

УДК 007.001.362

С. А. Попов, Г. И. Перетягин

(Новосибирск)

АЛГОРИТМ СГЛАЖИВАНИЯ ЗАШУМЛЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ С СОХРАНЕНИЕМ РЕЗКИХ ПЕРЕПАДОВ ДВУМЕРНОГО СИГНАЛА

Решается задача сглаживания зашумленных изображений с сохранением разрывов (скачков) яркости. Использован статистический (байесовский) подход, в котором изображение рассматривается как реализация случайного марковского поля на дискретной решетке. Заданием функции совместного распределения вероятности исходных (незашумленных) данных в форме Гиббса вводятся ограничения на возможные решения. В этой постановке предлагается простая детерминированная процедура получения решения, близкого к оптимальному (максимизирующему апостериорное распределение исходных данных), которая не содержит параметров итерационного приближения (оценивание их на каждой итерации обычно требует значительных вычислительных затрат). Обсуждается также достаточно нетривиальный вопрос о выборе значений параметров используемой модели. Предложен подход, являющийся разновидностью метода «репараметризации» модели, а именно, найдены интерпретации характеристик моделей, позволившие задавать величины параметров на основе предположений о свойствах наблюдаемой сцены. Экспериментальные результаты представлены сравнительным анализом реконструкций, полученных с использованием предложенного алгоритма, алгоритмов «детерминированного отжига» и покоординатного спуска.

1. Постановка и анализ задачи. Предлагается итерационная процедура сглаживания изображений, искаженных независимым белым аддитивным гауссовым шумом, с сохранением резких перепадов двумерного сигнала. Модель шума соответствует характеру искажений, вносимых большинством датчиков видеосигнала [1]. В процессе сглаживания алгоритм обнаруживает и сохраняет разрывы яркости в оценке исходного (незашумленного) изображения.

Математическое описание строится на использовании в качестве априорной модели исходных данных случайного марковского поля (СМП) на дискретной решетке, характеризующегося совместным распределением в форме Гиббса:

$$p(x) = Z^{-1} \exp(-U(x)), \quad (1.1)$$

где x — вектор значений исходных данных; Z — нормирующая постоянная (статсумма); $U(x)$ — функция энергии. Функция распределения СМП, о котором идет речь, зависит не только от значений поля яркостей в узлах решетки, но и от значений еще двух полей, компоненты которых принимают дискретные значения из множества $\{0, 1\}$ и показывают наличие или отсутствие разрывов в поле яркостей в горизонтальном или вертикальном направлении [2]:

$$p(f, h, v) = Z^{-1} \exp(-U(f, h, v)), \quad (1.2)$$

$$U(f, h, v) = \mu \sum_{(ij)} [(f_{ij} - f_{i-1j})^2(1 - h_{ij}) + (f_{ij} - f_{ij-1})^2(1 - v_{ij})] + \gamma \sum_{(ij)} [h_{ij} + v_{ij}],$$

где суммирование производится по всем узлам (i, j) дискретной решетки; $f = \{f_{ij}\}$ — значение случайного вектора, соответствующего исходному полю яркостей; $h = \{h_{ij}\}$, $v = \{v_{ij}\}$ — значения полей горизонтальных и вертикальных разрывов соответственно; μ , γ — положительные параметры. Предполагается, что f_{ij} — непрерывные величины. Распределение (1.2) имеет название «слабая мембрана» ("Weak membrane") [2]. Его использование дает неплохие результаты при сглаживании изображений, состоящих из сравнительно гладких участков, разделенных разрывами.

Векторы f , h и v рассматриваются в качестве исходных данных, и их нужно оценивать. Для получения оценок используется условное (апостериорное) распределение $p(f, h, v | g)$ (байесовский подход), где g — наблюдаемые данные. Байесовский подход позволяет учитывать как априорные требования к исходным данным, так и модель их искажения. Для заданной модели шума апостериорное распределение «слабая мембрана» имеет вид [2]:

$$p(f, h, v | g) = Z^{-1} \exp(-U(f, h, v | g)),$$

$$U(f, h, v | g) = \varepsilon^{-1} \sum_{(ij)} (g_{ij} - f_{ij})^2 + \mu \sum_{(ij)} [(f_{ij} - f_{i-1j})^2 (1 - h_{ij}) +$$

$$+ (f_{ij} - f_{ij-1})^2 (1 - v_{ij})] + \gamma \sum_{(ij)} [h_{ij} + v_{ij}],$$
(1.3)

где дополнительно введены следующие обозначения: g_{ij} — компоненты вектора наблюдений g ; $\varepsilon = 2\sigma^2$, σ — дисперсия шума. Первое слагаемое в выражении для $U(f, h, v | g)$ обусловлено выбранной моделью шума, а второе и третье — априорным распределением исходных данных в виде (1.2).

