

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

УДК 535.317.1

О. В. Грицкевич, Н. А. Мещеряков, Ю. В. Подъяпольский  
(Новосибирск)

**ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ  
ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ  
НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ**

Металлодиэлектрические криволинейные поверхности вращения (КПВ) находят широкое применение в оптико-электронном и электровакуумном приборостроении. В качестве КПВ чаще используют полусферу, конус, параболу, гиперболу, а также более сложные КПВ, например гиперboloид, переходящий в конус. Вопрос о переносе изображения с КПВ на плоскость возник в связи с необходимостью лазерной размерной обработки поверхностей вращения второго порядка через плоскую маску. При получении рисунков на КПВ необходимо рассмотреть некоторые задачи прикладной математики, так как первостепенное значение имеет задача разработки алгоритма расчета плоской маски, с помощью которой происходит формирование изображения на поверхности сложной формы. Алгоритм расчета рисунка плоской маски основан на предварительном получении аналитического выражения для конфигурации рисунка на КПВ, а затем отображения его в плоскость по заданному закону. Приведен алгоритм расчета плоской маски для получения изображения на следующих поверхностях: сфера, конус, двуполостный гиперboloид вращения.

Металлодиэлектрические криволинейные поверхности вращения (КПВ) находят широкое применение в оптико-электронном и электровакуумном приборостроении [1]. В качестве КПВ чаще используют полусферу, конус, параболу, гиперболу, а также более сложные КПВ, например гиперboloид, переходящий в конус. На основе этих КПВ изготавливают приборы для космической навигации и ориентации, а также различные элементы дифракционной оптики [2]. КПВ (диэлектрик, например, стекло, сапфир и т. д.) покрывают слоем никеля, хрома или меди толщиной до 10 мкм, а затем в этом слое делают разрезы (дорожки) различной ширины и геометрии (эллипс, круг, линии, пятно, крест и т. п.). К дорожкам предъявляют жесткие требования по разбросу неровностей края дорожки и ее глубины. В итоге формируется рисунок определенных размеров и геометрической формы. Для его получения используется метод лазерной фотолитографии и соответствующее оптическое устройство формирования рисунка на КПВ [3, 4]. Оптическое устройство позволяет с помощью сходящихся—расходящихся лазерных лучей в пределах апертуры объектива переносить изображение рисунка с плоской поверхности (маска, фотошаблон) на КПВ.

Перенос изображения с криволинейной поверхности на плоскость используется в геодезии и картографии при построении карт земной поверхности, однако в этом случае перенос изображения ограничивается лишь поверхностью в виде эллипсоида (или шара) на плоскую карту. В нашем случае применяются разнообразные поверхности, описываемые уравнениями второго порядка, часть из которых и будет рассматриваться в этой работе: сфера, конус, двуполостный гиперboloид вращения.

В данном методе получения изображения на поверхностях, описываемых уравнениями второго порядка, реализуется оптическое преобразование изображения с плоской маски на криволинейную поверхность вращения (перенос изображения по проходящему лучу) и искомое изображение на этой поверхности восстанавливается практически без искажений (предполагается идеальное изображение без учета aberrаций и явления дифракции) [4]. Все возможные искажения за счет кривизны поверхности при переносе изображения с поверхности, описываемой уравнениями второго порядка, на плоскость должны быть учтены при расчете плоской маски. Поэтому ни одна из геодезических проекций в данном случае не применима.

Особенности алгоритма формирования рисунка, отображаемого с КПВ на плоскость, следуют из необходимости сохранения как углов и расстояний между элементами рисунка, так и его формы на криволинейной поверхности вращения. Поэтому рисунок на фотошаблоне должен быть таким, чтобы на криволинейной поверхности вращения его изображение было близким к заданному на этой поверхности. При вычислениях аналитических выражений в виде уравнений необходимо исключить все виды возможных искажений рисунка, возникающих из-за кривизны поверхности. Для этого необходимо выполнить три этапа вычислений:

1. При прямом преобразовании найти в виде уравнений аналитические выражения конфигурации рисунка на криволинейной поверхности, описываемой уравнениями второго порядка.

2. Обратное преобразование изображения с КПВ в плоскость маски предполагает формирование рисунка на фотошаблоне, для чего необходимо определить аналитические выражения кривых на плоскости и их область определения, задаваемую координатами крайних точек этих кривых на плоскости.

