

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СЕТИ И СИСТЕМЫ  
ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ**

УДК 681.324 : 681.3-192

**Ю. К. Димитриев***(Новосибирск)***АНАЛИЗ САМОДИАГНОСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СТРУКТУР  
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЖИВУЧИХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ\***

Исследуется структурная диагностика многопроцессорных вычислительных систем (ВС) при использовании результатов тестирования, описанных для модели Препараты, Метца и Чиена [1]. Приведена диагностическая модель живучей ВС, с помощью которой получены оценки кратности неисправности для ВС, имеющей диагностическую структуру циркулянтного графа, двумерного тора или булева гиперкуба. Полученные значения кратности неисправности превышают известные для указанных структур.

**Введение.** Практические успехи в создании микроэлектронных устройств с большой степенью интеграции (СБИС) послужили мощным толчком к разработке вычислительных систем (ВС) на базе однокристалльных обрабатывающих модулей (ниже просто модулей), которые состоят из процессора, локальной оперативной памяти и имеют собственные порты для ввода/вывода информации. Построено значительное число экспериментальных и промышленных ВС подобного вида, состоящих из сотен и тысяч модулей. Примером служат транспьютерные ВС.

С применением СБИС сложность ВС переходит рубеж, за которым ее определяющей характеристикой становится не производительность, а способность продолжать работать в течение длительного времени при наличии отказов ее элементов (живучее функционирование). Это требует автоматизировать процедуру определения технического состояния ВС (системы с самодиагностированием). Самодиагностирование живучих ВС должно выполняться с помощью децентрализованных алгоритмов и без использования внешних по отношению к самой системе аппаратурно-программных средств. При самодиагностировании состояние ВС определяется результатом сопоставительного анализа исходов тестирования, выполняемого одними модулями системы над другими. При анализе учитывается диагностическая структура ВС — отношения тестируемый—тестирующий между ее модулями.

Впервые проблема самодиагностирования ВС при множественных отказах исследована в [1] с помощью теоретико-графовой модели. Модель [1] позволила найти значение кратности неисправностей ВС — наибольшего числа  $t$  одновременно присутствующих в системе отказавших модулей, при котором еще сохраняется взаимно однозначное соответствие между результатами тестирования отдельных модулей и состоянием всей ВС (диагностирование без ремонта) или отдельных ее модулей (диагностирование с ремонтом). Синтезированы оптимальные диагностические графы ВС. В оптимальной ВС число

\* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 96-01-01520).

тестов для ее модулей при заданном  $t$  минимально; сокращение числа тестов уменьшает стоимость построения ВС и время самодиагностирования.

Практика построения ВС на базе СБИС состоит в использовании однородных структур, в которых каждый модуль связан с небольшим числом других модулей (рабочий граф, представляющий структуру ВС, заданную ее использованием по назначению, имеет невысокую степень вершин). Применение к подобным структурам результатов классического подхода [1] дает небольшие значения кратности  $t$  неисправности сравнительно с общим числом модулей системы. Это обстоятельство явилось побудительным мотивом разработки новых моделей, учитывающих вероятностные свойства технических состояний системы [2, 3]. К числу таких моделей относится также модель [4], в которой основной целью самодиагностирования для живучей ВС является выделение фактически исправных модулей, а не идентификация неисправных модулей, как в модели [1] и основанных на ее использовании работах: чем раньше будут выделены исправные модули, тем скорее ВС сможет защитить себя от разрушительного воздействия со стороны неисправных модулей. В рамках модели [4] получены оценки кратности неисправности (задача анализа самодиагностируемой ВС) для систем, структура которых представлена графами конечных абелевых групп автоморфизмов.

В данной работе методика [4] получила дальнейшее развитие, что позволило решить задачу анализа новых структур. В разд. 1 статьи описана общая диагностическая модель ВС, введены основные определения. В разд. 2 приведена структура трех подклассов рабочих групп-графов, получивших широкое практическое распространение (циркулянты, торы, булевы гиперкубы), дана характеристика живучести ВС с подобной структурой. В разд. 3 представлена диагностическая модель живучей ВС, а в разд. 4 решена задача анализа выделенных рабочих графов.

1. Диагностическая модель ВС. В диагностическом графе  $G = (V, E)$  системы вершины перенумерованы целыми числами от 0 до  $N - 1$ ,  $|V| = N$ , и соответствуют модулям ВС. Дуга  $(i, j)$  является элементом графа,  $(i, j) \in E$ , если модуль, сопоставленный с вершиной  $i$ , может проверить модуль, сопоставленный с вершиной  $j$ . Перенесем на модель терминологию представляемого ею объекта; в дальнейшем считаем допустимыми выражения типа «неисправная вершина  $i$ », «тест  $(i, j)$ » и т. п. Множество  $F^k$  фактически неисправных вершин, присутствующих в графе, составляет образ неисправности. Принимаем, что мощность образов неисправности не превышает заданного значения  $t$ :  $|F^k| \leq t$ . Все подобные образы неисправности составляют множество  $F(t)$  допустимых состояний системы.

Дуги графа взвешены двоичными значениями результатов оценки состояния его вершин. Вес  $a$  дуги  $(i, j)$  графа и состояние вершин  $i$  и  $j$  связаны следующими соотношениями, называемыми правилами совместности и характеризующими модель [1]:

1)  $a(i, j) = 0$ , если вершина  $i$  считает исправной вершину  $j$ ; иначе  $a(i, j) = 1$ ;

2) значение  $a(i, j)$  достоверно, если вершина  $i$  исправна ( $i \notin F^k$ ); в противном случае значение  $a(i, j)$  случайно и не зависит от фактического состояния  $j$ :  $a(i, j) \in \{0, 1\}$ .

Упорядоченное множество оценок, полученных в присутствии  $F^k$ , образует синдром состояния графа:  $\psi(F^k) = \{a(i, j) : (i, j) \in E\}$ . Из правила (2) совместности следует, что один и тот же образ неисправности  $F^k$  может порождать разные синдромы, а один и тот же синдром может быть совместен с несколькими образами неисправности.

Все задачи об условиях самодиагностируемости ВС сводятся к поиску условий взаимно однозначного соответствия между допустимыми образами неисправности  $F(t)$  и порождаемыми ими синдромами  $\Psi = \{\psi(F^k) : F^k \in F(t)\}$ . Значение  $t$ , составляющее решение задачи анализа диагностического графа, интерпретируется как наибольшая мощность образов неисправности, при которой такое взаимно однозначное соответствие еще существует. Для исполь-

зуемых правил совместности в [1] получено:  $t \leq \lfloor (N - 1)/2 \rfloor$ , где  $\lfloor x \rfloor$  — наибольшее целое, не превышающее значения  $x$ .