Критерий оптимальности заключается в выборе оценки (f, h, v) , максимизирующей апостериорное распределение исходных данных (МАП-оценивание), что эквивалентно поиску глобального минимума функции энергии $U(f, h, v | g)$ в соответствии с f , h и v . Основная трудность здесь заключается в том, что $U(f, h, v | g)$ не является выпуклой и для нахождения МАП-оценки затруднительно использование простых вычислительных процедур типа градиентного спуска. Для приближенного решения подобных задач невыпуклой оптимизации разработаны специальные методы типа Монте-Карло. Наиболее популярный из них называется «модельный отжиг» [3]. Это итерационная процедура. Она заключается в адаптивном обновлении значений переменных в узлах решетки, причем новые значения выбираются случайным образом из условных распределений этих переменных, в то время как значения в соседних узлах остаются фиксированными. Процесс отжига управляется глобальным параметром, который носит название «температура» или «параметр выравнивания ловушки» и обычно обозначается буквой T . Доказано [3], что при некотором выборе режима понижения температуры в зависимости от номера итерации модельный отжиг асимптотически сходится к глобальному решению. Практически для получения удовлетворительных результатов требуется от нескольких десятков до нескольких сотен итераций. Таким образом, вычислительная сложность алгоритма достаточно велика, и поэтому часто оказывается предпочтительным использование детерминированных процедур, позволяющих снизить вычислительные затраты.

В работе предлагается простая итерационная детерминированная процедура получения оценок, близких к оптимальным, допускающая параллельное выполнение без использования глобальной синхронизации вычислений (требуется лишь локальная синхронизация). Это, включая детерминированность, особенно важно, если речь идет о СБИС-реализации алгоритма. Данный алгоритм является аналогом процедуры «детерминированного отжига» [2], но в отличие от нее не содержит параметров итерационного приближения. Следует отметить, что оценивание этих параметров является глобальной операцией (участвуют все данные) и обычно сопряжено с существенным повышением вычислительных затрат на итерацию.

Достаточно сложным является вопрос, касающийся спецификации параметров апостериорного распределения (1.3). Этот выбор в некоторой степени произволен, но в идеале было бы желательно получать оценки, управляемые данными и основанные на статистических принципах оптимальности. Однако в терминах статистики мы имеем дело с экспоненциальным семейством с неполными данными, а в этом случае оценки, основанные на принципе максимального правдоподобия, часто оказываются неадекватными [4]. Так, авторы работы [2] на базе стандартного метода тихоновской регуляризации получили алгоритм оценивания величины параметра μ по заданному спектру мощности исходного изображения. Предлагаемый нами способ выбора значения μ основан на задании априорной информации другого типа — требуется знание дисперсии разности яркостей в соседних узлах исходного изображения на участках, не содержащих разрывов. Удалось также показать, что при некоторых «естественных предположениях» значение параметра μ может быть зафиксировано и не зависит от конкретной реализации исходных данных. Величина параметра ε , характеризующая шум наблюдений, полагается заданной (это классическое предположение).

Эксперименты представлены сравнением результатов сглаживания, полученных с использованием предложенного алгоритма, а также алгоритмов детерминированного отжига [2], модельного отжига [3] и покоординатного спуска [5] для минимизации функции энергии распределения (1.3).

2. Алгоритм. Как уже отмечалось выше, предлагаемый авторами статьи алгоритм является аналогом процедуры детерминированного отжига, введенной в [2]. В вычислительном плане эта процедура заметно проще модельного отжига. Хотя алгоритм детерминированного отжига в общем случае не позволяет получить оптимальную оценку исходного изображения даже асимптотически, однако, как показывает опыт, его применение дает удовлетворительные результаты. Рассмотрим подробнее, в чем он заключается.