Предположим, что точечный источник излучения  $A$  находится на конечном расстоянии от центра криволинейной поверхности (рис. 1). В этом случае вид рисунка на плоской маске будет определяться его исходной конфигурацией на криволинейной поверхности вращения и расстоянием от точечного источника излучения до плоской маски  $l$  [4]. Для удобства вычислений совместим плоскость маски с плоскостью  $OYZ$  и введем следующие обозначения:  $x$  — ось вращения криволинейной поверхности, описываемой уравнением второго порядка;  $x_1, y_1, z_1$  — координаты точечного источника излучения;  $x_2, y_2, z_2$  — координаты точечного источника излучения на КПВ;  $X, Y, Z$  — координаты точечного источника излучения на плоской маске.

Зная координаты крайних точек рисунка на КПВ и расстояние от точечного источника излучения до плоской маски, можно вычислить область определения совокупности точек в виде кривых, получаемых на маске в результате переноса. Так как в нашем случае перенос изображения точки с КПВ на

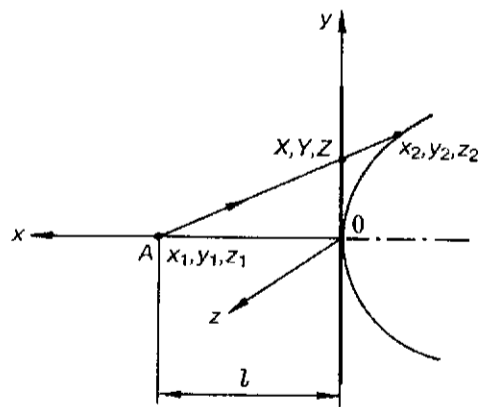


Рис. 1

плоскость осуществляется по лучу, то координаты точек можно описать уравнением прямой в пространстве, проходящей через две точки:

$$\frac{X - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{Z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad (1)$$

где  $x_1 = l, X = 0, y_1 = 0, z_1 = 0$ .

Таким образом, получим выражение

$$\frac{-l}{x_2 - l} = \frac{Y}{y_2} = \frac{Z}{z_2}.$$

В результате преобразований найдем координаты  $Y$  и  $Z$  на плоской маске:

$$Y = \frac{-ly_2}{x_2 - l}, \quad Z = \frac{-lz_2}{x_2 - l}. \quad (2)$$

Рассмотренный случай относится к переносу изображения с КПВ на плоскость в расходящемся пучке лучей.

Аналитическое выражение кривых на плоскости можно получить, решая совместно следующие уравнения: каноническое уравнение КПВ второго порядка, уравнение секущей плоскости и уравнения, задающие угол переноса изображения.

3. Точность отображения рисунка с плоской маски на КПВ зависит от величины шага итераций перемещения по каждому элементу рисунка. Очевидно, чем меньше шаг итераций, тем точнее выдерживается форма каждого элемента рисунка на плоскости и соответственно каждого элемента рисунка на криволинейной поверхности, описываемой уравнением второго порядка.

Таким образом, алгоритм расчета рисунка на плоской маске основан на предварительном получении аналитического выражения в виде уравнений конфигурации элементов рисунка на КПВ, а затем отображения его в плоскость.

Для формирования изображений в реальном времени используется корректор лазерного излучения для получения заданной диаграммы направленности излучения. В нашем случае корректор имеет поверхность сложной формы: конус, переходящий в двуполостный гиперболоид вращения (рис. 2), где  $h$  — высота конуса;  $d$  — диаметр конуса;  $D$  — максимальный диаметр гиперболоида;  $H$  — высота линзы;  $l$  — расстояние от плоской маски до точки проецирования. Геометрия такого корректора в виде КПВ обеспечивает преобразование амплитуды и фазы лазерного излучения.

