находятся числа элементарных последовательностей p и r, входящих в последовательность $\Pi_x(\nu)$; элементарные последовательности «равномерно» перемешиваются между собой. Последняя операция является наиболее сложной и осуществляется с помощью алгоритма Эвклида по отношению к величинам p и r [3].

Для построения выходных последовательностей используем процедуру их последовательного усложнения. Она дает возможность получить рекурсивные соотношения.

Исходная совокупность входных сигналов x определяется границами областей (1.10):

$$x(\nu) = (\nu - 1)/(\nu + 1). \tag{1.12}$$

Как отмечалось выше, этим числам соответствует последовательность

$$\Pi_x(\nu) = \Pi(\nu). \tag{1.13}$$

Следующим шагом является построение последовательностей в окрестности входного сигнала, определяемой соотношением (1.12):

$$\Pi_x(\nu, n_1) = \{\Pi(\nu \pm 1)\}^1\{\Pi(\nu)\}^{n_1}, \tag{1.14}$$

для совокупности

$$x(\nu, n_1) = \frac{n_1(\nu - 1) + (\nu - 1 \pm 1)}{n_1(\nu + 1) + (\nu + 1 \pm 1)}. \tag{1.15}$$

Показатели при фигурных скобках в (1.14) указывают, сколько раз повторяется элементарная последовательность, расположенная внутри этих скобок. Знак «+» в аргументе элементарной последовательности соответствует случаю $x(\nu, n_1) > x(\nu)$, а знак «−» — $x(\nu, n_1) < x(\nu)$.

Дальнейшие этапы построения последовательностей и расширения совокупности чисел представляются очевидными.

Рекурсия для последовательностей имеет вид

$$\Pi_x(\nu, n_1, ..., n_s) = \{\Pi_x(\nu, n_1, ..., n_{s-1})\}^{n_s} \pm \{\Pi_x(\nu, n_1, ..., n_{s-2})\}^1, \tag{1.16}$$

два ее первых члена определяются соотношениями (1.13) и (1.14).

Знак «±» в (1.16) означает, что последовательность $\Pi_x(\nu, n_1, ..., n_{s-2})$ либо добавляется к n_s раз повторенной последовательности $\Pi_x(\nu, n_1, ..., n_{s-1})$, либо убирается из нее.

Период последовательности (1.16) определяется рекурсией

$$\begin{gathered} M(\nu, n_1, ..., n_s) = n_s M(\nu, n_1, ..., n_{s-1}) \pm M(\nu, n_1, ..., n_{s-2}), \\ M(\nu) = \nu + 1, \qquad M(\nu, n_1) = n_1 M(\nu) + (\nu + 1 \pm 1), \end{gathered} \tag{1.17}$$

а составляющие совокупности сигнала

$$x(\nu, n_1, ..., n_s) = M(\nu - 2, n_1, ..., n_s)/M(\nu, n_1, ..., n_s). \tag{1.18}$$

По-видимому, при $s \to \infty$ построенный выше массив чисел совпадает с множеством всех рациональных чисел на отрезке $0 \le x \le 1$. Отметим, что при этом формула для спектра мощности рассмотренных выше последовательностей оказывается простой и удобной для анализа.

2. Спектр мощности последовательности на выходе ΔΣМ. Для определения спектра мощности последовательности (1.1) прибавим и вычтем единицу из ее отрицательных значений. Тогда мгновенный спектр последовательности, исключая частоту $\omega = 0$, может быть представлен в виде

$$C_m(x) = -(2/M)\sum_{k=1}^{\mu}\exp(i2\pi m t_k/M), \tag{2.1}$$

где t_k — моменты времени, соответствующие отрицательным единицам последовательности.

Исходя из (2.1) в самом общем случае спектр мощности последовательности

$$C_m^2(x) = (2/M)^2\left(\mu + 2\sum_{l=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{\mu-l}\cos 2\pi m(t_{k+l} - t_k)/M\right). \tag{2.2}$$

Координаты линий спектра

$$\omega_m\Delta/2\pi = \pm m/M. \tag{2.3}$$

При этом максимальный номер гармоники m определяется частотой Найквиста:

$$|\omega_m|\Delta/2\pi \le 1/2. \tag{2.4}$$

Из соотношений для геометрической прогрессии вытекает, что для спектра мощности последовательности (1.16) справедлива формула

$$C_m^2(x) = (2/M)^2\,\frac{\sin^2\pi m/M}{\sin^2\pi mc/M}. \tag{2.5}$$

Константа c в (2.5) так же, как и период M, определяется рекурсией*

$$c(\nu, n_1, n_s) = M(\nu, n_1, \ldots, n_{s-1}). \tag{2.6}$$

При нахождении спектра мощности для произвольного рационального входного сигнала необходимо определить константу c, построив последовательность $\Pi_x(\nu)$ по изложенной в разд. 1 методике.

Анализ формулы (2.5) показывает следующее. Числитель этого соотношения монотонно возрастает до частоты Найквиста. Пики (экстремумы на спектре мощности) определяются «нулями» знаменателя (2.5). Число этих пиков, если величина n_s достаточно велика,

$$n_\circ \approx c/2, \tag{2.7}$$

а их абсциссы (номера гармоник) близки к

$$m_{\circ k} \simeq \pm kM/c \approx \pm kn_s, \tag{2.8}$$

где k — целое число.

Для описания амплитуд пиков спектра мощности можно использовать вытекающее из (2.5) очевидное соотношение ($\sin z \approx z$ при $z \to 0$)

$$C_{m_\circ}^2(x) \simeq \frac{4\sin^2\pi m_\circ/M}{M^2\pi^2\xi^2(m_\circ c/M)}, \tag{2.9}$$

где $\xi^2(m_\circ c/M)$ — ошибка квантования величины $m_\circ c$ по модулю M.