Процедура детерминированного отжига является частным случаем GNC (Graduated Nonconvexity) алгоритма, введенного Блейком и Циссерманом в [6]. Они не рассматривали задачу в рамках статистического подхода, а просто минимизировали функцию, совпадающую с $U(f, h, v | g)$ из (1.3). Блейк и Циссерман ввели семейство функций V_p , непрерывно зависящих от параметра $p \in [0, 1]$ и обладающих следующими свойствами: $V_0 = U(f, h, v | g)$, V_1 — выпуклая, V_p при $p \neq 1$ не являются выпуклыми, и, начиная с $p = 1$, методом градиентного спуска минимизировали V_p , постепенно уменьшая p до нуля. GNC-алгоритм можно интерпретировать как «отслеживание» минимума функции V_1 при ее постепенной трансформации в функцию $V_0 = U(f, h, v | g)$.

Выбор семейства функций V_p достаточно произволен. Так, авторы работы [2] параметризовали апостериорное распределение «слабая мембрана» (1.3) следующим образом: $U(f, h, v | g) \rightarrow U(f, h, v | g)/T$ — и нашли, что при аппроксимации статсуммы Z этого распределения с использованием приближений среднего поля и седловой точки получается семейство функций $V_T(f)$, обладающее вышеперечисленными для V_p свойствами (параметр T играет ту же роль, что и p , но меняется от бесконечности до нуля), при этом необходимые условия на экстремум $V_T(f)$: $dV_T(f)/df_{ij} = 0$ — дают приближенные уравнения на средние значения $\langle f_{ij} \rangle$ переменных f_{ij} из параметризованного распределения (1.3), зависящие от T . GNC-процедура на основе семейства $V_T(f)$ была названа алгоритмом детерминированного отжига. Он обладает тем свойством, что при $T = 1$ дает приближения среднего поля величин $\langle f_{ij} \rangle$, которые, как можно заметить, являются оценками исходного поля яркостей, минимизирующими средние условные потери вида

$$\Phi(f_0) = \sum_{\{f, h, v\}} \|f - f_0\|^2 p(f, h, v | g), \quad (2.1)$$

а при $T \rightarrow 0$ получаются аппроксимации МАП-оценок.

Предлагаемый авторами этой статьи подход состоит в использовании при построении алгоритма сглаживания следующего семейства функций:

$$\begin{aligned}
 V_T(f, h, v) = & \varepsilon^{-1} \sum_{(ij)} (g_{ij} - f_{ij})^2 + \mu \sum_{(ij)} [(f_{ij} - f_{i-1j})^2 (1 - h_{ij}) + \\
 & + (f_{ij} - f_{ij-1})^2 (1 - v_{ij})] + \gamma \sum_{(ij)} [h_{ij} + v_{ij}] - \\
 & - T \sum_{(ij)} \left[\int_{t_0}^{h_{ij}} \log(x^{-1} - 1) dx + \int_{t_0}^{v_{ij}} \log(x^{-1} - 1) dx \right], \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

где t_0 — любое число из интервала $(0, 1)$, переменные h_{ij} и v_{ij} рассматриваются как непрерывные величины, принимающие значения из интервала $(0, 1)$, а оставшиеся переменные и параметры имеют тот же смысл, что и в (1.3).

Приравнивая первые частные производные функции $V_T(f, h, v)$ нулю, получаем необходимые условия на ее экстремум в виде

$$f_{ij} = \frac{g_{ij} + \varepsilon \mu [f_{i-1j}(1 - h_{ij}) + f_{ij-1}(1 - v_{ij}) + f_{i+1j}(1 - h_{i+1j}) + f_{ij+1}(1 - v_{ij+1})]}{1 + \varepsilon \mu [(1 - h_{ij}) + (1 - v_{ij}) + (1 - h_{i+1j}) + (1 - v_{ij+1})]}, \quad (2.3)$$

$$h_{ij} = [1 + \exp([\gamma - \mu(f_{ij} - f_{i-1j})^2]/T)]^{-1}, \quad (2.4)$$

$$v_{ij} = [1 + \exp([\gamma - \mu(f_{ij} - f_{ij-1})^2]/T)]^{-1}.$$

Можно показать, что при $T \rightarrow \infty$ система уравнений (2.3), (2.4) имеет единственное решение, а при $T \rightarrow 0$ $V_T(f, h, v) \rightarrow U(f, h, v | g)$. Следовательно, семейство функций $V_T(f, h, v)$ может использоваться для построения алгоритма типа GNC. При этом для минимизации функций (2.2) при постепенно уменьшающемся значении параметра T удобно воспользоваться процедурой покоординатного спуска [5], так как для данной задачи в этом случае не требуется введение параметров итерационного приближения. В итоге получается алгоритм, требующий сравнительно небольших вычислительных затрат в расчете на итерацию, который схематически можно представить следующим образом.

