

УДК 681.324

В. А. Воробьев, Н. Л. Еремина, Н. В. Лаходынова

(Томск)

АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ПЕРЕСТРОЙКИ СТРУКТУРЫ  
ПРОЦЕССОРНОЙ МАТРИЦЫ

Предлагается анализ известных алгоритмов перестройки, позволяющий сделать вывод о работоспособности процессорной матрицы и дать рекомендации по выбору резервных элементов.

**Введение.** Данную работу следует рассматривать как продолжение [1]. В [1] предлагались алгоритмы реконфигурации структуры отказоустойчивой процессорной матрицы (ПМ) с перестраиваемым резервом. Рассматривался вариант схемной реализации алгоритмов реконфигурации, где каждый процессорный элемент (ПЭ) матрицы  $ПЭ(i, j)$ ,  $i, j$  — физические координаты ПЭ, снабжался коммутационным окружением, состоящим из коммутатора (мультиплексора) и схемы управления коммутатором. Следует заметить, что с точки зрения надежности и сложности такая реализация не самая удачная. Возможны ее улучшения в следующих направлениях.

Во-первых, можно уменьшить число резервных линий связи, используя альтернативность некоторых соединений, хотя такая экономия приводит к усложнению ПЭ. Во-вторых, можно избавиться от неконтролируемых схем управления коммутациями, если реализовать их функции программно на ПЭ. В-третьих, можно не применять мультиплексоры, а погрузить все ПЭ матрицы в некоторую коммутационную среду, обеспечивающую любые необходимые коммутации. В силу планарности требуемого графа соединений ПМ возможна экономия числа ключей. Такую коммутационную среду могут реализовать, например, резервированные секционированные ключами вертикальные и горизонтальные шины.

Разработка этих усовершенствований является отдельной достаточно сложной задачей. Однако алгоритмы реконфигурации ПМ сами по себе не зависят от способа их реализации. Эти алгоритмы указывают только на то, какие  $ПЭ(i, j)$  и  $ПЭ(k, l)$  должны быть соединены при заданной конфигурации отказов. Таким образом, независимо от способа реализации остается актуальной тематика, касающаяся разработки, верификации и сравнения алгоритмов реконфигурации отказоустойчивых ПМ [2]. В настоящей публикации рассматриваются вопросы верификации и эффективного использования алгоритмов, предложенных в [1].

Напомним кратко суть этих алгоритмов. Перестройка структуры ПМ происходит за счет использования резервных ПЭ и линий связи. Каждый  $ПЭ(i, j)$  ( $i, j$  — физические координаты ПЭ) имеет коммутационное окружение, состоящее из коммутаторов и схемы управления коммутаторами. Коммутационное окружение соединяет  $ПЭ(i, j)$  с исправными соседями так, чтобы получилась квадратная решетка. С точки зрения выбора соседей  $ПЭ(i, j)$  выполняет только одну функцию — выдает сигнал  $e(i, j)$  неисправности:  $e(i, j) = 0$  —  $ПЭ(i, j)$  исправен;  $e(i, j) = 1$  —  $ПЭ(i, j)$  неисправен. Способ получения этого сигнала не существен. Коммутационное окружение выполняет свою функцию коммутации, опираясь на значения всех сигналов  $e(i, j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . При этом в

