

УДК 621.372.542

В. С. Киричук, В. П. Косых

(Новосибирск)

КОРРЕКЦИЯ СДВОЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Предлагается простой алгоритм коррекции изображения, являющегося суперпозицией двух одинаковых, но сдвинутых относительно друг друга изображений. Приводится аналитическое выражение для корректирующего фильтра. Рассмотрены условия применимости алгоритма при коррекции теневой проекции, полученной от двух точечных источников излучения.

Классическая задача реставрации изображений, состоящая в оценивании изображения на входе регистрирующей системы по доступным измерениям выходному, в общем случае сопряжена со значительными вычислительными трудностями, вызванными, во-первых, большими размерами ядра обратного преобразования и, во-вторых, отсутствием достаточного объема исходных данных, приводящим к недоопределенности задачи. Применение дискретного преобразования Фурье позволяет существенно сократить вычислительные затраты, однако при недостатке исходных данных, обусловленном, в частности, малым отношением размера изображения к размеру ядра прямого преобразования, качество реставрации, как показано, например, в [1], оказывается невысоким. В данной работе рассматривается частный случай такой задачи, для которого при учете заданных граничных условий удается в аналитическом виде найти ядро обратного преобразования, обеспечив тем самым простой алгоритм оценивания входного изображения.

Предположим, что зарегистрированное изображение представляет собой суперпозицию двух одинаковых (с точностью до амплитуд), но сдвинутых относительно друг друга на известное расстояние изображений с наложенным на них шумом. Задача заключается в оценивании одного (любого в силу их одинаковости) из исходных изображений. Соответствующим выбором системы координат направление сдвига можно совместить с направлением одной из координатных осей. В дискретном варианте каждую строку (положим, что строки ориентированы вдоль направления сдвига) выходного изображения можно представить в виде

$$g_j(i) = a_1 f_j(i) + a_2 f_j(i - k) + n_j(i), \quad i = \overline{1, l + k}, \quad (1)$$

где a_1 , a_2 и k известны; $n_j(i)$ — шум, а $f_j(i)$ — нормированное на амплитуду входное изображение. (Здесь предполагается, что сдвиг кратен шагу дискретизации.) Из (1) следует, что каждая строка входного изображения может быть оценена независимо от других, и, таким образом, задача сводится к одномерной. В этой связи в последующих формулах подстрочный индекс j опущен. В матричной записи (1) можно представить как

$$g = a_1 A f + n, \quad (2)$$

где \mathbf{g} и \mathbf{n} — вектор-столбцы длиной $l + k$; \mathbf{f} — вектор-столбец длиной $l + 2k$; A — матрица размером $(l + k) \times (l + 2k)$, имеющая следующий вид:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{--- } k \text{ ---} & \text{--- } l \text{ ---} & \text{--- } k \text{ ---} \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{array} \right], \quad \alpha = a_2/a_1. \end{array}$$

В формулировке (1) задача оценивания f является недоопределенной, поэтому для получения единственного решения f следует доопределить. Предположим, что известно, по крайней мере, k первых и k последних значений f . Представим (2) в виде

$$\mathbf{g} = a_1(A_1 | A_0 | A_2)(\mathbf{f}_1 | \mathbf{f}_0 | \mathbf{f}_2) + \mathbf{n},$$

где вектор \mathbf{f} и матрица A разбиты на блоки, соответствующие известной и неизвестной частям вектора \mathbf{f} (блоки, соответствующие неизвестным значениям \mathbf{f} , помечены индексом 0). Тогда

$$\mathbf{g} = a_1 A_1 \mathbf{f}_1 + a_1 A_2 \mathbf{f}_2 + a_1 A_0 \mathbf{f}_0 + \mathbf{n}.$$

Обозначив $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g} - a_1(A_1 \mathbf{f}_1 + A_2 \mathbf{f}_2)$, для оценивания \mathbf{f}_0 получим переопределенную систему уравнений

$$\tilde{\mathbf{g}} = a_1 A_0 \mathbf{f}_0 + \mathbf{n}, \quad (3)$$

в которой \mathbf{f}_0 — вектор-столбец длиной l , а матрица A_0 размером $(l + k) \times l$ имеет вид

$$A_0 = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \alpha & 0 & \dots & 1 & 0 & \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & \end{array} \right| \end{array}.$$

Если статистика ошибок измерения неизвестна, для оценивания \mathbf{f}_0 разумно воспользоваться методом наименьших квадратов [2], который дает

$$\hat{\mathbf{f}}_0 = (A_0^T A_0)^{-1} A_0^T \tilde{\mathbf{g}} / a_1, \quad (4)$$

а поскольку матрица $A_0^T A_0$ не вырождена, это решение единственно.