Граф  $G$  называют  $t$ -диагностируемым с ремонтом, если для всякого  $F^k \in F(t)$ ,  $F^k \subseteq V$ , на основе анализа каждого  $\psi(F^k)$  можно выделить хотя бы одну вершину  $j \in F^k$ .

**2. Рабочий граф живучей ВС.** В вычислительных системах из большого числа модулей стоимость, надежность и производительность сети связей между ее модулями (структуры ВС) определяют эффективность использования ВС в целом. Структура ВС выбирается так, чтобы оптимизировать значение совокупности показателей надежности и производительности системы при заданных стоимостных ограничениях. Теоретико-графовой характеристикой надежности и производительности структуры ВС является диаметр рабочего графа, а характеристикой стоимости — степень  $\Delta$  его вершины.

Задача синтеза графа, оптимизирующего значения указанных показателей, известна как задача о  $(\Delta, d)$ -графе. При ее решении рассматривают три величины: число вершин  $N$ , степень  $\Delta$  и диаметр  $d$  графа. Эти величины взаимно зависимы, и значения любых двух из них ограничивают значение третьей. Обычно из-за жестких технологических, конструктивных и экономических ограничений параметр  $\Delta$  при синтезе оптимального графа ВС является задаваемым. Имеется ряд работ (см., например, [5]), в которых задача о  $(\Delta, d)$ -графе решается при дополнительном условии, что для графа можно построить простой и эффективный отказоустойчивый алгоритм маршрутизации.

В практике проектирования ВС заметна тенденция к использованию однородных вершинно-симметричных рабочих графов  $G$  со степенью вершин, не превышающей значения  $\log_2 N$ . Применение однородных графов позволяет в полной мере использовать преимущества групповой технологии производства СБИС. В вершинно-симметричном графе все вершины эквивалентны по их положению. Это позволяет применять для управления системой децентрализованные отказоустойчивые алгоритмы, упрощает структуру операционной системы, в частности, облегчает построение операционной системы для наращиваемой ВС. Отмеченные свойства делают вершинно-симметричные графы привлекательными также и для использования в живучих ВС.

В работах [6, 7] задача о  $(\Delta, d)$ -графе решена для однородных вершинно-симметричных графов как задача поиска графа с минимумом диаметра  $d$  и среднего диаметра  $\bar{d}$  среди всех графов выделенного класса, имеющих  $N$  вершин и степень  $\Delta$ .

Для оценки свойства живучести рабочего графа использована вектор-функция

$$L(G) = (L_r(G : p, p')), \quad r \in \{2, 3, \dots, N\},$$

где  $L_r(G : p, p')$  — вероятность существования в ВС, представленной графом  $G$ , совокупности из  $r$  исправных модулей, соединенных исправными линиями связи, при заданных коэффициентах готовности  $p, p'$  модуля и линии связи соответственно. (Заметим, что функционирование синтезируемой живучей ВС основано на концепции виртуальной подсистемы. Реализация этой концепции позволяет выполнять параллельную программу пользователя на произвольной совокупности исправных модулей, соединенных исправными линиями связи [7]. Физическая подсистема, реализующая заданную виртуальную, может изменяться по числу составляющих ее модулей или используемых линий связи адекватно техническому состоянию ВС. Это меняет время решения задачи пользователя, но не отражается на возможности самого решения.)

Статистические эксперименты [7, 8] показали: 1) значения координат вектор-функции  $L(G)$  для заданных  $N$  и  $\Delta$  возрастают при уменьшении диаметра рабочего графа, а заданной вероятности существования подсистемы из  $r$  исправных модулей можно достичь для графа с меньшим диаметром при использовании менее надежной системы связи; 2) даже при достаточно низких

(менее 0,9) значениях коэффициентов готовности имеется близкая к единице вероятность того, что в системе исправны и соединены исправными линиями связи от 0,8 до 0,9 общего числа модулей; 3) при  $\Delta \geq 8$  степень графа не оказывает заметного влияния на значения координат  $L(G)$ . Последнее сужает область поиска графов с экстремальными значениями  $d$  и  $\bar{d}$ , а в практическом плане оправдывает использование удобных для микроэлектронной реализации рабочих графов с малой степенью вершин.

В [6, 8] разработаны методы синтеза и построены каталоги структур ВС, представляемых графами коммутативных групп. Универсальность и перспективность модели структуры ВС, основанной на использовании групп-графов, показана в [9].

Рабочий граф  $G$  описывается как граф собственной группы  $\Gamma$  автоморфизмов, которые сохраняют отношение смежности и отметки ребер. Роль групповой единицы при мультипликативном (или нуля при аддитивном) представлении группы выполняет тождественная подстановка, а в качестве групповой операции используется операция умножения (сложения) — последовательного применения — автоморфизмов. Образующие элементы  $\Gamma_0 = (g_0, g_1, \dots, g_{n-1})$ ,  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ,  $n \geq 1$ , группы можно выбрать так, что рабочий граф совпадет с диаграммой Кэли своей группы автоморфизмов с точностью до направления его дуг. Мы рассматриваем абелевы группы, в которых множество  $\Gamma_0$  замкнуто относительно обратного элемента. В абелевых (коммутативных) группах тривиально решается проблема распознавания тождества слов и, следовательно, проблема маршрутизации. Замкнутость  $\Gamma_0$  относительно обратного элемента означает, что граф  $G = (V, E)$  группы  $\Gamma$  симметрический: если  $(i, j) \in E$ , то и  $(j, i) \in E$ ,  $i, j \in V$ ; взаимно противоположные дуги  $(i, j)$  и  $(j, i)$  имеют метки образующего элемента  $g_i$  и обратного ему  $(g_i^{-1})$  соответственно. Это свойство отражает способность к диалогу любой пары смежных модулей системы.

Опишем теперь выделенные классы рабочих графов.

$D_n(N)$ -граф. Групп-граф  $D_n(N)$ , где  $n$  — число образующих, равное полу-степени захода (исхода) ( $\Delta = 2n$ ), введен в [6] и является циркулянтом [10] вида  $G(N, s_1, s_2, \dots, s_n)$ . Он содержит  $N$  вершин, пронумерованных  $0, 1, 2, \dots, N-1$ , и имеет вершины  $i \pm s_1, i \pm s_2, \dots, i \pm s_n \pmod{N}$ , смежные с каждой вершиной  $i$ ,  $i \in V$ . Последовательность  $S = \{s_i\}$ ,  $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < (N+1)/2$ , называют последовательностью прыжков. Граф  $D_n(N)$  связан, если и только если наибольший общий делитель чисел  $(N, s_1, s_2, \dots, s_n)$  равен единице. Элементами представляемой  $D_n(N)$ -графом группы являются числа  $0, 1, \dots, N-1$ , групповой единице соответствует число 0, в качестве групповой операции используется бинарная операция сложения по  $\text{mod } N$ , а образующие элементы составляют множество  $S$ . Следовательно, любой элемент  $i$  можно представить в виде

$$i = \sum_{i=0}^{n-1} k_i s_i, \quad \text{где } k_i \geq 0.$$

Привлекательность использования  $D_n(N)$ -графа в качестве рабочего обусловлена следующим:

- 1)  $D_n(N)$ -граф можно построить для любых  $n$  и  $N$ ;
- 2) возможность параметрического задания  $D_n(N)$ -графа позволяет настраивать операционные системы наращиваемых ВС на описание структуры как на параметр;
- 3) маршрутизация в  $D_n(N)$ -графе реализуется с помощью децентрализованного алгоритма и использует нумерацию вершин, основанную на использовании значений прыжков. Такая нумерация названа диофантовой.