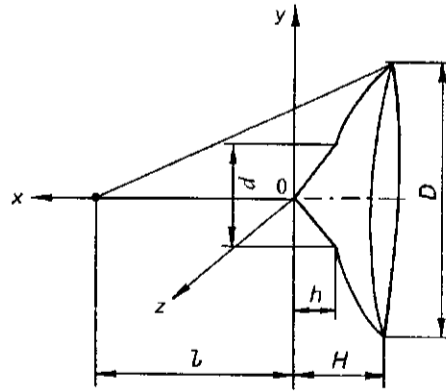


Рис. 2

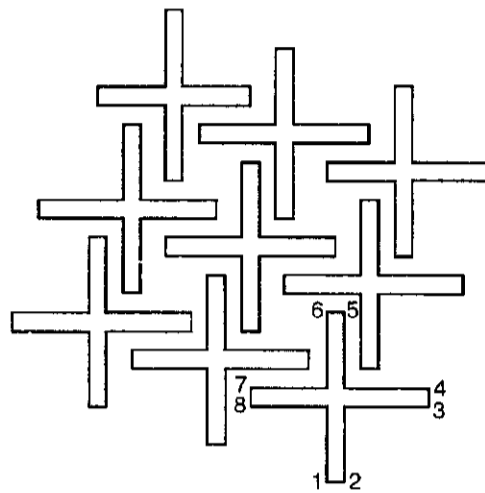


Рис. 3

Двуполостный гиперboloид задан формулой

$$-\frac{(x_2 + \delta)^2}{p} + \frac{y_2^2 + z_2^2}{g} = -1. \quad (3)$$

Здесь  $\delta$  — смещение вершины гиперboloида относительно начала координат;  $p, g$  — постоянные гиперboloы;  $x_2, y_2, z_2$  — текущие координаты поверхности.

Каноническое уравнение конуса будет выглядеть следующим образом:

$$-x_2^2 + \frac{y_2^2 + z_2^2}{k^2} = 0, \quad (4)$$

где  $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{2h}$ .

На основе математического моделирования и физических экспериментов по исследованию прохождения излучения твердотельного лазера в ближней зоне на специальном оптическом стенде, содержащем корректор излучения, определен рисунок на КПВ в виде набора перекрещивающихся горизонтальных и вертикальных периодически повторяющихся линий («крест») (рис. 3). Рассчитан и впоследствии изготовлен корректор лазерного излучения, сформулированы требования к размерам длины и ширины «креста» и взаиморасположения их относительно друг друга.

Периодичность повторения «крестов» задается координатами их центра и определяется уравнениями

$$\begin{cases} y_c(m, n) = Am + Bn, \\ z_c(m, n) = -Bm + An, \end{cases}$$

где  $m$  — номер элемента в ряду;  $n$  — номер ряда;  $A$  и  $B$  — период элементов рисунка.

Определим местоположение координат начала и конца прямых, образующих «крест» (точки 1—8) (см. рис. 3):

$$\begin{aligned} 1) \quad y &= \begin{cases} y_c - L, \\ y_c + L, \end{cases} & z &= z_c - B; \\ 2) \quad z &= \begin{cases} z_c - B, \\ z_c + B, \end{cases} & y &= y_c + L; \end{aligned}$$

$$3) y = \begin{cases} y_c + L, \\ y_c - L, \end{cases} \quad z = z_c + B;$$

$$4) z = \begin{cases} z_c + B, \\ z_c - B, \end{cases} \quad y = y_c - L;$$

$$5) y = \begin{cases} y_c - B, \\ y_c + B, \end{cases} \quad z = z_c - L;$$

$$6) z = \begin{cases} z_c - L, \\ z_c + L, \end{cases} \quad y = y_c + B;$$

$$7) y = \begin{cases} y_c + B, \\ y_c - B, \end{cases} \quad z = z_c + L;$$

$$8) z = \begin{cases} z_c + L, \\ z_c - L, \end{cases} \quad y = y_c - B,$$

где  $L$  — половина заданного размера (толщины) «креста».

При определении заданного рисунка на КПВ необходимо найти координаты его точек на поверхности, для этого сделаем параллельную проекцию рисунка с плоскости на данную поверхность. Вследствие криволинейности поверхности при вычислении координат рисунка на КПВ возникают искажения размеров каждого элемента рисунка на криволинейной поверхности. Величина этих искажений  $\Delta$  зависит от формы поверхности. Для ее определения необходимо вычислить координаты расположения элементов рисунка в зависимости от формы поверхности. Из геометрии рисунка на поверхности конуса, переходящего в двуполостный гиперboloид вращения, можно записать:

1) для конуса

$$\Delta = \frac{t}{2} \frac{(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha} \sin\varphi,$$

где  $t$  — длина линии «креста»;  $\alpha$  — угол конуса при его вершине;  $\varphi$  — угловой размер линии «креста»;  $r$  — радиус окружности основания конуса;  $\sin\varphi = \frac{z_c}{\sqrt{z_c^2 + y_c^2}}$  для элементов рисунка, параллельных оси  $OY$ , или  $\sin\varphi = \frac{y_c}{\sqrt{z_c^2 + y_c^2}}$  для элементов рисунка, параллельных оси  $OZ$ ;

2) для гиперboloида вращения

$$\Delta = \frac{z_c}{\sqrt{z_c^2 + y_c^2}} \frac{t}{2} \frac{(1 - \cos\Theta)}{\cos\Theta}$$

