РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 1 1997

УДК 535.51.39.012

К. К. Свиташев
(Новосибирск)

СВЯЗАННЫЕ ЭЛЛИПСЫ И СВЯЗАННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Введено понятие центрального ромба эллипса и на этой основе понятие связанных эллипсов как эллипсов, порожденных одним и тем же центральным, но различным образом ориентированным ромбом. Введено также понятие правильного эллипса как эллипса, имеющего в качестве центрального ромба правильный четырехугольник — квадрат. На основе понятия связанных эллипсов вводится понятие связанных эллиптических колебаний.

Овладение техникой измерений оптической эллипсометрии требует от исследователя или инженера-технолога точных и глубоких знаний о свойствах эллиптических колебаний и, собственно, самого эллипса как геометрической фигуры. Цель данной статьи состоит в том, чтобы, прежде всего, обратить внимание на существование весьма специфических пар эллипсов и соответствующих им эллиптических колебаний, которые автор назвал связанными эллипсами и связанными эллиптическими колебаниями. Исследуются некоторые основные свойства таких пар, а также подробно обсуждается непосредственно связанный с рассматриваемым кругом проблем вопрос о взаимосвязи эллипса и прямоугольного треугольника.

I. Центральный ромб эллипса. Правильный эллипс. Связанные эллипсы. Обратимся к рис. 1. На рисунке изображен эллипс $A_1B_1A_2B_2$, фокусы которого соединены отрезками с точками пересечения эллипса с осью ординат канонической для данного эллипса системы координат. Рассмотрим четырехугольник $F_1B_1F_2B_2$. Очевидно, что

$$|OB_1| = |OB_2| = b, \tag{1}$$

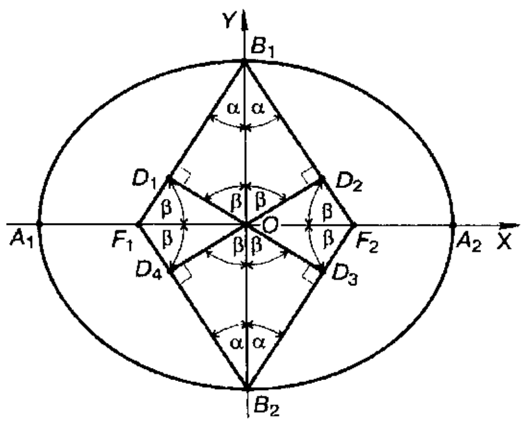

Рис. 1

$$|OF_1| = |OF_2| = f, \tag{2}$$

где b — малая полуось эллипса; f — его фокусное расстояние, и, следовательно, диагонали четырехугольника $F_1B_1F_2B_2$ делятся точкой их пересечения (точкой O) пополам. Ясно также, что $(B_1B_2) \perp (F_1F_2)$.

Таким образом, четырехугольник $F_1B_1F_2B_2$ представляет собой ромб. Будем называть построенный таким образом ромб центральным ромбом для данного эллипса. Для длины стороны центрального ромба по построению*, очевидно, имеем

$$|F_1B_1| = |F_1B_2| = |F_2B_1| = |F_2B_2| = a, \tag{3}$$

где a — длина большой полуоси эллипса.

Центральный ромб эллипса замечателен тем, что он содержит все элементы, необходимые для построения соответствующего ему эллипса. Действительно, сторона этого ромба равна большой полуоси эллипса; его диагонали, лежащие на осях абсцисс и ординат канонической для эллипса системы координат, равны соответственно удвоенному фокусному расстоянию эллипса $2f$ и удвоенной величине его малой полуоси $2b$. Диагонали центрального ромба задают положение осей координат канонической для соответствующего эллипса системы координат, а точка их пересечения — точка O — определяет положения начала этой системы координат и является центром симметрии эллипса. Угловой эксцентриситет соответствующего эллипса также определяется параметрами центрального ромба:

$$e = \frac{f}{a} = \sin\alpha. \tag{4}$$

И наконец, для фокального параметра p эллипса, сопряженного с данным центральным ромбом, имеем [1]

$$p = b\sqrt{1 - e^2} = b\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = b\cos\alpha =$$

$$= |B_1D_1| = |B_1D_2| = |B_2D_3| = |B_2D_4|, \tag{5}$$

где точки D_1, D_2, D_3, D_4 — основания перпендикуляров, опущенных из точек O на стороны ромба F_1B_1, F_2B_1, F_2B_2 и F_1B_2 (см. рис. 1).