В [8] синтезированы  $D_n(N)$ -графы, в которых при заданных  $N$  и  $n$  достигаются минимальные значения  $d$  и  $\bar{d}$  в классе групп-графов, имеющие все допустимые значения прыжков  $S$ . В этих графах для каждого  $l = 0, 1, 2, \dots, d-1$  число  $L_{n,l}$  вершин, находящихся на расстоянии  $l$  от выделенной

вершины (для определенности, соответствующей групповой единице), равно максимально возможному при заданных  $N$  и  $n$ , а при  $l = d$  составляет  $L_{n,d} = N - \sum_{i=0}^{d-1} L_{n,i}$ . Оптимальный граф, в котором  $N = \sum_{i=0}^d L_{n,i}$ , называем предельным и обозначаем  $D_n^*(N)$ . Для  $n = 2$  имеем:

$$L_{2,l} = 4l,$$

$$K_{2,l} = \sum_{i=0}^l L_{2,i} = 2l^2 + 2l + 1.$$

При  $n = 2$   $D_n^*(N)$ -граф имеет параметрическое описание  $(N; s, s + 1)$ , где  $s$  определяется из неравенства

$$2s^2 - 1 \leq N \leq 2s^2 + 2s + 1.$$

Показано [11], что такой граф можно построить для любого  $N$ . Диаметр  $D_n^*(N)$ -графа определяется выражением

$$d = \lceil (\sqrt{2N - 1} - 1)/2 \rceil.$$

Геометрическая интерпретация чисел  $L_{2,l}$  и  $K_{2,l}$  имеет следующий вид. Пусть задана прямоугольная целочисленная плоская решетка. Выберем на ней начальную вершину и направление осей координат  $x$  и  $y$ . Назовем начальную вершину с координатами  $(0, 0)$  вершиной нулевого яруса. Все вершины решетки, смежные с вершиной нулевого яруса, образуют первый ярус. Вершины, смежные с вершинами первого яруса (кроме вершины нулевого яруса), составляют второй ярус и т. д. Описанная конструкция показана на рис. 1, *a*, где число при вершине соответствует номеру яруса. Тогда  $L_{2,l}$  есть число вершин с номером  $l$ , а  $K_{2,l}$  — число вершин с номерами от 0 до  $l$  включительно.

Множество вершин  $D_2^*(N)$ -графа, имеющего  $N = K_{2,l}$ , заключено в правильном ромбе, диагонали которого совпадают с осями координат и имеют длину, равную  $2l$ .  $D_2(N)$ -граф, имеющий  $K_{2,l} < N < K_{2,l+1}$ , можно представить как ромб  $K_{2,l}$ , пополненный вершинами  $(l + 1)$ -го яруса.

Итак,  $D_2(N)$ -граф можно интерпретировать как решетчатый ромб с замкнутыми границами. На рис. 1, *b* и *c* показана структура и диофантова нумерация вершин графов  $D_2^*(41)$  и  $D_2(45)$  соответственно. Оба графа имеют  $s = 4$ .

$E_n(N)$ -граф представляет прямое произведение циклических подгрупп  $C_{P_i}$ :

$$E_n(N) = \bigotimes_{i=0}^{n-1} C_{P_i},$$

где  $P_i$  — порядок  $i$ -й нормальной циклической подгруппы;  $\otimes$  — символ прямого произведения. Для  $E_n(N)$ -графа

$$N = \prod_{i=0}^{n-1} P_i.$$

Отметки дуг этого графа — символы образующих  $g_i$  нормальных циклических подгрупп  $C_{P_i}$ .

Частными случаями класса  $E_n(N)$ -графов являются правильные графы, для которых  $P_i = P$  при всех  $i$ . Такие графы имеют минимальные значения  $d$  и  $\bar{d}$ . Наилучшими по указанному критерию среди  $E_n(N)$ -графов, не являющихся

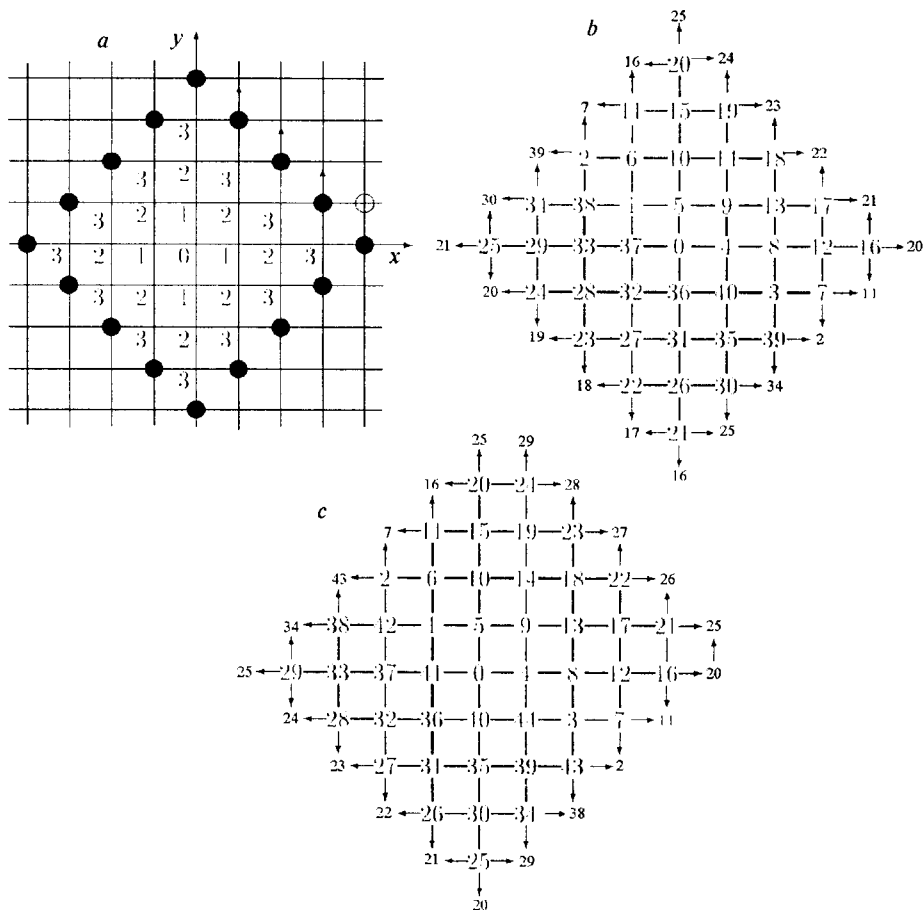


Рис. 1

правильными, будут графы, в которых при заданных  $N$  и  $n$  минимизируется функция [6]:

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \sqrt[n]{N} - P_i \right|. \quad (1)$$

В геометрической интерпретации  $E_2(N)$ -граф есть прямоугольная решетка с замкнутыми границами. С вершинами  $E_2(N)$ -графа сопоставим узлы первого квадранта целочисленной прямоугольной плоской решетки. Нулевая вершина групп-графа  $E_2(N)$  совпадает с началом координат. Узлам оси ординат соответствуют вершины с групповым описанием  $g_0^0, g_0^1, \dots, g_0^{P_0-1}$ , а узлам оси абсцисс — вершины с описанием  $g_1^0, g_1^1, \dots, g_1^{P_1-1}$ .

$B_n$ -граф или  $n$ -мерный булев куб есть правильный  $E_n(N)$ -граф, в котором порядки всех нормальных циклических подгрупп равны двум. Для него используем обозначение  $B_n$ , поскольку значение  $N$  однозначно определяется величиной  $n$ :  $N = 2^n$ .

3. Условия самодиагностирования живучих ВС. Диагностические свойства рабочего графа определяет симметричность его дуг. Из представленных в разд. 1 правил совместности вытекают следующие соотношения между синдромом  $\psi(F^k)$  и порождающим его образом неисправности  $F^k$ .

**Свойство 1.** Пусть  $(a(i, j) = 0) \in \psi(F^k)$ . Для всякого  $F^k \in F(t)$ , если  $i \in (V - F^k)$ , то  $j \in (V - F^k)$ ; если  $j \in F^k$ , то  $i \in F^k$ .

**Свойство 2.** Пусть  $(a(i, j) = 1) \in \psi(F^k)$ . Для всякого  $F^k \in F(t)$  выполняется  $\{i, j\} \cap F^k \neq \emptyset$ .

Для диагностического графа с симметрическими дугами из свойства 1 вытекает

**Свойство 3.** Пусть  $\{a(i, j) = 0, a(j, i) = 0\} \in \psi(F^k)$ . Для всякого  $F^k \in F(t)$  выполняется одно из двух:  $\{i, j\} \subseteq F^k$  или  $\{i, j\} \subseteq V - F^k$ .

Предположим теперь, что  $G = (V, E)$  — диагностический граф с симметрическими дугами и пусть задан синдром  $\psi(F^k)$ ,  $F^k \in F(t)$ . Удалим из  $G$  все дуги  $(i, j)$ , имеющие метку  $a(i, j) = 1$ , и обратные им дуги независимо от их веса. Образующий при этом граф  $G_0$  состоит из сильно связных (по построению) компонент  $G_{01}, G_{02}, \dots, G_{0r}$ . Так как свойство 3 транзитивно, то в графе  $G_0$  состояние вершин каждой компоненты связности совпадает. Если, кроме того, мощность множества вершин некоторой компоненты связности  $G_{0i} = (V_{0i}, E_{0i})$  удовлетворяет условию  $|V_{0i}| > t$ , то  $V_{0i} \subseteq V - F^k$ , поскольку противоположное противоречит предположению о кратности неисправности. Множество  $V_{0i}$  называем диагностическим ядром графа. Составляющие его исправные вершины могут использоваться для определения состояния вершин компонент связности  $G_{0j}$ , смежных с  $G_{0i}$ . Изложенное доказывает следующее

**Утверждение 1.** Пусть  $G = (V, E)$  — граф с симметрическими дугами,  $|V| = N$ , и пусть  $t \leq \lfloor (N - 1)/2 \rfloor$ . Если для любого синдрома  $\psi(F^k)$ , порождаемого каждым из  $F^k \in F(t)$ , подграф  $G_0$  содержит компоненту связности  $G_{0i} = (V_{0i}, E_{0i})$  такую, что  $|V_{0i}| > t$ , то граф  $G$  является  $t$ -диагностируемым с ремонтом.

**4. Анализ диагностических свойств рабочего графа.** Из утверждения 1 следует, что кратность  $t$  неисправности для заданного симметрического графа есть такое максимальное значение, для которого выполняется

$$\min_{1 \leq j \leq t} \min_{1 \leq i \leq k_j} \min_{\psi(F_{j,i}^s) \in \Psi(F_{j,i})} \max_{1 \leq r \leq q(j,i,s)} \{p_r(F_{j,i}^s), \dots, p_{q(j,i,s)}(F_{j,i}^s)\} > t, \quad (2)$$

где  $F_j$  — множество образов неисправности, содержащих в точности  $j$  неисправных вершин;  $k_j = |F_j|$ ;  $q(j, i, s)$  — число компонент связности;  $p_r(F_{j,i}^s)$  — мощность  $r$ -й по счету компоненты связности графа  $G_0$ , индуцируемого синдромом  $\psi(F_{j,i}^s)$ , который порожден образом неисправности  $F_{j,i} \in F_j$ ;  $\Psi(F_{j,i})$  — множество синдромов, порождаемых образом неисправности  $F_{j,i}$ .

Поставленная задача анализа для диагностического графа  $G = (V, E)$  с симметрическими дугами решается за время  $o(|F(t)|)$  [12].

Трудоемкость решения задачи анализа диагностического графа заставляет ограничиться определением оценок значения  $t$ . Значение  $t$  оценивается снизу мощностью максимального множества вершин графа, при удалении которых граф разделяется на две компоненты связности, среди которых хотя бы одна имеет мощность не менее  $t + 1$ .

Назовем одну из образуемых компонент связности отделяемой, а другую — остаточным графом. Примем, что отделяемой является компонента связности, которой принадлежит некоторая выделенная вершина, для определенности — соответствующая единичному элементу группы. Понятно, что множество разделяющих вершин соответствует элементам образа неисправности  $F^k$ , а разделяемые вершины исправны. При заданной мощности образа неисправности  $j$  в классе  $F_j$  максимум числа отделяемых вершин будет получен, если: 1) все отделяемые вершины образуют выпуклое множество минимально возможного (при заданном  $t$ ) диаметра, 2) ни одна из отделяющих вершин не является отделенной.

Рассмотрим изложенное применительно к рабочим графам из разд. 2.

$D_2(N)$ -граф. В соответствии с описанной геометрической интерпретацией отделяемая компонента связности представляет собой ромб с возможно неполностью заполненным последним ( $l$ -м) ярусом, на границе которого (в  $(l + 1)$ -м ярусе) находятся отделяющие вершины. На рис. 1,  $a$  отделяющие вершины принадлежат четвертому ярусу и выделены черными кружками.