Обращение матрицы $A_0^T A_0$. $A_0^T A_0$ — есть квадратная симметричная трехдиагональная матрица размером $l \times l$, у которой элементы главной диагонали равны $1 + \alpha^2$, а боковых, отстоящих от главной на k позиций, равны α . Нетрудно показать, что $C = (A_0^T A_0)^{-1}$ является $(2u + 1)$ -диагональной матрицей ($u = \{(l - 1)/k\}$), в которой диагонали следуют с шагом k .

Введем обозначения:

$$S(i) = \sum_{j=0}^i \alpha^{2j}; \quad u_i = \left[\frac{l-i}{k} \right], \quad i = \overline{1, k}. \quad (5)$$

Используя специфическую структуру матриц $A_0^T A_0$ и C , можно показать, что ненулевые элементы первых k строк матрицы C представимы в виде

$$c_{i, i+mk} = (-\alpha)^m S(u_i - m) / S(u_i + 1), \quad i = \overline{1, k}, \quad m = \overline{0, u_i},$$

а для остальных строк справедливо соотношение

$$c_{i+lk, i+mk} = (-\alpha)^{-l} S(l) c_{i, i+mk}, \quad i = \overline{1, k}, \quad m = \overline{1, u_i}, \quad l \leq m,$$

из чего с учетом симметрии следует общее выражение для вычисления элементов обратной матрицы:

$$r_{i+lk, i+mk} = \frac{1}{S(u_i + 1)} \begin{cases} (-\alpha)^{m-l} S(l) S(u_i - m), & 0 \leq l \leq m, \\ (-\alpha)^{l-m} S(m) S(u_i - l), & m+1 \leq l \leq u_i, \end{cases} \quad (6)$$

$$i = \overline{1, k}, \quad m = \overline{0, u_i}.$$

Структура восстанавливающего фильтра. Учитывая структуру матриц A_0 и $(A_0^T A_0)^{-1}$, нетрудно убедиться, что в восстанавливающем фильтре, представленном матрицей $R = (A_0^T A_0)^{-1} A_0^T$, ненулевыми являются только элементы, лежащие на диагоналях, следующих с шагом k . Вычислив эти элементы, получим

$$r_{i+lk, i+mk} = \begin{cases} c_{i+lk, i}, & m = 0, \\ c_{i+lk, i+mk} + \alpha c_{i+lk, i+(m-1)k}, & m = \overline{1, u_i}, \\ \alpha c_{i+lk, i+(m-1)k}, & m = u_i + 1, \end{cases}$$

или с учетом (6)

$$r_{i+lk, i+mk} = \frac{1}{S(u_i + 1)} \begin{cases} (-\alpha)^{l-m} S(u_i - l), & m \leq l, \\ -(-\alpha)^{m-1} S(l) \alpha^{2(u_i - m + 1)}, & l + 1 \leq m \leq u_i + 1. \end{cases}$$

Практическое применение. Рассмотрим схему регистрации теневого изображения, приведенную на рис. 1. Плоскость рисунка пересекает объект наблюдения Ω . Начало координат помещено внутри объекта, два точечных источника излучения находятся в точках (x_{s1}, y_{s1}) и (x_{s2}, y_{s2}) , а приемник — в точке (x_r, y_r) . Тогда интенсивность излучения, зарегистрированного приемником, можно представить в виде

$$I(x_r, y_r; x_{s1}, y_{s1}; x_{s2}, y_{s2}) =$$

$$= \frac{I_{s1}}{(x_r - x_{s1})^2 + (y_r - y_{s1})^2} \exp \left[- \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mu(x, y) \delta \left(\frac{x - x_{s1}}{x_r - x_{s1}} - \frac{y - y_{s1}}{y_r - y_{s1}} \right) dx dy \right] +$$

$$+ \frac{I_{s2}}{(x_r - x_{s2})^2 + (y_r - y_{s2})^2} \exp \left[- \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mu(x, y) \delta \left(\frac{x - x_{s2}}{x_r - x_{s2}} - \frac{y - y_{s2}}{y_r - y_{s2}} \right) dx dy \right], \quad (7)$$