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} a\cos\alpha &= b, \\ b\cos\alpha &= p, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

или

$$\left.\begin{aligned} a\sin\beta &= b, \\ b\sin\beta &= p. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Отметим, что при изменении эксцентриситета эллипса e от 0 (для окружности) до 1 (когда эллипс вырождается в отрезок F_1F_2 своей фокальной оси) его центральный ромб изменяется от отрезка оси ординат канонической для эллипса системы координат (равного диаметру соответствующей окружности) до отрезка F_1F_2 оси абсцисс этой координатной системы, совпадающего с самим вырожденным эллипсом.

Особое место в этой эволюции центрального ромба эллипса принадлежит ситуации, возникающей при $e = \sqrt{2}/2$. В этом случае, очевидно, $\alpha = \pi/4$ и центральный ромб эллипса превращается в правильный четырехугольник,

* Имеется в виду построение эллипса с помощью двух булавок, помещенных в фокусы эллипса, и петли из нерастяжимой нити, имеющей, очевидно, периметр $2(a + f)$.

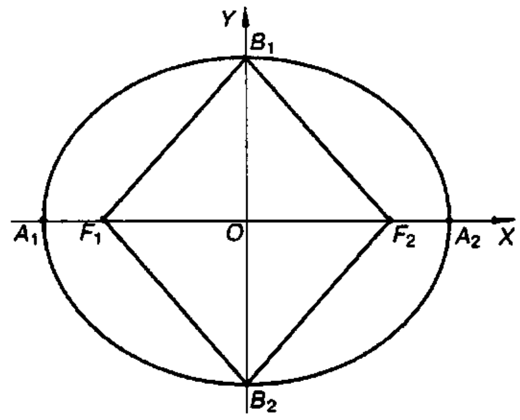

Рис. 2

т. е. в квадрат. Сам эллипс, сопряженный с правильным четырехугольником $F_1B_1F_2B_2$, будем называть правильным эллипсом.

Для правильного эллипса по определению

$$\left.\begin{aligned} e &= \sqrt{2}/2, \\ f &= b. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Правильный центральный ромб $F_1B_1F_2B_2$ (квадрат) и сопряженный с ним правильный эллипс изображены на рис. 2.

Но чем отличается центральный ромб эллипса от любого другого ромба? Ответ очень прост: ничем не отличается. Следовательно, каждому ромбу можно поставить в соответствие некоторый сопряженный с этим ромбом эллипс, т. е. эллипс, параметры которого полностью определены, если рассматривать данный ромб в качестве центрального ромба сопряженного с ним эллипса.

Строго говоря, ситуация является более сложной: каждый ромб в зависимости от ориентации своих диагоналей относительно координатных осей канонической для эллипса системы координат порождает два эллипса, которые будем называть связанными эллипсами. Для первого из этих эллипсов большая диагональ исходного ромба совпадает с осью ординат, а для второго — с осью абсцисс канонической для эллипса координатной системы.

Пример двух связанных эллипсов, порожденных одним и тем же, но различным образом ориентированным исходным центральным ромбом, приведен на рис. 3.