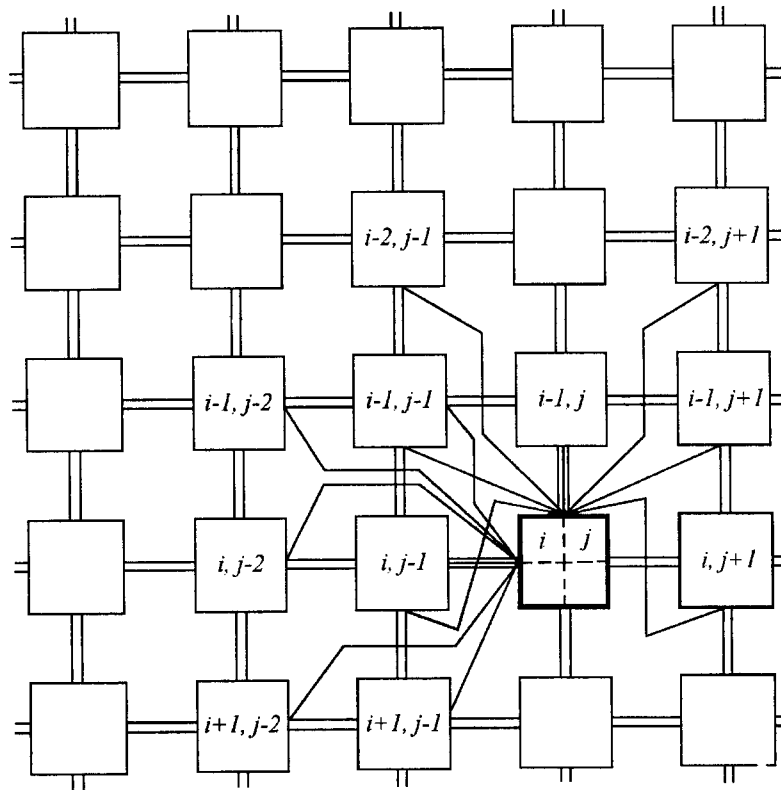


Рис. 1

каждую клетку  $(i, j)$  попадают сигналы  $e(i, j)$  и управляющие сигналы перестройки  $(i, j)$ -го элемента и его соседей по физической структуре. Общая структура связей ПЭ  $(i, j)$  представлена на рис. 1. В конкретных алгоритмах некоторые связи не используются. Заметим, что ПЭ  $(i, j)$  выбирает соседей сверху и слева от себя. Выбор соседей снизу и справа реализуют соседние ПЭ.

Резервирование любой строки или столбца осуществляется с помощью сигналов  $a(i, j)$  и  $b(i, j)$ , подаваемых по шинам извне:  $a(i, j) = 1$  — ПЭ  $(i, j)$  принадлежит резервному столбцу,  $a(i, j) = 0$  в противном случае; аналогично  $b(i, j) = 1$ , если ПЭ  $(i, j)$  принадлежит резервной строке, иначе  $b(i, j) = 0$ .

Матрица разбивается резервными строками и столбцами на подматрицы. Перестройка структуры происходит внутри каждой подматрицы. Если перестройка невозможна, вырабатывается сигнал отказа всей ПМ.

Алгоритм прямой перестройки заключается в том, что отказы ПЭ компенсируются сдвигами используемых ПЭ по физической структуре. Все отказы делятся на вертикальные и горизонтальные. Вертикальный отказ ПЭ  $(i, j)$  вызывает сдвиг нижележащих используемых ПЭ столбца вниз, при этом вырабатывается сигнал вертикального сдвига  $ex(i, j)$ , распространяющийся вниз; горизонтальный отказ сопровождается аналогичным сдвигом ПЭ вправо и выработкой сигнала горизонтального сдвига  $ey(i, j)$ , который распространяется вправо. Сигнал фатального отказа вырабатывается в случае, когда в какой-либо строке содержится более одного горизонтального отказа или имеется столбец с двумя и более вертикальными отказами.

Алгоритм ограниченного захвата позволяет использовать при перестройке элементы соседних строк и столбцов. Матрица просматривается построчно, начиная с нижней строки. При обнаружении самого левого отказа происходит сдвиг вправо, оставшиеся неисправные элементы строки захватывают элементы верхней строки. Фатальный отказ возникает при попытке захвата

неисправного элемента или необходимости захвата для резервной строки. Управляющими сигналами в этом алгоритме являются  $ex(i, j)$  — сигнал наличия неисправных или захваченных элементов в  $i$ -й строке — и  $ey(i, j)$  — сигнал захвата ПЭ( $i, j$ ).