Алгоритм оценивания исходных данных с обнаружением и выделением разрывов (алгоритм модифицированного детерминированного (МД) отжига). Входные параметры алгоритма: g — наблюдаемые данные; p_{\max} — число итераций; t_{\max} и t_{\min} — максимальное и минимальное значения параметра $t = T^{1/2}$ соответственно.

1. Начальная инициализация: $f = g$, $h = v = 0,5$, $\Delta = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{p_{\max} - 1}$, $t = t_{\max}$, $p = 1$.

2. Последовательная модификация значений элементов массивов f , h , v в соответствии с формулами (2.3) и (2.4) (при параллельном выполнении требуется локальная синхронизация вычислений, которая должна обеспечивать выполнение следующего правила: во время модификаций значений переменных, входящих в левые части уравнений (2.3), (2.4), значения переменных, входящих в правые части, должны оставаться неизменными). Вычисления выполняются «на месте», а порядок модификаций для сходимости не важен.

3. Установка величины параметра t для следующей итерации: $t = t - \Delta$.

4. Проверка условия завершения: $p = p_{\max}$. Если оно не выполнено, то переход к шагу 2, иначе вычисления заканчиваются.

Отметим, что функция $V_T(f, h, v)$ корректно определена для значений масивов f, h, v , которые получаются в результате выполнения итераций предложенного алгоритма, в силу справедливости следующих соотношений:

$$\begin{aligned} 0 < [1 + \exp(\gamma/T)]^{-1} \leq h_{ij} \leq [1 + \exp((\gamma - \mu(2g_{\max})^2)/T)]^{-1} < 1, \\ 0 < [1 + \exp(\gamma/T)]^{-1} \leq v_{ij} \leq [1 + \exp((\gamma - \mu(2g_{\max})^2)/T)]^{-1} < 1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $g_{\max} = \max_{(ij)} |g_{ij}|$.

Данные соотношения следуют непосредственно из формул (2.3), (2.4), если учесть неравенство

$$|f_{ij}| \leq g_{\max}, \quad (2.6)$$

справедливость которого на любой итерации можно доказать, воспользовавшись методом математической индукции. Неравенства (2.5), (2.6) определяют компактное в R^{3N} множество K . То, что каждая модификация на втором шаге алгоритма, действительно, уменьшает текущее значение $V_T(f, h, v)$, является следствием положительности ее вторых частных производных по f_{ij}, h_{ij} и v_{ij} для любых (f, h, v) из K , а вместе с ограниченностью V_T на K это обеспечивает сходимость процедуры покоординатного спуска (второй шаг алгоритма) для любого $T > 0$.

Отметим также, что если в систему уравнений (2.3) подставить выражения для h_{ij} и v_{ij} из (2.4), то она совпадет с системой уравнений на средние значения $\langle f_{ij} \rangle$ переменных f_{ij} , которую получили авторы работы [2], используя приближения среднего поля и седловой точки. Следовательно, предложенный МД-алгоритм так же, как и алгоритм детерминированного отжига, обладает тем свойством, что при $T = 1$ дает аппроксимации оценок исходного поля яркостей, минимизирующих средние условные потери вида (2.1), которые затем при $T \rightarrow 0$ трансформируются в приближения к МАП-оценкам.

3. Выбор значений параметров. Будем предполагать, что количество разрывов в исходном изображении не слишком велико, и, следовательно, статистические зависимости компонент поля f на участках, не содержащих разрывов, можно аппроксимировать плотностью вероятности вида

$$p(f) = Z^{-1} \exp(-U(f)), \quad (3.1)$$

$$U(f) = \mu \sum_{(ij)} [(f_{ij} - f_{i-1j})^2 + (f_{ij} - f_{ij-1})^2].$$

Параметр μ . Будем считать, что известна дисперсия разности яркостей в соседних узлах исходного изображения на участках, не содержащих разрывов. Обозначим данную величину через σ_f . По определению дисперсии и в силу сделанного выше предположения

$$\sigma_f^2 = \langle (f_{ij} - f_{i-1j})^2 \rangle = \langle (f_{ij} - f_{ij-1})^2 \rangle, \quad (3.2)$$