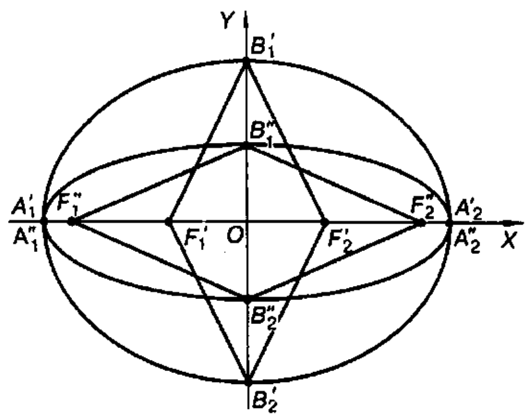

Рис. 3

Отметим некоторые свойства связанных эллипсов.

1. Связанные эллипсы имеют, очевидно, одинаковые большие полуоси.

2. Фокусное расстояние первого из связанных эллипсов равно малой полуоси второго из связанных эллипсов, и, наоборот, фокусное расстояние второго из связанных эллипсов равно малой полуоси первого из связанных эллипсов.

3. Сумма квадратов эксцентриситетов связанных эллипсов равна единице. Действительно,

$$e_1^2 + e_2^2 = \left(\frac{f_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{f_2}{a_2}\right)^2, \tag{9}$$

где e_1 и e_2, f_1 и f_2, a_1 и a_2 — эксцентриситеты, фокусные расстояния и большие полуоси первого и второго из связанных эллипсов соответственно.

Однако в силу указанного выше первого свойства связанных эллипсов

$$a_1 = a_2 = a, \tag{10}$$

а в силу указанного выше второго свойства связанных эллипсов

$$f_2 = b_1, \tag{11}$$

где b_1 — малая полуось первого из связанных эллипсов. С учетом (10) и (11) соотношение (9) принимает вид:

$$e_1^2 + e_2^2 = \frac{1}{a^2}(f_1^2 + b_1^2) = \frac{a^2}{a^2} = 1, \tag{12}$$

что и требовалось доказать.

4. Связанные эллипсы имеют равные произведения фокального параметра на квадрат фокусного расстояния, или, другими словами, отношение фокальных параметров связанных эллипсов обратно пропорционально отношению квадратов их фокусных расстояний.

Действительно, как известно [1],

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= a_1(1 - e_1^2),\\ p_2 &= a_2(1 - e_2^2), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где p_1 и p_2 — фокальные параметры первого и второго из связанных эллипсов, а остальные обозначения имеют тот же смысл, что и выше.

С учетом соотношений (10) и (12) выражение (13) принимает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= ae_2^2,\\ p_2 &= ae_1^2. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Однако по определению, учитывая, что для связанных эллипсов $a_1 = a_2 \equiv a$,

$$e_1 = \frac{f_1}{a} \quad \text{и} \quad e_2 = \frac{f_2}{a}, \tag{15}$$

и, следовательно,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{e_2^2}{e_1^2} = \frac{f_2^2}{f_1^2} \tag{16}$$

или

$$p_1 f_1^2 = p_2 f_2^2, \tag{17}$$

что и требовалось доказать.

5. Сумма фокальных параметров связанных эллипсов равна их общей большой полуоси.

Действительно, используя введенные выше обозначения и учитывая (12) и (13), имеем

$$p_1 + p_2 = a(1 - e_1^2) + a(1 - e_2^2) = 2a - a(e_1^2 + e_2^2) = a, \tag{18}$$

что и требовалось доказать.

6. Правильный эллипс не имеет связанного эллипса или, строго говоря, совпадает со своим связанным эллипсом, являясь в этом смысле двойным эллипсом. В полном согласии с данным утверждением для правильного эллипса получим

$$\left.\begin{aligned} &b = f, \\ &2e^2 = 2(\sqrt{2}/2)^2 = 1, \\ &p = a/2. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

7. Если рассматривать окружность в качестве эллипса с равными полуосями и нулевым эксцентриситетом, то связанным эллипсом для окружности, очевидно, является отрезок прямой, проходящей через центр окружности, равный ее диаметру. При использовании канонической для эллипса системы координат этот отрезок — участок оси абсцисс такой системы, ограниченный точками пересечения этой оси с исходной окружностью. Справедливо также и обратное утверждение: связанным эллипсом для вырожденного эллипса, представляющего собой отрезок прямой, является окружность, центр которой совпадает с серединой исходного отрезка, а диаметр равен длине этого отрезка (рис. 4). Как нетрудно убедиться, указанная «экзотическая» пара связанных эллипсов обладает всеми перечисленными выше свойствами таких эллипсов.