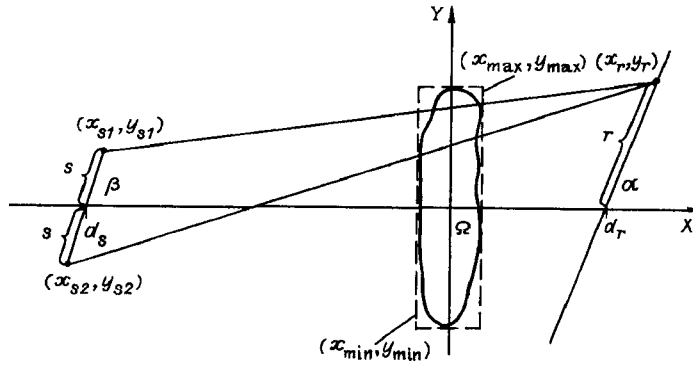


Рис. 1

где I_{s1}, I_{s2} — интенсивности источников; $\mu(x, y)$ — коэффициент поглощения внутри объекта; $x_{\min}, y_{\min}, x_{\max}, y_{\max}$ — координаты прямоугольника, описанного вокруг объекта; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, а уравнением

$$\left(\frac{x - x_s}{x_r - x_s} - \frac{y - y_s}{y_r - y_s} \right) = 0$$

описывается прямая, проходящая через источник и приемник.

Назовем теневой проекцией объекта функцию

$$\exp[-m(y)] = \exp \left[- \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mu(x, y) dx \right].$$

Задача заключается в том, чтобы, перемещая приемник вдоль некоторой прямой L , лежащей в плоскости XY , получить с точностью до сдвига и масштаба оценку $m(y)$. Принципиальной является невозможность раздельного управления источниками излучения. Рассмотрим условия, при выполнении которых задача может быть решена однозначно линейными методами.

Если горизонтальный размер объекта удовлетворяет условию

$$\left| (x_{\max} - x_{\min}) \frac{y_r - y_s}{x_r - x_s} \right| < \varepsilon,$$

где ε — размер минимальной разрешаемой детали объекта, показатель экспоненты можно упростить:

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mu(x, y) \delta \left(\frac{x - x_s}{x_r - x_s} - \frac{y - y_s}{y_r - y_s} \right) dx dy \approx \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mu \left[x, \frac{y_s}{x_r - x_s} x_r - \frac{x_s}{x_r - x_s} y_r \right] dx = m \left[\frac{y_s}{x_r - x_s} x_r - \frac{x_s}{x_r - x_s} y_r \right]. \quad (8)$$

Из (8) следует, что сдвиг между проекциями, полученными от разных источников, в общем случае не постоянен и (в обозначениях рис. 1) составляет величину

$$h = \frac{2s[d_r(d_r - d_s)\sin\beta + (2d_r - d_s)\sin(\beta - \alpha)r + \cos\alpha \cdot \sin(\beta - \alpha)r^2]}{(d_r - d_s) + r\cos\alpha + s\cos\beta},$$

которая зависит от положения приемника. Зависимостью сдвига от положения приемника можно пренебречь, если его изменение не превышает размера упомянутой ранее величины ε . Полагая, что данное условие выполнено и

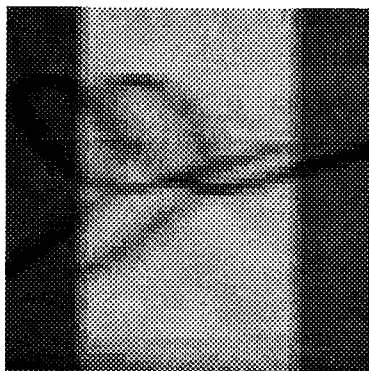


Рис. 2



Рис. 3

длина системы регистрации много больше ее ширины (это позволит в (7) пренебречь зависимостью амплитуд проекций от положения приемника), можно воспользоваться изложенным выше алгоритмом для коррекции сдвоенного теневого изображения.

Результаты коррекции. На рис. 2 приведено исходное теневое изображение проволоочной пружины, полученное с двойным рентгеновским источником излучения (64×63 отсчета, $\alpha = 1,15$, $k = 14$). Темные участки на краях изображения обусловлены наличием непрозрачной диафрагмы, размещенной в плоскости регистрируемого объекта. На участках, перекрытых диафрагмой, $f(i) = 0$, что обеспечивает необходимые граничные условия. На рис. 3 приведено восстановленное внутри диафрагмы изображение пружины. Наличие слабых артефактов может быть обусловлено двумя факторами: неточным знанием соотношения интенсивностей источников α и сдвига k .

Авторы благодарят Н. А. Мезенцева (ИЯФ СО РАН) за неформальную постановку задачи и предоставление исходного изображения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982.
2. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применение. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 4 декабря 1995 г.