где усреднение осуществляется в соответствии с распределением (3.1). Найдем зависимость μ от σ_f . Статсумма для плотности вероятности (3.1) имеет вид:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\mu \sum_{(ij)} [(f_{ij} - f_{i-1j})^2 + (f_{ij} - f_{ij-1})^2]\right) \prod_{(mn)} df_{mn}. \quad (3.3)$$

Производя в (3.3) замену переменных $f_{ij} \rightarrow f_{ij} \mu^{1/2}$, получаем

$$Z = \mu^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sum_{(ij)} [(f_{ij} - f_{i-1j})^2 + (f_{ij} - f_{ij-1})^2]\right) \prod_{(mn)} df_{mn} = \text{const} \mu^{-N/2}$$

и, следовательно,

$$d\log Z/d\mu = -N/2\mu, \quad (3.4)$$

где N — общее число узлов на участках изображения, не содержащих разрывов. Кроме того,

$$\begin{aligned} d\log Z/d\mu &= Z^{-1} \frac{d}{d\mu} \sum_f \exp(-U(f)) = \\ &= -Z^{-1} \sum_f \left\{ \sum_{(ij)} [(f_{ij} - f_{i-1j})^2 + (f_{ij} - f_{ij-1})^2] \right\} \exp(-U(f)) = \\ &= - \sum_f \left\{ \sum_{(ij)} [(f_{ij} - f_{i-1j})^2 + (f_{ij} - f_{ij-1})^2] \right\} p(f) = \\ &= - \langle \sum_{(ij)} [(f_{ij} - f_{i-1j})^2 + (f_{ij} - f_{ij-1})^2] \rangle. \end{aligned}$$

Знак $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по реализациям случайного поля, распределенного по закону (3.1). С учетом стационарности и изотропности случайного поля f получаем

$$d\log(Z)/d\mu = -2N\langle (f_{ij} - f_{i-1j})^2 \rangle = -2N\langle (f_{ij} - f_{ij-1})^2 \rangle. \quad (3.5)$$

Объединяя (3.2), (3.4) и (3.5), находим соотношение, связывающее величины μ и σ_f :

$$\mu = 1/(4\sigma_f^2). \quad (3.6)$$

Параметр γ . При $T \rightarrow 0$ уравнения (2.4) принимают вид

$$\begin{aligned} h_{ij} &= H((f_{ij} - f_{i-1j})^2 - \gamma/\mu), \\ v_{ij} &= H((f_{ij} - f_{ij-1})^2 - \gamma/\mu), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $H(\cdot)$ — обозначение для функции Хевисайда.

Из (3.7) следует, что величина

$$\xi = (\gamma/\mu)^{1/2} \quad (3.8)$$

при создании разрывов в оценке исходных данных является пороговой для модуля разности оценок яркостей в соседних узлах.

Из (3.6) и (3.8) находим

$$2\gamma^{1/2} = \xi/\sigma_f. \quad (3.9)$$

Таким образом, $2\gamma^{1/2}$ — отношение пороговой величины модуля разности оценок яркостей в соседних узлах к дисперсии модуля разности яркостей в соседних узлах на участках исходного изображения, не содержащих разрывов.

Рассмотрим предельный случай $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда, как следует из уравнения (2.3), $f_{ij} = g_{ij}$, т. е. оценки яркостей совпадают с исходными яркостями. Представляется разумным в данном случае воспользоваться правилом «трех сигм» и положить $\xi = 3\sigma_f$ для того, чтобы в результате оценивания «практически не возникали» разрывы там, где их не содержит исходное изображение (см. (3.7)). Тогда из (3.9) следует, что