II. **Эллипс и прямоугольный треугольник. Подобные эллипсы.** Очевидно, что центральный ромб эллипса, как любой ромб, делится своими диагоналями на четыре равных прямоугольных треугольника. Очевидно также, что задание только одного прямоугольного треугольника фактически определяет некоторый ромб, и, следовательно, у нас есть все основания утверждать, что коль скоро каждому ромбу можно поставить в соответствие два связанных эллипса, то и каждому прямоугольному треугольнику можно также поставить в соответствие пару связанных эллипсов*.

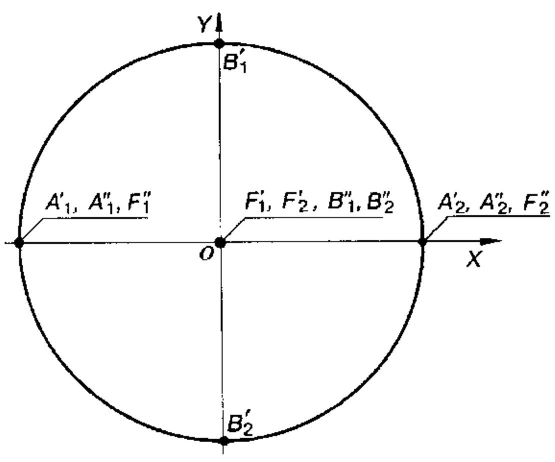

Рис. 4

* Исключение составляет лишь равнобедренный прямоугольный треугольник, поскольку ромб, порождаемый таким треугольником, является правильным четырехугольником (квадратом), а с правильным четырехугольником сопряжен лишь один эллипс — правильный эллипс.

Таким образом, прямоугольный треугольник порождает ромб, а ромб порождает пару связанных эллипсов.

Однако можно, по-видимому, опустить ромб в качестве промежуточной стадии и сразу рассмотреть вопрос о прямоугольном треугольнике и порождаемой этим треугольником паре связанных эллипсов.

Обратимся к рис. 5 и рассмотрим прямоугольный треугольник ABC.

Как нетрудно убедиться, этот треугольник содержит все необходимое для построения сопряженной с ним пары связанных эллипсов.

Действительно:

1. Катеты $\Delta\ ABC$ задают положение осей симметрии, а следовательно, и осей канонической прямоугольной системы координат для обоих связанных эллипсов, сопряженных с $\Delta\ ABC$.

В ситуации, изображенной на рис. 5, b, катет AB задает положение фокальной оси первого из пары эллипсов, сопряженных с $\Delta\ ABC$, а катет AC — положение второй оси симметрии этого эллипса. В соответствии с таким выбором осей симметрии для первого эллипса имеем

$$|AB| = f_1, \tag{20}$$

$$|AC| = b_1, \tag{21}$$

где f_1 — фокусное расстояние; b_1 — малая полуось первого из пары связанных эллипсов, сопряженных с $\Delta\ ABC$.

В ситуации, изображенной на рис. 5, c, уже катет AC задает положение фокальной оси второго из пары эллипсов, сопряженных с $\Delta\ ABC$, а катет AB —