для линий, расположенных параллельно оси  $OY$ ;

$$\Delta = \frac{y_c}{\sqrt{z_c^2 + y_c^2}} \frac{t}{2} \frac{(1 - \cos\Theta)}{\cos\Theta}$$

для линий, расположенных параллельно оси  $OZ$ ;

$$\cos\Theta = \frac{R - (z_c - \delta)}{R},$$

где  $R$  — радиус ближайшей сферы гиперboloида в данном сечении;  $x_c$  — координата центра «креста», которая вычисляется по формуле (3):

$$x_c = \left( p \left( 1 + \frac{y_2^2 + z_2^2}{g} \right) \right)^{1/2} - \delta.$$

Таким образом, имеются все необходимые данные о расположении и координатах элементов рисунка на поверхности, т. е. данные для кодирования рисунка.

Как было описано выше, следующим этапом является обратное преобразование, т. е. перенос рисунка с известными координатами в плоскость маски (OYZ) в расходящихся лучах (центральная проекция с КПВ на плоскость).

Для получения уравнений, являющихся результатом центральной проекции рисунка с КПВ на плоскость OYZ, необходимо совместно решить следующие уравнения:

1) уравнение поверхности второго порядка (конуса (4), гиперboloида вращения (3));

2) уравнение секущей плоскости:  $Z = N$  для горизонтальных линий,  $Y = V$  для вертикальных линий;

3) уравнение прямой, проходящей через две точки (1).

Выполняем преобразования и определяем центральную проекцию рисунка с КПВ на плоскость OYZ.

Для конуса имеем:

$$\begin{cases} -x_2^2 + \frac{y_2^2 + z_2^2}{k^2} = 0, \\ Z = N, \quad Y = V, \\ \frac{X - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{Z - z_1}{z_2 - z_1}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим следующие выражения для секущих плоскостей, параллельных осям OY и OZ соответственно:

$$N^2 Y^2 + (-k^2 l^2 + V^2) Z^2 + 2k^2 l^2 N Z - k^2 l^2 N^2 = 0, \quad (5)$$

$$(V^2 - k^2 l^2) Y^2 + V^2 Z^2 + 2k^2 l^2 V Y - k^2 l^2 V^2 = 0. \quad (6)$$

Эти же преобразования для двуполостного гиперboloида:

$$\begin{cases} -\frac{(x_2 + \delta)^2}{p} + \frac{y_2^2 + z_2^2}{g} = -1, \\ Z = N, \quad Y = V, \\ \frac{X - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{Z - z_1}{z_2 - z_1}. \end{cases} \quad (7)$$

Решив систему (7), получим следующие выражения для секущих плоскостей, параллельных осям OY и OZ соответственно:

$$\begin{aligned} & Z^2 (gl^2 + 2gl\delta + g\delta^2 - pg - pN^2) - \\ & - Z(2Nl^2g + 2Nlg\delta) + N^2 l^2 g - pY^2 N^2 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & Y^2 (gl^2 - pV^2 + 2g\delta l - pg + g\delta^2) - z^2 gV^2 - \\ & - Y(2gl^2 V + 2g\delta lV) + gl^2 V^2 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В результате обратных преобразований находим центральную проекцию рисунка с КПВ на плоскость OYZ. Координаты крайних точек, ограничивающих линии проекции на плоской маске, определяются из уравнения (3). Алгоритм расчета плоской маски будет состоять из следующих вычислений:

1. Расчет координат центра «креста» на исходной поверхности, где необходимо учесть, что имеются две различные поверхности, которые ограничиваются максимальными диаметрами.

2. Относительно координат центра «креста» рассчитываются координаты крайних точек на поверхности, учитывающие его искажения по длине линий.

3. Вычисление координат проекций точек, ограничивающих «крест», с поверхности вращения на плоскость маски.

4. Расчет координат линий проекций «креста» на маске (с использованием уравнений (6) — (9)) от одной точки, ограничивающей данную линию, до другой с выбранным шагом итераций. Выбор уравнений для расчета линий на плоской маске (конус или гиперboloид) происходит в зависимости от текущего радиуса поверхности. Если  $r = \sqrt{y_c^2 + z_c^2}$  (см. рис. 2), то выбираются уравнения проекций сечения гиперboloида.