Алгоритм свободного захвата отличается от алгоритма ограниченного захвата тем, что сдвиг вправо происходит в  $i$ -й строке не для самого левого отказа, а для ПЭ( $i, j$ ), имеющего неисправного или захваченного соседа сверху. Если в ПМ такие конфигурации отказов отсутствуют, то алгоритмы функционируют одинаково.

Все эти алгоритмы решают одну и ту же задачу: указывают, какие ПЭ( $i, j$ ) и ПЭ( $k, l$ ) должны быть соединены при заданной конфигурации отказов. В [1] были представлены условия включения коммутаций между ПЭ в виде систем булевых функций. Учитывая, что каждый ПЭ( $i, j$ ) имеет (в зависимости от алгоритма) 14—16 соседей и характеризуется несколькими признаками  $e(i, j)$ ,  $ex(i, j)$ ,  $ey(i, j)$ , ..., которые зависят от состояния всей матрицы и состояния соседей, то становится актуальной задача верификации алгоритмов реконфигурации.

Соединение ПЭ может происходить по цепочкам, состоящим из нескольких линий связи, например, через неисправный элемент с включенной перемычкой. В связи с этим имеет смысл говорить о непротиворечивости коммутаций и цепочек линий связи. Противоречие в алгоритме реконфигурации возникает, например, если выбрать один и тот же ПЭ( $i, j$ ) и в качестве вертикального, и в качестве горизонтального соседа для какого-то одного ПЭ( $k, l$ ). В квадратной решетке такое соединение недопустимо.

Другая задача, возникающая для алгоритмов [1], — эффективный выбор резервных элементов: строк и столбцов. Ниже приводится логический анализ коммутаций и предлагается методика выбора резервных строк и столбцов.

**Логический анализ коммутаций.** В [1] получены условия включения коммутаций для алгоритма прямой перестройки. Способ их получения выглядит приблизительно так. Управляющие сигналы перестройки не являются независимыми: появление сигнала вертикального отказа в ПЭ( $i, j$ ) влечет появление такого же сигнала для всех нижележащих элементов  $j$ -го столбца, если ПЭ( $i, j$ ) нерезервный; выработка сигнала вертикального сдвига ПЭ( $i, j$ ) приводит к отсутствию такого сигнала у элементов  $j$ -го столбца над ним; сигнал горизонтального сдвига нерезервного элемента ПЭ( $i, j$ ) вызывает выработку такого же сигнала справа от него и т. п.

Исходя из таких соотношений между сигналами перестройки и условия сохранения структуры квадратной решетки, можно выписать сигналы коммутаций. Например, условие включения вертикальной коммутации ПЭ( $i - 1, j + 1$ ) и ПЭ( $i, j$ ) получается путем следующих рассуждений. Соединение ПЭ( $i - 1, j + 1$ ) и ПЭ( $i, j$ ) возможно, если в строке  $i$  нет горизонтального сдвига (горизонтального отказа), а в строке ( $i - 1$ ) имеется горизонтальный отказ в  $j$ -м столбце или левее его и проведен сдвиг элементов вправо. Кроме того, необходимо, чтобы сигналы вертикальных сдвигов элементов ( $i, j$ ) и ( $i - 1, j + 1$ ) имели одинаковое значение. Сигналы, не входящие в условие, могут принимать произвольные значения. Таким образом,

$$(i - 1, j + 1) \leftrightarrow y4 = \sim ex(i, j)ex(i - 1, j)[ey(i, j) = ey(i - 1, j + 1)].$$

Выпишем условия включения коммутации для алгоритма прямой перестройки [1].

Сигналы горизонтальной коммутации ( $x1 = dx(i, j)$  — сигнал управления горизонтальной перемычкой):

$$x1 = \sim ex'(i - 1, j)ex(i, j) \vee a(i, j)[\sim ex(i - 1, j) \vee \sim ey(i - 1, j)];$$

$$(i, j - 1) \leftrightarrow (i, j): x2 = \sim dy(i, j) \sim dy(i, j - 1)[ey(i, j) = ey(i, j - 1)];$$

$$(i - 1, j - 1) \Leftrightarrow (i, j): x3 = \sim dy(i, j) [ey(i, j) > ey(i, j - 1)];$$

$$(i + 1, j - 1) \Leftrightarrow (i, j): x4 = \sim dy(i + 1, j - 1) [ey(i, j) < ey(i, j - 1)].$$

Сигналы вертикальной коммутации.