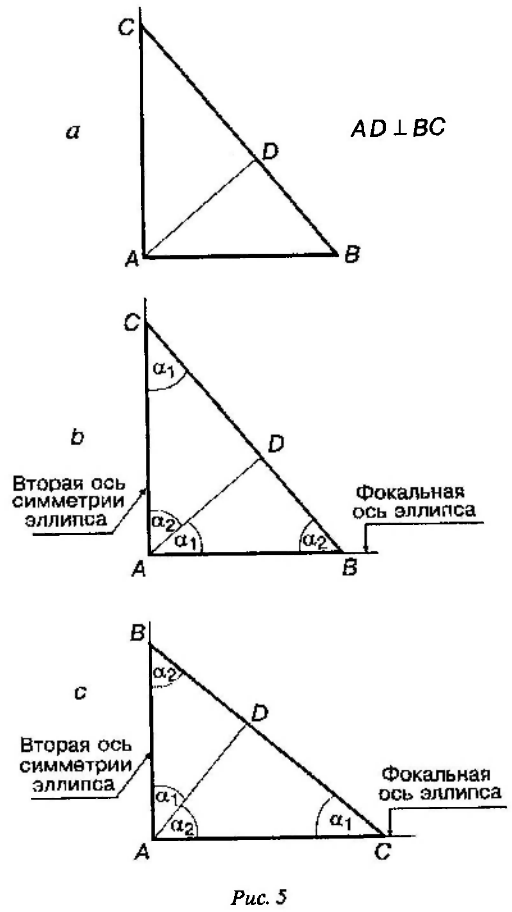

Рис. 5

положение второй оси симметрии этого эллипса. В соответствии с таким вариантом выбора осей симметрии для нашего второго эллипса имеем:

$$|AB| = b_2, \tag{22}$$

$$|AC| = f_2, \tag{23}$$

где f_2 — фокусное расстояние; b_2 — малая полуось второго из пары связанных эллипсов, сопряженных с Δ ABC.

2. Гипотенуза BC прямоугольного Δ ABC равна большой полуоси обоих сопряженных с ним эллипсов (см. рис. 5, b, c).

3. Вершина прямого угла Δ ABC — точка A — определяет положение центра симметрии обоих связанных эллипсов, сопряженных с Δ ABC (см. рис. 5, b, c).

4. Для первого из пары связанных эллипсов, сопряженных с Δ ABC, эксцентриситет e_1 имеет значение

$$e_1 = \sin\angle ACB = \frac{|AB|}{|BC|}. \tag{24}$$

Для второго из пары связанных с Δ ABC эллипсов эксцентриситет e_2 примет следующий вид:

$$e_2 = \sin\angle ABC = \frac{|AC|}{|BC|}. \tag{25}$$

5. Для первого из пары эллипсов, сопряженных с Δ ABC, фокальный параметр p_1 имеет значение (см. рис. 5, b)

$$p_1 = |CD|, \tag{26}$$

где точка D — основание перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу прямоугольного треугольника ABC. Для второго из пары эллипсов, сопряженных с Δ ABC, фокальный параметр p_2 имеет следующее значение (см. рис. 5, c):

$$p_2 = |BD|. \tag{27}$$

Таким образом, информация, «зашифрованная» в произвольном прямоугольном треугольнике о паре сопряженных с этим треугольником связанных эллипсов, является не только вполне достаточной для построения обоих эллипсов, но и исчерпывающей с точки зрения полной характеризации этих эллипсов. Более того, рассмотрение трех пар подобных треугольников, возникающих, как известно, если из вершины прямого угла прямоугольного треугольника опустить перпендикуляр на его гипотенузу, легко позволяет получить все важнейшие соотношения между основными параметрами эллипсов: a, b, f, e и p, а также соотношения между этими параметрами для двух связанных эллипсов, сопряженных с рассматриваемым прямоугольным треугольником.

Получим эти соотношения.

Рассмотрим сначала ситуацию, изображенную на рис. 5, b. В этом случае, очевидно, имеем:

$$\left.\begin{aligned} |BC| &= a_1, \\ |AC| &= b_1, \\ |AB| &= f_1, \\ |CD| &= p_1, \\ \frac{|AB|}{|BC|} &= \sin\alpha_1 = e_1, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

где индексом 1 отмечены основные параметры первого из пары связанных эллипсов, сопряженных с Δ ABC.