Рассмотрим сначала случай, когда расстояние от центральной вершины отделяемой компоненты до граничной вершины (радиус компоненты) таково, что влиянием конечности групп-графа можно пренебречь. Пусть  $|F^i| = L_{2, (i+1)}$ . Легко видеть, что введением единственной дополнительной отделяющей вершины на  $(l + 2)$ -м ярусе и соответствующим перемещением отделяющих вершин из яруса  $(l + 1)$  в ярус  $(l + 2)$  можно изменять число отделяемых вершин от  $K_{2, l}$  до  $K_{2, l} + l$ . Вводимая отделяющая вершина на рис. 1,  $a$  обозначена светлым кружком, стрелками показано направление перемещения отделяющих вершин.

Отделяемую компоненту связности называем устойчивой, если увеличение ее мощности невозможно без введения дополнительной отделяющей вершины. Для  $D_2(N)$ -графа число устойчивых компонент связности равно числу сторон ромба, а мощность их зависит от порядка введения дополнительных отделяющих вершин. Если эти вершины вводятся последовательно в соседние квадранты рассматриваемой координатной плоскости (по часовой стрелке или против нее), то мощность отделяемой компоненты связности принимает последовательно значения  $K_{2, l} + l, K_{2, l} + l + (l + 1), K_{2, l} + l + 2(l + 1), K_{2, (l+1)}$ . Если отделяющие вершины вводятся в накрест лежащие квадранты, то мощность отделяемой компоненты связности принимает последовательно значения  $K_{2, l} + l, K_{2, l} + 2l, K_{2, l} + 2l + (l + 1), K_{2, (l+1)}$ .

Поскольку разница между  $L_{2, l}$  и  $L_{2, (l+1)}$  невелика, ограничимся рассмотрением  $|F^k|$  из ряда  $L_{2, l}, l = 1, 2, \dots$  Легко показать, что при  $l \geq 3$  выполняется

$$K_{2, l} > L_{2, (l+1)}. \quad (3)$$

Поэтому в соответствии с условием разделения конечного графа на две компоненты связности  $|F^k| \leq L_{2, (d-1)}$ , где  $d$  — диаметр графа; при  $|F^k| = L_{2, d}$  в предельном  $D_2(N)$ -графе остаточный граф пуст, а в  $D_2(N)$ -графе, не являющемся предельным, при  $|F^k| = L_{2, (d-1)}$  остаточный граф состоит из компонент связности мощности 1. В [12] доказано следующее

**Утверждение 2.** Оптимальный  $D_2(N)$ -граф, по меньшей мере,  $t$ -диагностируем с ремонтом при

$$t = \begin{cases} L_{2, (d-2)}, & \text{когда } D_2(N)\text{-граф не является предельным и } d < 9; \\ L_{2, (d-1)}, & \text{когда } D_2(N)\text{-граф предельный и } d < 9 \text{ или} \\ & D_2(N)\text{-граф не является предельным и } d \geq 9; \\ L_{2, d}, & \text{когда } d \geq 9 \text{ и } D_2(N)\text{-граф является предельным.} \end{cases}$$

$E_2(N)$ -граф. Примем для порядков нормальных циклических подгрупп  $E_2(N)$ -графа  $P_0 \geq P_1$ . Если радиус отделяемой компоненты связности  $l < P_1$ , то решение изопериметрической задачи об отделяемой компоненте связности соответствует рассмотренному для бесконечного  $D_2(N)$ -графа.

Пусть  $P_0 \geq P_1 + 1$  и  $P_1$  четно. Тогда наибольшее значение  $l$ , при котором конечность порядков образующих еще можно не учитывать, равна

$$l = \lfloor (P_1 - 3)/2 \rfloor. \quad (4)$$



Имеются три устойчивые отделяемые компоненты связности, мощность которых зависит от порядка введения трех дополнительных отделяющих вершин. Если дополнительные вершины вводятся последовательно в соседние квадранты, то мощность отделяемой компоненты связности принимает значения  $(K_{2,l} + l)$ ,  $(K_{2,l} + 2l)$  и  $K_{2,(l+1)}$ . При введении дополнительных отделяющих вершин в накрест лежащие квадранты мощность устойчивой отделяемой компоненты связности принимает значения  $(K_{2,l} + l)$ ,  $(K_{2,l} + 2l + 1)$  и  $K_{2,(l+1)}$ . В рассматриваемом случае наибольшее число отделяющих вершин равно  $2P_1 - 1$ . Структура отделяемой компоненты связности для  $P_1 = 8$  показана на рис. 2, а.

Если  $P_0 \geq P_1 + 1$  и  $P_1$  нечетно, то наибольшее значение  $l$ , при котором влияние конечности порядков образующих можно не учитывать, составляет:

$$l = \lfloor (P_1 - 2)/2 \rfloor. \quad (5)$$

Имеется только одна устойчивая отделяемая компонента связности с мощностью  $(K_{2,l} + 2l + 1)$  и числом отделяющих вершин  $2P_1 - 1$ . Ее структура для  $P_1 = 9$  показана на рис. 2, б.

Для  $P_0 = P_1 = P$  при четном  $P$  конструкция устойчивой отделяемой компоненты связности образуется из конструкции, полученной для  $P_0 = P_1 + 1$ , путем удаления одной из вершин ромба, лежащих на оси  $Ox$ ; на рис. 2, а такой вершиной является вершина  $v$ . В этом случае число отделяемых вершин равно  $K_{2,(l+1)}$ , а число отделяющих —  $(2l - 2)$ . Из рис. 2, б можно понять, что при нечетном  $P$  отделяющее множество совпадает с полученным для  $P_0 = P_1 + 1$  и является максимальным среди удовлетворяющих условию  $|F^i| < 2P_1$ .