Аналогичным образом можно выполнить прямые и обратные преобразования для рисунка на поверхности сферы с радиусом  $R$ , центром в начале координат, заданным уравнением (10), при сечении сферы плоскостями вида (11) — (15):

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2, \quad (10)$$

$$Y = \operatorname{tg}\alpha Z + b, \quad (11)$$

$$Z = K, \quad (12)$$

$$Z = \operatorname{tg}\beta X + m, \quad (13)$$

$$X = S, \quad (14)$$

$$Y = \operatorname{tg}\Theta X + n, \quad (15)$$

где  $\Theta$  и  $\beta$  — углы наклона секущей плоскости относительно оси  $OX$ ;  $\alpha$  — угол наклона секущей плоскости относительно оси  $OZ$ ;  $b, m, n$  — смещение секущей плоскости относительно осей  $OY$  и  $OZ$ ;  $K, S$  — смещение секущей плоскости относительно осей  $OZ$  и  $OX$ .

Для получения линий центральной проекции пересечения сферы и плоскости  $OYZ$  необходимо совместно решить уравнения (10) и (1) с каждым из уравнений (11) — (15).

В результате получим:

$$Y^2(l^2 + b^2 - R^2) + Z^2(l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + b^2 - R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) +$$

$$+ YZ(2R^2 \operatorname{tg} \alpha - 2l^2 \operatorname{tg} \alpha) - 2Ylb + 2Zl^2 b \operatorname{tg} \alpha + l^2 b^2 = 0,$$

$$K^2 Y^2 + (l^2 + K^2 - R^2) Z^2 - 2l^2 KZ + l^2 K^2 = 0,$$

$$(l \operatorname{tg} \beta + m)^2 Y^2 + (l^2 - R^2 + (l \operatorname{tg} \beta + m)^2) Z^2 -$$

$$- Z(2l^2 m + 2lR^2 \operatorname{tg} \beta m) + l^2 m^2 - l^2 R^2 \operatorname{tg}^2 \beta = 0,$$

$$Y^2 + Z^2 + \frac{l^2(S^2 - R^2)}{(l - S)^2} = 0,$$

$$Y^2(l^2 - R^2 + (l \operatorname{tg} \Theta + n)^2) + (l \operatorname{tg} \Theta + n)^2 Z^2 -$$

$$- YZ(2l^2 n^2 + lR^2 \operatorname{tg} \Theta) + l^2(n^2 - R^2 \operatorname{tg} \Theta) = 0.$$

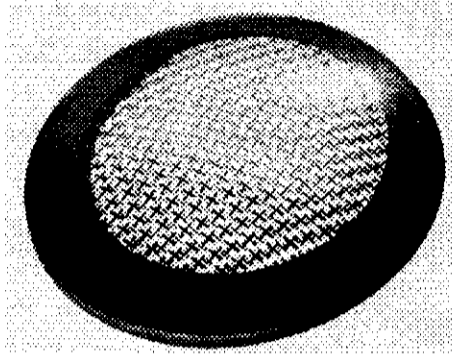


Рис. 4

Окончательный вид рисунка на плоскости получится при задании области определения каждой кривой с помощью уравнений (3).

С использованием предложенных алгоритмов составлены программы на ЭВМ по построению плоских масок с требуемым рисунком с помощью графопостроителя для указанных типов поверхностей и изготовлены образцы размером до 400 мм (рис. 4).

Приведенные в данной работе аналитические выражения по прямым и обратным преобразованиям рисунков различной топологии на поверхностях конуса, переходящего в двуполостный гиперboloид, и сферы позволяют получать рисунки любой степени сложности топологии и геометрии. Существуют только дифракционные ограничения.

Разработаны алгоритмы и составлены программы расчетов, позволяющие варьировать коэффициентами в вышеприведенных уравнениях, с последующим внесением изменений в рисунок в пределах заданной топологии. Использование ЭВМ для получения масок (фотошаблонов) дает возможность оперативного изменения рисунка в пределах заданной топологии и быстрого выбора оптимального вида рисунка на криволинейной поверхности, что важно для различных конструкторских разработок.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гиизбург В. М. Формирование и обработка изображений в реальном времени: Методы быстрого сканирования. М.: Радио и связь, 1986.
2. Дифракционная оптика. Новые разработки в технологии и применение. М.: НТЦ «Информтехника», 1991.
3. Пат. 1709833 РФ. Способ размерной обработки плоских, ступенчатых и криволинейных поверхностей и устройство для его реализации /Н. А. Мещеряков, Н. В. Орскова, Ю. В. Подьяпольский, Г. В. Симонова. Оpubл. 30.01.92, Бюл. № 4.
4. Грицкевич О. В., Мещеряков Н. А., Подьяпольский Ю. В. Лазерная размерная обработка криволинейных поверхностей вращения // Квантовая электрон. 1996. 23, вып. 7. С. 660.

*Поступила в редакцию 15 марта 1996 г.*