Вертикальная перемишка:

$$y1 = dy(i, j) = ey(i, j) \sim ey(i - 1, j) \vee b(i, j) \sim ey(i, j);$$

$$(i - 1, j) \Leftrightarrow (i, j): y2 = \sim dx(i, j) \sim dx(i - 1, j) [ex(i, j) = ex(i - 1, j)];$$

$$\begin{aligned} (i - 1, j - 1) \Leftrightarrow (i, j): y3 = & ex(i, j) \sim ex(i - 1, j - 1) \sim dx(i, j) \& \\ & \& [ey(i, j) = ey(i - 1, j - 1)] = \\ = & ex(i, j) \sim ex(i - 1, j - 1) \sim dx(i, j) ey(i, j) \& \\ & \& ey(i - 1, j - 1) \vee ex(i, j) \sim ex(i - 1, j - 1) \& \\ & \& \sim dx(i, j) \sim ey(i, j) \sim ey(i - 1, j - 1); \end{aligned}$$

$$(i - 1, j + 1) \Leftrightarrow (i, j): y4 = \sim ex(i, j) ex(i - 1, j) [ey(i, j) = ey(i - 1, j + 1)];$$

$$(i, j - 1) \Leftrightarrow (i, j): y5 = ex(i, j) \sim ex(i - 1, j) ey(i - 1, j - 1) \sim ey(i, j) \& \sim dx(i, j);$$

$$(i, j + 1) \Leftrightarrow (i, j): y6 = \sim ex(i, j) ex(i - 1, j) ey(i, j + 1) \sim ey(i, j) \& \sim dx(i, j);$$

$$\begin{aligned} (i - 2, j - 1) \Leftrightarrow (i, j): y7 = & ex(i - 1, j) \sim ex(i - 2, j - 1) \sim dx(i, j) ey(i - 1, j) \& \\ & \& \sim ey(i - 2, j - 1); \end{aligned}$$

$$(i - 2, j + 1) \Leftrightarrow (i, j): y8 = \sim ex(i - 1, j) ex(i - 2, j) ey(i - 1, j) \sim ey(i - 2, j + 1).$$

Формально непротиворечивость коммутаций означает, что конъюнкция условий пары альтернативных коммутаций должна быть равна 0:  $x_i \& x_j = 0$  и  $y_i \& y_j = 0$  при  $i \neq j$ ;  $x_i \& y_i = 0$  для связей, которые могут быть как вертикальными, так и горизонтальными. Горизонтальная перемишка не является коммутацией в полном смысле. Она не устанавливает связей между элементами и не может противоречить остальным коммутациям. Пары коммутаций (2, 3), (2, 4), (3, 4) непротиворечивы в силу несовместимости условий

$$[ey(i, j) = ey(i, j - 1)]; \quad [ey(i, j) > ey(i, j - 1)]; \quad [ey(i, j) < ey(i, j - 1)].$$

Итак, непротиворечивость горизонтальных коммутаций очевидна.

Рассмотрим вертикальные коммутации. Первая из них — вертикальная перемишка — не может составлять альтернативу остальным коммутациям. Коммутации (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) непротиворечивы в силу несовместимости условий

$$[ex(i, j) = ex(i - 1, j)]; \quad [ex(i, j) > ex(i - 1, j)]; \quad [ex(i, j) < ex(i - 1, j)].$$

Пара коммутаций (2, 7) непротиворечива, хотя коммутации 2 и 7 могут возникнуть одновременно. Те же функции, что и коммутация 7, может выполнять цепочка коммутаций 2, 1, 3 в случае, когда в ПЭ( $i - 1, j - 1$ ) включена вертикальная перемишка. Коммутации (2, 7) непротиворечивы в том смысле, что они участвуют в передаче информации от одного входа к одному и тому же