Кроме того, ясно также, что

$$|BD| = |BC| - |CD| = a_1 - p_1, \tag{29}$$

$$|AD| = |AC| \sin\alpha_1 = b_1 e_1. \tag{30}$$

Далее, очевидно, имеем три пары подобных прямоугольных треугольников:

$$\Delta\ ABC \sim \Delta\ DAC, \tag{31}$$

$$\Delta\ ABC \sim \Delta\ DBA, \tag{32}$$

$$\Delta\ DAC \sim \Delta\ DBA. \tag{33}$$

Из подобия Δ ABC и Δ DAC следует:

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|CD|}, \tag{34}$$

что с учетом (28) и (30) дает:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{f_1}{b_1 e_1} = \frac{b_1}{p_1}. \tag{35}$$

Из подобия Δ ABC и Δ DBA следует:

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|BD|}, \tag{36}$$

что с учетом (28)—(30) дает:

$$\frac{a_1}{f_1} = \frac{b_1}{b_1 e_1} = \frac{f_1}{(a_1 - p_1)}. \tag{37}$$

Наконец, из подобия Δ DAC и Δ DBA следует:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|BD|}, \tag{38}$$

что с учетом (28)—(30) дает:

$$\frac{b_1}{f_1} = \frac{p_1}{b_1 e_1} = \frac{b_1 e_1}{(a_1 - p_1)}. \tag{39}$$

Обратимся теперь к ситуации, изображенной на рис. 5, c. В этом случае, очевидно, имеем:

$$\left.\begin{aligned} |BC| &= a_2, \\ |AC| &= f_2, \\ |AB| &= b_2, \\ |BD| &= p_2, \\ \frac{|AC|}{|BC|} &= \sin\alpha_2 = e_2, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

где индексом 2 отмечены основные параметры второго из пары связанных эллипсов, сопряженных с Δ ABC.

Кроме того, ясно, что

$$|CD| = |BC| - |BD| = a_2 - p_2, \tag{41}$$

$$|AD| = |AB|\sin\alpha_2 = b_2e_2. \tag{42}$$

И в этом случае, очевидно, имеем те же три пары подобных треугольников, для отношений соответствующих сторон которых выполняются соотношения (34), (36) и (38), что для ситуации, изображенной на рис. 5, c, с учетом (40), (41) и (42) дает:

$$\frac{a_2}{f_2} = \frac{b_2}{b_2e_2} = \frac{f_2}{(a_2 - p_2)}, \tag{43}$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{f_2}{b_2e_2} = \frac{b_2}{p_2}, \tag{44}$$

$$\frac{f_2}{b_2} = \frac{(a_2 - p_2)}{b_2e_2} = \frac{b_2e_2}{p_2}, \tag{45}$$

или, что то же самое,

$$\frac{b_2}{f_2} = \frac{p_2}{b_2e_2} = \frac{b_2e_2}{(a_2 - p_2)}. \tag{46}$$

Иными словами, рассмотрение соотношений (31)—(33) показывает, что для любого эллипса справедливы следующие соотношения между его основными параметрами:

$$\frac{a}{f} = \frac{b}{be} = \frac{f}{(a - p)}, \tag{47}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{f}{be} = \frac{b}{p}, \tag{48}$$

$$\frac{b}{f} = \frac{p}{be} = \frac{be}{(a - p)}. \tag{49}$$

Соотношения (47)—(49) приводят, очевидно, к девяти следующим соотношениям:

$$e = \frac{f}{a}, \tag{50}$$

$$f = \sqrt{a(a - p)}, \tag{51}$$

$$e = \frac{(a - p)}{f}, \tag{52}$$

$$e = \frac{f}{a}, \tag{53}$$

$$p = \frac{b^2}{a}, \tag{54}$$

$$e = \frac{fp}{b^2}, \tag{55}$$

$$e = \frac{fp}{b^2}, \tag{56}$$

$$e = \frac{(a-p)}{f}, \tag{57}$$

$$e = \frac{\sqrt{p(a-p)}}{b}. \tag{58}$$

Кроме того, по теореме Пифагора имеем:

$$a^2 = b^2 + f^2, \tag{59}$$

$$b^2 = p^2 + b^2e^2, \tag{60}$$

$$f^2 = b^2e^2 + (a-p)^2. \tag{61}$$

Среди отношений (50)—(58) встречаются просто одинаковые; исключая их, получаем шесть следующих соотношений:

$$e = \frac{f}{a}, \tag{62}$$

$$f = \sqrt{a(a-p)}, \tag{63}$$

$$e = \frac{(a-p)}{f}, \tag{64}$$

$$p = \frac{b^2}{a}, \tag{65}$$

$$e = \frac{fp}{b^2}, \tag{66}$$

$$e = \frac{\sqrt{p(a-p)}}{b}. \tag{67}$$

Соотношения (59)—(67) могут оказаться весьма полезными при решении целого ряда задач, связанных со свойствами эллипса. Кроме того, данные соотношения позволяют связать между собой параметры первого и второго связанных эллипсов, сопряженных с прямоугольным треугольником ABC. Для определения этих связей проще всего, по-видимому, воспользоваться уже установленными ранее следующими свойствами связанных эллипсов:

$$a_1 = a_2 = a, \tag{68}$$

$$e_1^2 = e_2^2 = 1, \tag{69}$$

$$p_1 + p_2 = a. \tag{70}$$

Приведем только три примера установления таких связей.

Из соотношения (62) в сочетании с (68) сразу имеем

$$\frac{f_1}{e_1} = \frac{f_2}{e_2}. \tag{71}$$

Сочетания (62) и (69) дают:

$$f_1^2 + f_2^2 = a^2. \tag{72}$$

Соотношение (65) в сочетании с (70) дает:

$$b_1^2 + b_2^2 = a^2. \tag{73}$$

Отметим также еще одну взаимосвязь между прямоугольным треугольником и эллипсом: как прямоугольный треугольник определен полностью (и может быть построен), если заданы гипотенуза и один из его катетов или два его катета, или, наконец, один его катет и один из его острых углов, или его гипотенуза и один из его острых углов, так и эллипс полностью определен (и может быть построен), если заданы две его полуоси или одна из его полуосей (любая) и его фокусное расстояние, или, наконец, его эксцентриситет и одна (любая) из его полуосей, или его эксцентриситет и фокусное расстояние.

Таким образом, между прямоугольным треугольником и эллипсом, действительно, существует глубокая взаимосвязь: с каждым прямоугольным треугольником (кроме равнобедренного прямоугольного треугольника) сопряжены два эллипса, которые мы назвали связанными эллипсами; с равнобедренным прямоугольным треугольником сопряжен только один эллипс, который мы назвали правильным, самосвязанным или двойным эллипсом.

В заключение очень кратко рассмотрим вопрос о подобных эллипсах.

Подобными эллипсами весьма естественно назвать эллипсы, порождаемые подобными прямоугольными треугольниками и имеющие одинаковые эксцентриситеты*.

Из такого определения подобных эллипсов непосредственно следует, что для данных эллипсов выполняются следующие соотношения:

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{f'}{f''} = K, \tag{74}$$

$$e' = e'', \tag{75}$$

где a', a'', b', b'', f', f'', e' и e' — большие полуоси, малые полуоси, фокусные расстояния и эксцентриситеты двух подобных эллипсов; K — коэффициент подобия.

Из (74) непосредственно следует еще одно важное для построения подобных эллипсов соотношение:

$$\frac{2l'}{2l''} = \frac{a'+f'}{a''+f''} = \frac{Ka''+Kf''}{a''+f''} = K, \tag{76}$$

где $2l'$ и $2l''$ — периметры петель из нерастяжимой нити, используемых при построении подобных эллипсов.

Таким образом, для подобных эллипсов

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{f'}{f''} = \frac{l'}{l''} = K. \tag{77}$$

Для иллюстрации на рис. 6 приведены два подобных эллипса.