Условие  $|F^k| = 2P_1$  кардинально изменяет конструкцию разделяющего множества, а именно:  $E_2(N)$ -граф, имеющий порядки нормальных циклических подгрупп  $P_0$  и  $P_1$ ,  $P_0 \geq P_1$ , для любого целого  $m = 1, 2, \dots, (P_0 - 2)/2$  множеством  $F^k$ ,  $|F^k| = 2P_1$ , образованным из элементов  $g_0^i g_1^0, g_0^i g_1^1, g_0^i g_1^2, \dots, g_0^i g_1^{P_1-1}$  и  $g_0^{i+m+1} g_1^0, g_0^{i+m+1} g_1^1, \dots, g_0^{i+m+1} g_1^{P_1-1}$ , делится на две компоненты связности, которые имеют мощность  $mP_1$  и  $(P_0 - m - 2)P_1$  соответственно. Назовем описанное разделяющее множество  $X$ -множеством. Понятно, что аналогичное свойство имеют  $Y$ -множества вида  $g_0^0 g_1^j, g_0^1 g_1^j, \dots, g_0^{P_0-1} g_1^j$  и  $g_0^0 g_1^{j+k+1}, g_0^1 g_1^{j+k+1}, \dots, g_0^{P_0-1} g_1^{j+k+1}$ , разделяющие  $E_2(N)$ -граф на компоненты связности мощностью  $kP_0$  и  $(P_1 - k - 2)P_0$ ,  $k = 1, 2, \dots, (P_1 - 2)/2$ . Ясно, что если  $2P_0 > kP_1$ ,  $k > 2$ , то  $|F^k| = 2P_0$ , представленное в виде  $X$ -множеств, раз-

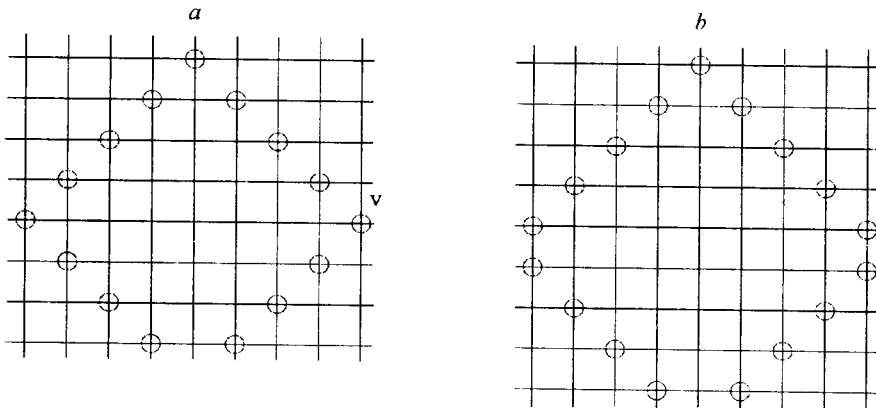


Рис. 2

деляет  $E_2(N)$ -граф более чем на две компоненты связности. Из изложенного вытекает следующее

**Утверждение 3.**  $E_2(N)$ -граф,  $N = P_0P_1$ ,  $t$ -диагностируем с ремонтом, по меньшей мере, при  $t = 2P_1$ , если  $P_0 \geq 7$ .

В классе  $E_2(N)$ -графов при заданном  $N$  наибольшее значение  $t$  имеет граф, удовлетворяющий условию (1). Однако построение ВС с подобной структурой связано с преодолением ряда трудноразрешимых конструктивных проблем, одной из которых является проблема наращивания системы. Для  $E_2(N)$ -графов, имеющих  $P_0 \gg P_1$ , оценка  $t$  в соответствии с утверждением 3 может оказаться неприемлемо низкой. Найдем оценку  $t$  из условия разбиения графа более чем на две компоненты связности.

Рассмотрим компоненту связности  $K_i$ , отделенную от графа с помощью 11-рядок выбора перемещаемых вершин произвольный. Вторая стратегия, названная стратегией формирования правильного полуромба, состоит в упорядоченном перемещении отделяющих вершин. На рис. 3, *a* показан пример увеличения числа вершин в  $K_i$ . Для ее левого  $X$ -множества использована первая, а для правого — вторая стратегия. Номера при узлах решетки соответствуют порядку включения соответствующих вершин в  $K_i$ .

Вторую стратегию можно интерпретировать как вариант первой: плоский перенос применяется к вновь образованным отделяющим вершинам, как только это становится возможным без потери компонентой  $K_i$  свойства отделенности. Возможно сочетание описанных стратегий наращивания  $K_i$ . Конструкция образуемого при этом отделяющего множества показана на рис. 3, *b* и называется производной от  $X$ -множества.

Пусть отделяющее множество  $F^i$  образовано из  $X$ -множеств или их производных и  $|F^i| = kP_1$ , где  $k$  — целое,  $k > 1$ . Такое  $F^i$  разделяет  $E_2(N)$ -граф на  $k$  компонент связности  $K_1, K_2, \dots, K_k$  произвольной мощности. Худшим относительно мощности максимальной компоненты является разбиение  $E_2(N)$ -графа, при котором  $(k - 1)$  компонент имеют мощность  $P_1k$  и одна (остаточный граф, обозначаемый  $K_m$ ) — мощность более  $P_1k$ . Максимальное значение  $k$ , при

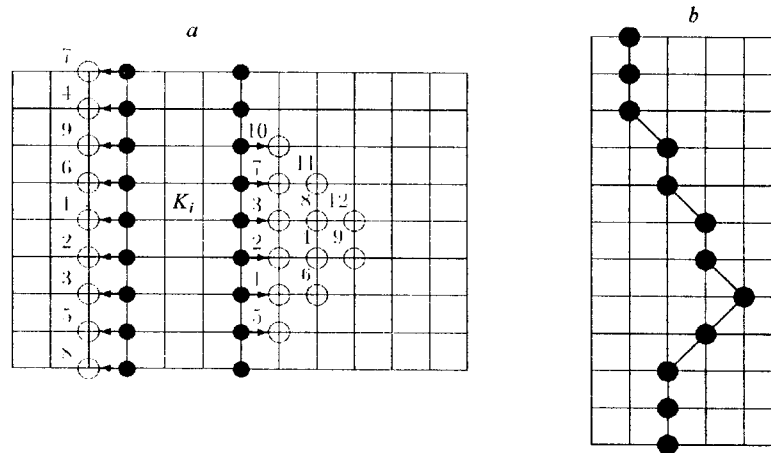


Рис. 3

котором еще возможно указанное разбиение, определяется из неравенства  $P_0 \geq k^2 + k + 1$ . Число вершин компоненты связности равно

$$|K_m| = P_0 P_1 - (k(k-1) + k)P_1 = (P_0 - k^2)P_1 = qP_1,$$

где  $2k + 1 \geq q \geq k + 1$ . Если  $qP_1 - (kP_1 + 1) \geq k + 1$ , то можно увеличить значение  $|F^i|$  на  $w$  вершин так, что  $K_m$  останется максимальной компонентой связности. Оценку значения  $w$  сверху получим из условия

$$w(k-1) + 2w + r(w) \leq qP_1,$$

где первое слагаемое соответствует введению  $w$  дополнительных вершин в каждую из отделяемых компонент связности, второе — приращению  $F^i$  и остаточного графа, а третье — числу вершин, отделяемых от  $K_m$  с помощью  $w$  дополнительных вершин, действующих совместно с отделяющими  $K_m$  производными  $X$ -множеств. Обозначим эту новую компоненту связности через  $R$ .