выходу. Из подобных же рассуждений следует непротиворечивость коммутаций (2, 8) и (3, 7). Непротиворечивость пары (3, 4) следует из ортогональности условий

$$[ex(i, j) > ex(i - 1, j - 1)] = ex(i, j) \sim ex(i - 1, j - 1);$$

$$[ey(i, j) < ey(i, j - 1)] = \sim ex(i, j)ex(i - 1, j).$$

Непротиворечивость коммутаций в парах (3, 5), (3, 6) следует из несовместимости условий

$$[ey(i, j) = ey(i - 1, j - 1)]; \quad [ey(i, j) < ey(i - 1, j - 1)].$$

Рассмотрим пару (3, 8). Имеют место следующие соотношения:

$$ey(i, j) \sim b(i, j) \rightarrow ey(i + 1, j); \quad (1)$$

$$ey(i, j) \rightarrow \sim ey(i - k, j), \quad k > 0. \quad (2)$$

Из соотношения (1) следует ортогональность  $y_8$  и второй конъюнкции  $y_3$ . Из соотношения (2)  $ey(i, j) \rightarrow \sim ey(i - 1, j)$ ; следовательно, первая конъюнкция  $y_3$  также ортогональна  $y_8$  и  $y_3 \& y_8 = 0$ . Далее рассматриваем пары коммутаций (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8). Пара (4, 5) непротиворечива в силу несовместимости условий

$$[ex(i, j) = ex(i - 1, j)]; \quad [ey(i, j) > ey(i - 1, j)].$$

Пара (4, 6) непротиворечива в силу того, что условия

$$[ey(i, j) = ey(i - 1, j + 1)]; \quad [ey(i, j) < ey(i - 1, j + 1)]$$

не могут быть выполнены одновременно. Непротиворечивость пары (4, 7) следует из соотношений

$$ey(i, j) \rightarrow \sim ey(i - 1, j); \quad ey(i - 1, j) \rightarrow ey(i, j).$$

Непротиворечивость пары (4, 8) следует непосредственно из вида функций  $y_4$  и  $y_8$ , а пары (5, 6) — из альтернативности условий

$$[ex(i, j) > ex(i - 1, j)]; \quad [ex(i, j) < ex(i - 1, j)].$$

Непротиворечивость пар (5, 7), (6, 7), (6, 8), (7, 8) очевидна. Непротиворечивость пары (5, 8) следует из соотношения

$$ey(i - 1, j) \rightarrow ey(i, j).$$

Легко проверяется непротиворечивость горизонтальной коммутации 2 и вертикальной 5, горизонтальной коммутации 3 и вертикальной 3. Их альтернативность означает, что связи  $(i, j - 1) \leftrightarrow (i, j)$ ,  $(i - 1, j - 1) \leftrightarrow (i, j)$  не могут одновременно использоваться и как вертикальная, и как горизонтальная; следовательно, количество физических связей можно уменьшить.

Аналогично выписываются и анализируются условия включения коммутаций для алгоритмов ограниченного и свободного захвата.

Для анализа на непротиворечивость этих алгоритмов удобнее использовать запись условий включения коммутаций в дизъюнктивной нормальной форме, привлекая соотношения между сигналами перестройки. Следует

учесть, что в алгоритме ограниченного захвата горизонтальными соседями ПЭ( $i, j$ ) будут ПЭ со следующими координатами: ( $i, j - 1$ ), ( $i + 1, j - 1$ ), ( $i - 1, j - 1$ ), ( $i, j - 2$ ), ( $i + 1, j - 2$ ); вертикальные соседи — ( $i, j - 1$ ), ( $i - 1, j - 1$ ), ( $i - 1, j + 1$ ), ( $i - 1, j$ ). Для алгоритма свободного захвата добавится горизонтальный сосед ( $i - 1, j - 2$ ) и вертикальный ( $i, j + 1$ ).