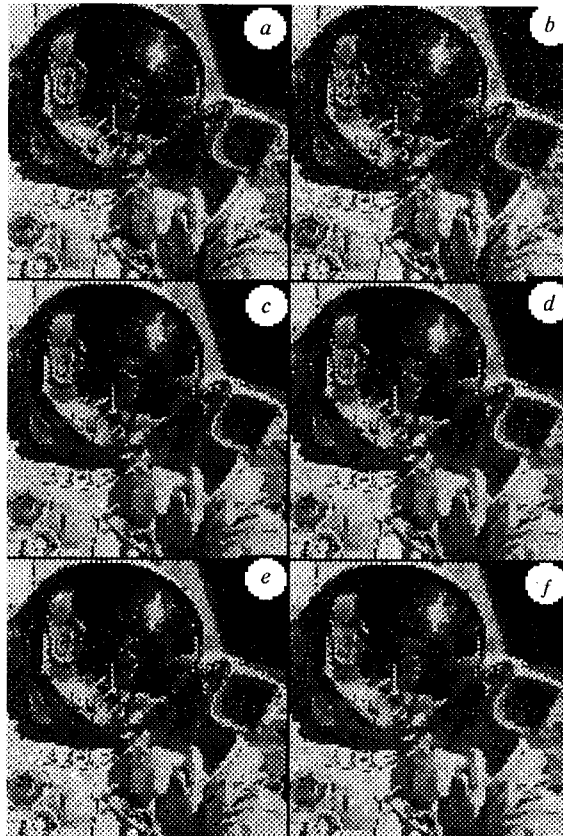
$$\gamma = 2,25. \quad (3.10)$$

Таблица 1

Дисперсия шума	r_{\max}	МД-отжиг, U	Детерминированный отжиг, U	Модельный отжиг, U
10	50	1,526	1,526	1,529
15	50	1,416	1,417	1,413
20	50	1,342	1,336	1,312
25	50	1,261	1,257	1,219
10	200	1,526	1,526	1,526
15	200	1,413	1,414	1,402
20	200	1,336	1,335	1,297
25	200	1,255	1,257	1,192

Величина параметра γ является характеристикой исходных данных, поэтому правило ее выбора не должно зависеть от величины дисперсии шума, а следовательно, использование (3.10) обосновано и при $\epsilon > 0$.

4. Экспериментальные результаты. В табл. 1 приведены удельные (в расчете на один пиксел изображения) значения энергии $U(f, h, v | g)$ для оценок, полученных при использовании различных алгоритмов сглаживания на базе модели «слабая мембрана». В качестве исходного использовалось изображение «скафандр» (см. рисунок, *a*), к которому прибавлялся синтезированный белый гауссов шум. Величина параметра ϵ задавалась равной истинному значению при $\sigma_f = 10$, $\gamma = 2,25$, $t_{\min} = 0,005$, $t_{\max} = 1,8$.



В табл. 2 представлены удельные значения энергии $U(f, h, v | g)$ для оценок, полученных с помощью процедуры покоординатного спуска.

Из табл. 1 и 2 видно, что алгоритм МД-отжига по качеству восстановления изображения близок к процедуре детерминированного отжига и занимает промежуточное положение между алгоритмами покоординатного спуска и модельного отжига, причем использование модельного отжига дает заметный выигрыш лишь на больших шумах.

Отметим также, что скорости сходимости алгоритмов МД-отжига и детерминированного отжига также приблизительно одинаковые (от 10 до 70 итераций в зависимости от величины дисперсии шума), однако вычислительные затраты на итерацию в МД-алгоритме существенно меньше (примерно в 4 раза).

Результаты сглаживания для дисперсии шума, равной 15, показаны на рисунке: a — исходное изображение; b — зашумленное; c — оценка, полученная с использованием алгоритма МД-отжига; d — детерминированного отжига; e — модельного отжига; f — покоординатного спуска.

Заключение. Предложена детерминированная итерационная процедура сглаживания изображений с сохранением разрывов яркости. Эксперименты показали, что по качеству результатов данная процедура не уступает аналогичному ей алгоритму детерминированного отжига, но требует значительно меньших вычислительных затрат. Обоснован способ выбора параметров μ и γ , управляющих сглаживанием.

Т а б л и ц а 2

Дисперсия шума	Покоординатный спуск, U
10	1,580
15	1,522
20	1,473
25	1,375

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982. Т. 2.
2. Geiger D., Girosi F. Parallel and deterministic algorithms for MRF's: Surface reconstruction and integration // IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell. 1991. 12. P. 401.
3. Geman S., Geman D. Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images // IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell. 1984. 6. P. 721.
4. Geman D. Stochastic model for boundary detection // Image and Vision Computing. 1987. 5, N 2. P. 61.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973. Т. 1.
6. Blake A., Zisserman A. Visual Reconstruction. Cambridge, MA: MIT Press, 1987.

Поступила в редакцию 22 ноября 1995 г.