Максимум значения  $r(w)$  достигается, если отделяющие  $K_m$  производные  $X$ -множества имеют конструкцию такого правильного полуромба, что вместе с  $w$  дополнительными вершинами образуют правильный ромб. Ограничимся нечетными значениями  $w$ , что обеспечивает единственность отделяемой от  $K_m$  компоненты связности  $R$ . Ясно, что при этом  $r(w) = K_{2,l}$  и множество, отделяющее  $R$ , состоит из  $4(l+1)$  вершин. Поскольку  $4(l+1) = 2w + 2$ , то  $l = (w-1)/2$  и

$$r(w) = K_{2,l} = (w-1)^2/2 + w.$$

Значение  $w$  определим как наибольшее целое, удовлетворяющее условию

$$N = P_0 P_1 \geq (k-1)(kP_1 + w) + (kP_1 + w) + K_{2,l} + [(kP_1 + w) + 1],$$

где первое слагаемое соответствует числу отделенных вершин, второе — числу отделяющих вершин в производных  $X$ -множествах, третье — компоненте связности  $R$  и четвертое — остаточному графу. После преобразований получаем

$$2P_0 P_1 \geq w^2 + 2(k+1)w + (2kP_1(k+1) + 2).$$

Решение этого неравенства дает такое  $w$ , что  $t(X) \geq \lfloor k \rfloor P_1 + \lfloor w - 1 \rfloor$ .

Выполняя аналогичный анализ для производных  $Y$ -множеств, получаем  $t(Y) \geq \lfloor m \rfloor P_0 + \lfloor u - 1 \rfloor$ . Таким образом мы доказали следующее

**Утверждение 4.**  $E_2(N)$ -граф,  $N = P_0 P_1$ ,  $t$ -диагностируем с ремонтом, по меньшей мере, при  $t = \min(t(X), t(Y))$ .

*$B_n$ -граф.* Решение изопериметрической задачи для  $B_n$ -графа составляют вершины, удаленные от выбранной центральной на расстояние  $k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ; число таких вершин равно  $C_n^k$ . Рассмотрение таблицы биномиальных коэффициентов  $C_n^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , (треугольник Паскаля) позволяет заметить, что при  $n \geq 5$  описанное множество из  $C_n^k$  вершин делит  $B_n$ -граф на две компоненты связности с числом вершин  $\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j$  и  $\sum_{j=0}^{n-(k+1)} C_n^j$ , которые удовлетворяют условию

$$C_n^k < \max \left( \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j, \sum_{j=0}^{n-(k+1)} C_n^j \right).$$

Поскольку  $C_n^k = C_n^{n-k}$ , то

$$\max_{0 \leq k \leq n} (C_n^k) = C_n^{\lfloor n/2 \rfloor},$$

что доказывает следующее

**Утверждение 5.**  $B_n$ -граф  $t$ -диагностируем с ремонтом, по меньшей мере, при  $t = C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$ .

Известно, что  $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$ ; отсюда

$$C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} = C_{n-1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} + C_{n-1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1}.$$

Поскольку  $C_{n-1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} = C_{n-1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1}$  для четного  $n$  и  $C_{n-1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} > C_{n-1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1}$  для нечетного  $n > 5$ , то можно записать

$$C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 2C_{n-1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \quad \text{для } n > 5. \quad (6)$$

Применяя (6) рекурсивно к его правой части и учитывая, что равенство имеет место только для нечетных  $n$ , получаем

$$C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} < 2^k C_{n-k}^{\lfloor (n-k)/2 \rfloor} \quad \text{для } k = 1, 2, \dots, n-6. \quad (7)$$

Подстановка в (7) максимального значения  $k$  дает

$$C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} < 2^{n-6} C_6^3.$$

Рассмотрим  $B_n$ -граф как композицию из  $2^{n-6}$  непересекающихся  $B_6$ -графов, в которой отделяющее множество составляют вершины, находящиеся на расстоянии 6 от соответствующих выделенных вершин:  $M = \cup_{i=0}^{n-6} M_6^3(i)$ . Это множество разделяет  $B_n$ -граф на две компоненты связности равной мощности. В самом деле, рассмотрим  $B_6$ -граф, в котором  $M$  — множество отделяющих вершин, находящихся на расстоянии  $n/2$  от выделенной (нулевой) вершины. Обозначим:  $A_0^{(6)}$  — компонента связности, которой принадлежит выделенная вершина, и  $A_1^{(6)}$  — остаточный  $B_6$ -граф. Поскольку  $n$  четно, то  $|A_0^{(6)}| = |A_1^{(6)}|$ . Образует теперь  $B_7$ -граф как композицию двух  $B_6$ -графов:

$$B_6^{(1)} = A_0^{(1)} \cup M^{(1)} \cup A_1^{(1)} \quad \text{и} \quad B_6^{(2)} = A_0^{(2)} \cup M^{(2)} \cup A_1^{(2)}.$$

В  $B_7$ -графе каждая вершина из  $B_6^{(1)}$  соединена в точности одним ребром с вершиной из  $B_6^{(2)}$  (эти вершины в  $B_6$ -графе имеют одинаковые двоичные номера). Следовательно, множества  $A_0 = (A_0^{(1)} \cup A_0^{(2)})$  и  $A_1 = (A_1^{(1)} \cup A_1^{(2)})$  связны и имеют (по построению) одинаковую мощность.

Покажем теперь, что  $A_0$  и  $A_1$  разделены. Достаточно доказать, что в  $B_7$ -графе не существует пути из  $A_0^{(1)}$  ни в  $A_1^{(1)}$ , ни в  $A_1^{(2)}$ . Предположим обратное. Если имеется путь из  $A_0^{(1)}$  в  $A_1^{(1)}$ , то из отделенности  $A_0^{(1)}$  от  $A_1^{(1)}$  в  $B_6^{(1)}$ -графе следует, что этот путь должен включать вершины из  $A_0^{(2)}$ , т. е. в искомый путь должны входить ребро из  $A_0^{(1)}$  в  $A_0^{(2)}$  и ребро из  $A_0^{(2)}$  в  $A_1^{(1)}$ , что противоречит условию единственности связей между вершинами  $B_6^{(1)}$  и  $B_6^{(2)}$  в  $B_7$ -графе. Следовательно, путь из  $A_0^{(1)}$  в  $A_1^{(1)}$ , включающий вершины из  $A_0^{(2)}$ , не существует. Значит, если  $A_0$  и  $A_1$  связны, то имеется путь из  $A_0^{(1)}$  в  $A_1^{(2)}$ , включающий ребро из  $A_0^{(1)}$  в  $A_0^{(2)}$  и ребро из  $A_0^{(2)}$  в  $A_1^{(2)}$ . Однако  $A_0^{(2)}$  отделено от  $A_1^{(2)}$  в  $B_6^{(2)}$ -графе, и, следовательно,  $A_0$  и  $A_1$  не связны.