О выборе резервных строк и столбцов. Отказоустойчивость ПМ характеризуется вероятностью сохранения работоспособности  $P(n, m, p)$ , где  $n$  — количество строк ПМ,  $m$  — количество столбцов,  $p$  — вероятность исправности одного ПЭ. Для матриц небольших размеров вид функции  $P(n, m, p)$  может быть получен в аналитическом виде:

$$P(n, m, p) = \sum_{i=0}^{n \times m} a_i p^{n(m-i)} (1-p)^i,$$

где  $i$  — число неисправных ПЭ. Коэффициенты  $a_i$  определяются полным перебором всех конфигураций и подсчетом числа работающих конфигураций. Отсюда легко определить производные  $P'(n, m, p)$  и  $P''(n, m, p)$  и точки перегиба функции  $P(n, m, p)$  при фиксированных  $n$  и  $m$ . Абсцисса точки перегиба кривой  $P(n, m, p)$ ,  $0 < p < 1$  задает характеристическое значение вероятности  $p = p_n$  исправности ПЭ. Если  $p < p_n$ , функция  $P(n, m, p)$  резко падает до 0 при уменьшении  $p$ , при  $p > p_n$  она стремится к 1. Указанный здесь метод машинного вывода полиномов  $P(n, m, p)$  применялся ранее [3] для оценки порогов просачивания через различные типы решеток и дал хорошие результаты. Величина  $p_n$  быстро стремится к пороговой величине  $p_H$  (порогу просачивания) с ростом  $n$  при  $m = n$ . Следует подчеркнуть аналитический, а не статистический характер получаемого результата.

На рис. 2 видно, что для алгоритма захвата чем меньше  $p_n$ , тем выше лежит график  $P(n, m, p)$  и, следовательно, тем меньше требования к выходу годных ПЭ. Заметим, что этого нельзя сказать об алгоритме прямой перестройки. Обозначения на рис. 2:  $A, B, C$  — алгоритмы свободного захвата, прямой перестройки и ограниченного захвата соответственно с резервной строкой и столбцом;  $D$  — алгоритмы захвата, в которых резервировался только столбец (значения  $P(n, m, p)$  очень близки, так что кривые сливаются). Аналогичные результаты были получены в [1] методом имитационного моделирования при  $n = m = 20$ .

На рис. 3 демонстрируется зависимость  $P(n, m, p)$  от размеров структуры для алгоритма свободного захвата с резервным столбцом и резервной строкой. Видно, что с ростом числа ПЭ требования к надежности отдельного ПЭ возра-

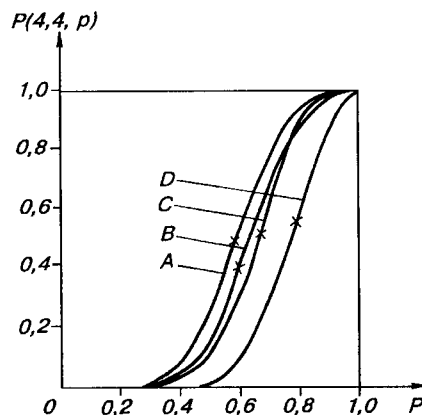


Рис. 2

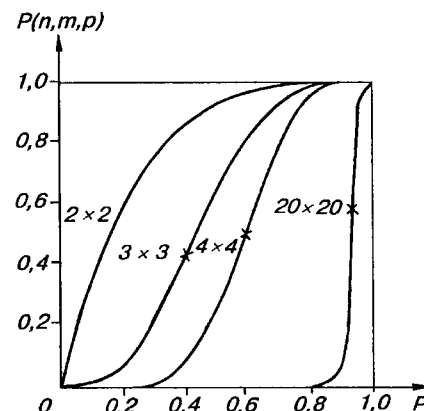


Рис. 3

стают. Абсцисса  $p_n$  точки перегиба кривой  $P(n, m, p)$  «дрейфует» вправо с ростом  $n \times m$ : чем меньше  $p_n$ , тем выше лежит кривая. Учитывая вышеизложенное о точках перегиба, можно провести следующее наблюдение: структура более надежна, если точка перегиба достигается при меньшем значении  $p_n$ .