III. **Связанные эллиптические колебания.** Очевидно, связанные эллиптические колебания обладают всеми указанными в предыдущих разделах данной статьи свойствами связанных эллипсов, и нет надобности еще раз их перечислять.

Получим здесь лишь два почти очевидных, но важных, по мнению автора, соотношения: отношение интенсивностей и отношение тангенсов углов «восстановленных» линейных поляризаций для двух световых эллиптически поляризованных лучей света после их прохождения через пластинку в четверть длины волны, оси которой совпадают с осями соответствующих эллипсов по-

* Последнее уточнение является весьма важным. Действительно, каждый прямоугольный треугольник (кроме равнобедренного) порождает два связанных эллипса, эксцентриситеты которых различны. Два подобных неравнобедренных прямоугольных треугольника порождают две пары связанных эллипсов. Эти две пары связанных эллипсов, в свою очередь, распадаются на две пары подобных эллипсов. Каждая пара подобных эллипсов имеет одинаковый эксцентриситет. Эксцентриситеты двух пар подобных эллипсов различны.

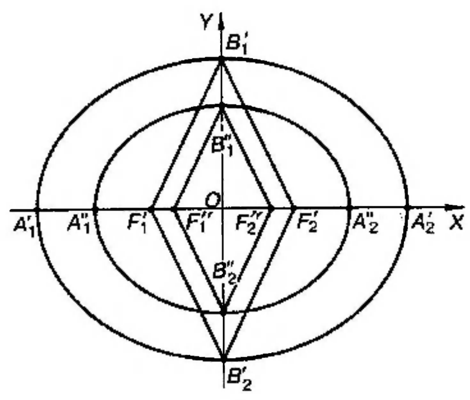

Рис. 6

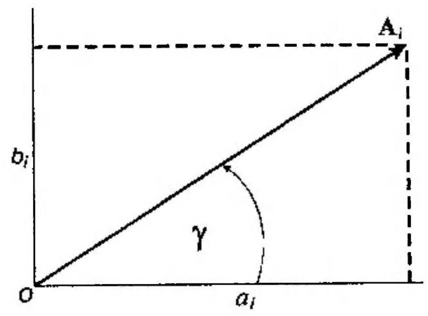

Рис. 7

ляризации, при условии, что эллиптические колебания в рассматриваемых двух световых лучах являются связанными.

Первое из указанных отношений имеет следующий вид:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{|\mathbf{A}_1|^2}{|\mathbf{A}_2|^2} = \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{1 + f_2^2/a^2}{1 + f_1^2/a^2} = \frac{1 + e_2^2}{1 + e_1^2} = \frac{2 - e_1^2}{1 + e_1^2}, \tag{78}$$

где I_1 и I_2 — интенсивности двух световых лучей, эллиптическая поляризация которых описывается связанными эллипсами; $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — амплитуды колебаний электрического вектора в соответствующих лучах после прохождения им соответствующим образом ориентированной пластинки в четверть длины волны и восстановления линейной поляризации (рис. 7, где $i = 1, 2$), а остальные обозначения имеют тот же смысл, что и выше.

Соотношение (78) можно, очевидно, также переписать в виде

$$I_1(1 + e_1^2) = I_2(1 + e_2^2). \tag{79}$$

Второе из рассматриваемых нами отношений имеет следующий вид:

$$\frac{\mathrm{tg}\gamma_1}{\mathrm{tg}\gamma_2} = \frac{b_1}{a_1}\frac{a_2}{b_2} = \frac{f_2}{a}\frac{a}{f_1} = \frac{e_2}{e_1} \tag{80}$$

или

$$e_1\mathrm{tg}\gamma_1 = e_2\mathrm{tg}\gamma_2, \tag{81}$$

где γ_1 и γ_2 — углы восстановленной линейной поляризации (см. рис. 7), а остальные обозначения имеют тот же смысл, что и выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров П. С.** Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 26 ноября 1996 г.