Аналогично рассуждая, можно показать, что в  $B_{6+k}$ -графе, представляемом как композиция из  $2^k$   $B_6$ -графов, множество  $M^{(1)} \cup M^{(2)} \cup \dots \cup M^{(2^k)}$  есть

множество, разделяющее  $B_{6+k}$ -граф на две компоненты связности одинаковой мощности.

Итак, оценка значения  $t$ , получаемая из условия разделения  $B_n$ -графа на две компоненты связности, определяется как

$$t \geq 2^{n-6} C_6^3 = 20 \cdot 2^{n-6},$$

где  $n \geq 6$ . Поскольку в  $B_6$ -графе имеются вершины из  $A_0$  ( $A_1$ ), смежные четверем отделяющим вершинам, то без нарушения указанного условия можно добавить для  $B_n$ -графа еще  $n - 5$  отделяющих вершин. Эти вершины вместе с

N	t				N	t			
	Достаточное условие	$D_2$	$E_2$	$B_n$		Достаточное условие	$D_2$	$E_2$	$B_n$
13	5	4	—	—	$361 = 19 \times 19$	36	48	64	—
$25 = 5 \times 5$	7	8	10	—	$365 = 73 \times 5$	37	52	40	—
$32 = 8 \times 4$	9	8	9	10	421	39	56	—	—
$40 = 8 \times 5$	10	8	11	—	$480 = 48 \times 10$	41	64	61	—
41	10	12	—	—	$480 = 24 \times 20$	41	87	83	—
$60 = 10 \times 6$	13	12	15	—	481	41	60	—	—
61	13	16	—	—	$484 = 22 \times 22$	41	60	89	—
$64 = 8 \times 8$	13	16	19	21	$512 = 32 \times 16$	43	60	81	164
$81 = 9 \times 9$	15	16	19	—	$540 = 30 \times 18$	44	60	77	—
$84 = 14 \times 6$	16	16	18	—	$540 = 27 \times 20$	44	60	83	—
$84 = 12 \times 7$	16	16	18	—	$545 = 109 \times 5$	44	64	46	—
$85 = 17 \times 5$	16	20	16	—	613	47	68	—	—
$110 = 11 \times 10$	18	20	21	—	$652 = 26 \times 26$	49	68	107	—
113	19	24	—	—	$680 = 40 \times 17$	50	68	90	—
$128 = 16 \times 8$	20	24	25	42	$680 = 34 \times 20$	50	68	101	—
$140 = 14 \times 10$	21	24	33	—	$685 = 137 \times 5$	50	72	55	—
$145 = 29 \times 5$	22	28	25	—	761	53	76	—	—
$180 = 18 \times 10$	24	28	31	—	841	55	80	—	—
181	24	36	—	—	$925 = 37 \times 25$	58	84	130	—
$220 = 22 \times 10$	27	36	59	—	1013	61	88	—	—
$221 = 17 \times 13$	27	40	40	—	$1024 = 32 \times 32$	61	88	161	325
$225 = 15 \times 15$	28	40	54	—	$1105 = 65 \times 17$	64	92	121	—
$256 = 16 \times 16$	29	40	49	83	$2048 = 64 \times 32$	88	124	243	646
$265 = 53 \times 5$	30	44	31	—	$4096 = 64 \times 64$	125	176	471	1287
313	33	48	—	—	$8192 = 128 \times 64$	177	252	673	2568

уже введенными отделяющими вершинами не образуют новых компонент связности. Отсюда вытекает следующее

**Утверждение 6.**  $B_n$ -граф, по меньшей мере,  $t$ -диагностируем с ремонтом при  $t = 20 \cdot 2^{n-6} + (n - 5)$ .

В таблице приведены значения оценки  $t$  снизу для рассмотренных диагностических графов при некоторых значениях  $t$ . Для сравнения в таблице даны значения кратности, полученные в [1] из достаточного условия  $t$ -диагностируемости с ремонтом, которое имеет вид:  $N \geq \lfloor \{(t + 2)/2\}^2 \rfloor + 1$ .

Оценка  $t$  получена из условия худшего распределения элементов  $F^i$  по ВС — события, имеющего малую вероятность. Следовательно, предложенный метод самодиагностирования при практическом использовании сохраняет работоспособность во многих случаях, когда  $|F^i| > t$ . Это свойство частично компенсирует сравнительно малое значение полученной кратности неисправности  $t$  относительно теоретически предельного:  $t = \lfloor (N - 1)/2 \rfloor - 1$ .

**Заключение.** Известная модель [1] самодиагностируемых ВС обобщена на случай диагностического графа с симметрическими дугами, совпадающего с рабочим графом системы. Использование свойства симметричности дуг позволило свести задачу анализа самодиагностируемости с ремонтом заданного графа к задаче об условиях разделения графа на компоненты связности при удалении его вершин. В такой постановке найдены оценки диагностируемости снизу для трех классов рабочих графов, получивших широкое практическое распространение: циркулянтных графов, торов и булевых гиперкубических графов. На основе описанного метода самодиагностирования могут быть разработаны децентрализованные алгоритмы определения технического состояния распределенных вычислительных систем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Preparata F. P., Metze G., Chien R. J. On the connection assignment problem of diagnosable systems // IEEE Trans. 1967. EC-16, N 6. P. 848.
2. McPherson J. A., Kime C. R. Diagnosis in presence of known faults // IEEE Trans. 1984. C-33, N 10. P. 943.
3. Das A., Thulasiraman K., Agarwal V. K., Lakshmanan K. B. Multiprocessor fault diagnosis under local constraints // IEEE Trans. 1993. C-42, N 8. P. 984.
4. Димитриев Ю. К., Хорошевский В. Г. Вычислительные системы из мини-ЭВМ. М.: Радио и связь, 1982.
5. Pradhan D. K., Reddy S. M. A fault-tolerant communication architecture for distributed systems // IEEE Trans. 1982. C-31, N 9. P. 863.
6. Воробьев В. А. Простейшие структуры однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Новосибирск, 1974. Вып. 60. С. 35.
7. Корнеев В. В. Архитектура вычислительных систем с программируемой структурой. Новосибирск: Наука, 1985.
8. Монахова Э. А. Синтез оптимальных диофантовых структур // Вопросы теории и построения вычислительных систем. Новосибирск, 1979.
9. Akers S. B., Krishnamurthy B. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks // IEEE Trans. Comput. 1989. 38, N 4. P. 555.
10. Boesch F. T., Tindell R. Circulants and their connectivities // J. Graph. Theory. 1984. 8. P. 487.
11. Монахова Э. А. Об аналитическом задании оптимальных двумерных диофантовых структур однородных вычислительных систем // Однородные вычислительные системы. Новосибирск, 1981. Вып. 90. С. 81.
12. Димитриев Ю. К. Самодиагностика модульных вычислительных систем. Новосибирск: Наука, 1993.

*Поступила в редакцию 17 апреля 1996 г.*