---

* Числа n_k в последовательности (1.16) являются элементами цепной дроби для отношения c/M.

Например, абсцисса наибольшего пика спектра мощности ($k = 1$ в формуле (5.8) из [2]) определяется рекурсией

$$m_{\circ}(\nu, n_1, ..., n_s) = (1 - x)/2 = n_s m_{\circ 1}(\nu, n_1, ..., n_{s-1}) \pm m_{\circ 1}(\nu, n_1, ..., n_{s-2}),$$

$$m_{\circ 1}(\nu, 0) = 1, \qquad m_{\circ 1}(\nu, n_1) = n_1 + 1, \tag{2.10}$$

при этом

$$C^2_{m_\circ}(x) = 4\sin^2(\pi m_{\circ 1}/M)/\sin^2\pi/M. \tag{2.11}$$

Когда период M достаточно велик, то $\sin^2\pi/M \approx \pi^2/M^2$ и величина $\xi^2(m_{\circ 1}c/M)$ приблизительно равна $1/M^2$.

Если номер гармоники не превосходит $\sim M/2c \approx n_s/2$, то спектр мощности в области нижних частот можно считать примерно равномерным:

$$C^2_m(x) \approx (2/cM)^2. \tag{2.12}$$

Для последовательности (1.13) спектр мощности также оказывается равномерным:

$$C^2_m(x) \approx 4/(\nu + 1)^2, \quad C = 1, \quad M = \nu + 1. \tag{2.13}$$

Для последовательности (1.14) $c = \nu + 1$, период $M = (\nu + 1 \pm 1) + n_1(\nu + 1)$. В соответствии с (2.10) абсцисса экстремума $m_\circ = (n_1 + 1)$, а $\xi^2(m_{\circ 1}c/M) \approx \pi^2/M^2$. При $n_1 \to \infty$ в рассматриваемом случае $x(\nu, n_1) \to x(\nu)$, поэтому абсциссы пиков совпадают с абсциссами спектральных линий последовательностей $\Pi(\nu)$.

Аналогичные соображения справедливы относительно итераций более высокого порядка.

3. **Остаточная энергия шума на выходе идеального фильтра нижних частот.** Расположим на выходе ΔΣМ фильтр нижних частот с относительной частотой среза

$$\omega_{\max} = 1/(R + \delta), \tag{3.1}$$

где R — целое число, а величина δ сколь угодно мала.

Фильтр с такой частотной характеристикой выделяет те входные сигналы, у которых период соответствующей последовательности меньше или равен R. При этом в соответствии с (1.4) у части этих значений сигнала шум фильтруется полностью, так как минимальная частота спектра мощности (см. (2.3)) не попадает в полосу пропускания фильтра. Число гармоник спектра мощности, попадающих в полосу пропускания фильтра,

$$n = [M/R] - 1, \tag{3.2}$$

а остаточная энергия шума

$$\varepsilon^2(x, R) = 2\sum_{m=1}^{n} C^2_m(x). \tag{3.3}$$

Если величина R попадает в область частот, где спектр мощности определяется соотношением (2.12), то

$$\varepsilon^2(x, R) \approx 2([M/R] - 1)(2/cM)^2. \tag{3.4}$$

Как следует из (3.3) и (3.4), при увеличении R (уменьшении частоты среза $\omega_{\max}$) все больше последовательностей на выходе ΔΣМ фильтруется полностью.

Если

$$R = M(\nu, n_1, ..., n_s), \tag{3.5}$$

то в этом случае, как следует из (2.6) и (2.12), в окрестности сигнала s-й итерации спектр мощности

$$C_m^2(x) = (x(\nu, n_1, ..., n_{s+1}) - x(\nu, n_1, ..., n_s))^2. \tag{3.6}$$

Анализ поведения остаточной энергии шума в окрестности сигнала с нулевой остаточной энергией показывает, что для последней справедливо следующее асимптотическое соотношение в безразмерных координатах:

$$\varepsilon^2(x, R) \approx 2(\delta x)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k 1[(1/k - |\delta x|)(|\delta x| - 1/(k+1))], \tag{3.7}$$

где k — целое число. Функция $1[z] = 1$ при $z \geq 0$ и нулю в противном случае.

Соотношения (3.6) и (3.7) совпадают с (2.9) и (2.8) из [1]. Входные сигналы с нулевой энергией остаточного шума, ближайшие к сигналу первой итерации, определяются следующей зависимостью от длины периода M:

$$\frac{(\nu - 1)[(M+1)/(\nu+1)] - 1}{(\nu+1)[(M+1)/(\nu+1)] - 1} \leq x = (\nu - 1)/(\nu + 1) \leq \frac{(\nu - 1)[(M-1)/(\nu+1)] + 1}{(\nu+1)[(M-1)/(\nu+1)] + 1}. \tag{3.8}$$

В заключение отметим следующее.

Формулы для спектра мощности из [3] могут быть преобразованы в соотношение (2.5).

Анализ показывает, что для значений сигнала (1.18) формулы (5.8) из [2] и (2.5) настоящей статьи совпадают. Формула (2.5), на наш взгляд, дает более наглядное представление о спектре мощности, так как его значения в ней упорядочены по частоте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Candy J. C., Benjamin O. J.** The structure of quantization noise from sigma—delta modulation // IEEE Trans. Commun. 1981. COM-29, N 9.
2. **Gray R. M.** Spectral analysis of quantization noise in a single-loop sigma—delta modulator with dc input // IEEE Trans. Commun. 1989. COM-37, N 6.
3. **Fridman B.** The structure of the limit cycles in sigma—delta modulation // IEEE Trans. Commun. 1988. COM-36, N 8.

Поступила в редакцию 21 августа 1995 г.