Значения  $p_n$ , полученные для решеток разных размеров, содержащих не более 18 ПЭ, приведены в табл. 1—5. В табл. 1, 2 даны результаты для ПМ, в которых резервировался только столбец, в табл. 3—5 — строка и столбец. Табл. 5 содержит результаты для алгоритма прямой перестройки.

Исходя из этих результатов, можно сделать следующие выводы. При резервировании только столбца в алгоритмах захвата оказываются более надежными структуры, вытянутые в вертикальном направлении (они имеют меньшие значения  $p_n$ ). То же самое можно сказать об алгоритме свободного захвата с резервной строкой и резервным столбцом. Напротив, при перестройке структур по алгоритму ограниченного захвата и алгоритму прямой перестройки (резервируются строка и столбец по краю ПМ) более надежны структуры, вытянутые в горизонтальном направлении.

Выводы, сделанные для матриц малых размеров, естественно отнести к подматрицам, которые получают разбиением исходной ПМ резервными строками и столбцами.

Таблица 1

Алгоритм ограниченного захвата (резервный столбец)

n	m							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,368	0,636	0,744	0,803	0,840	0,865	0,883	0,897
3	0,464	0,678	0,770	0,820	0,853			
4	0,516	0,702	0,784					
5	0,550	0,719						
6	0,575							
7	0,595							
8	0,612							
9	0,626							

Таблица 2

Алгоритм свободного захвата (резервный столбец)

n	m							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,368	0,636	0,744	0,803	0,840	0,865	0,883	0,897
3	0,452	0,672	0,766	0,818	0,851			
4	0,491	0,689	0,776					
5	0,516	0,700						
6	0,534	0,707						
7	0,549							
8	0,561							
9	0,571							

Таблица 3

**Алгоритм ограниченного захвата  
(резервный столбец, резервная строка)**

n	m							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,000	0,282	0,397	0,463	0,507	0,539	0,564	0,685
3	0,305	0,508	0,591	0,637	0,715			
4	0,445	0,612	0,680					
5	0,529	0,674						
6	0,586	0,668						
7	0,627							
8	0,659							
9	0,584							

Таблица 4

**Алгоритм свободного захвата  
(резервная строка, резервный столбец)**

n	m							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,000	0,225	0,345	0,423	0,478	0,520	0,553	0,580
3	0,216	0,413	0,512	0,575	0,619			
4	0,320	0,500	0,589					
5	0,383	0,551						
6	0,426	0,585						
7	0,457							
8	0,481							
9	0,501							

Таблица 5

**Алгоритм прямой перестройки**

n	m							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,000	0,225	0,345	0,423	0,478	0,520	0,553	0,580
3	0,250	0,445	0,539	0,597	0,638			
4	0,391	0,557	0,635					
5	0,480	0,626						
6	0,543	0,673						
7	0,589							
8	0,625							
9	0,654							



**Заключение.** Итак, в настоящей работе проведен анализ алгоритмов реконфигурации [1] (исследована непротиворечивость условий включения коммутаций), позволяющий сделать вывод об их работоспособности. Предложена методика выбора резервных строк и столбцов или только столбцов. Применяя алгоритмы [1] в зависимости от конкретной конфигурации отказов, можно

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Воробьев В. А., Лаходынова Н. В. Процессорная матрица с перестраиваемой структурой и перестраиваемым резервом // Автометрия. 1994. № 5.
2. Галушкин А. Н., Грачев Л. В., Толстых М. М., Точенов В. А. Оценка алгоритмов реконфигурации структуры вычислительных систем с МИМД-архитектурой // Кибернетика. 1990. № 2.
3. Воробьев В. А., Лаходынова Н. В. Пределы надежности однородных структур // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 3.

*Поступила в редакцию 10 ноября 1995 г.*

---

---

**Реклама продукции в нашем журнале — залог Вашего успеха!**