

УДК 621.371

С. Н. Моисеев

(Воронеж)

### РАЗЛИЧЕНИЕ ГИПОТЕЗ О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ ЭКРАНИРОВАНИЯ СПОРАДИЧЕСКОГО СЛОЯ E ИОНОСФЕРЫ

Проведен синтез и анализ алгоритма различения двух альтернативных гипотез о распределении частоты экранирования спорадического слоя  $E$  ионосферы: теоретически полученного  $E$ -распределения и обычно используемого логарифмически нормального распределения. Параметры распределений считались неизвестными.

**Введение.** В нижней ионосфере часто появляется спорадический слой  $E$ , который характеризуется повышенными значениями электронной концентрации. Его появление экранирует вышележащие слои ионосферы, что приводит к нарушению УКВ-радиосвязи через них. Одним из важнейших параметров среднеширотного спорадического слоя  $E$ , характеризующего его экранирующие свойства, является частота экранирования  $f_v$ . Для описания ионосферных каналов распространения радиоволн с учетом спорадических образований необходимо знание вероятности экранирования, которая рассчитывается через функцию распределения вероятностей частоты  $f_v$ . Одномерную функцию распределения частоты экранирования, как правило, находят путем аппроксимации гистограмм, полученных по данным станций вертикального зондирования ионосферы. Наиболее часто в качестве такой эмпирически полученной функции используют логарифмически нормальную функцию распределения [1, 2] с плотностью вероятностей

$$W_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Theta x} \exp\left\{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\Theta}\right\}, \quad x > 0, \quad (1)$$

где  $m, \Theta$  — параметры распределения. Вместе с тем в [3], основываясь на положениях физической теории образования спорадического слоя  $E$  — теории ветрового сдвига, получено одномерное распределение  $f_v$  ( $E$ -распределение) с плотностью вероятностей

$$W_0(x) = 2\alpha^\beta x^{-2\beta-1} \exp\{-\alpha/x^2\}/\Gamma(\beta), \quad x > 0, \quad (2)$$

где  $\alpha, \beta$  — параметры распределения;  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция [4].

В связи с появлением теоретического распределения частоты экранирования (2) представляет практический интерес сравнение его с логарифмически нормальным распределением (1) с тем, чтобы определить, какое из них лучше описывает экспериментальные данные. Учитывая, что на практике параметры распределений (1), (2) обычно неизвестны, сравнение будем проводить в терминах различения сложных гипотез.

**Синтез.** Пусть проверяется сложная гипотеза  $H_0$  о распределении независимых выборочных значений частоты экранирования  $x_1, \dots, x_n$  по закону (2) против сложной альтернативы  $H_1$  о распределении  $x_1, \dots, x_n$  по логарифмически нормальному закону (1). Правило принятия решения по критерию обоб-

щенного максимального правдоподобия в условиях априорной неопределенности относительно параметров распределений будет иметь вид [5]:

$$\Lambda = \frac{\omega_0(\mathbf{x} | \hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\omega_1(\mathbf{x} | \hat{m}, \hat{\Theta})} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} 1, \quad (3)$$

где  $\omega_0(\cdot)$  и  $\omega_1(\cdot)$  — функции правдоподобия для распределений (2) и (1);  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{m}, \hat{\Theta}$  — оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметров распределений, вычисленные при условии справедливости соответствующих гипотез. Найдем последовательно ОМП параметров распределений. Функция правдоподобия при справедливости гипотезы  $H_0$

$$\omega_0(\mathbf{x} | \alpha, \beta) = \left[ \frac{2\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \right]^n \exp \left\{ -\alpha \sum_{i=1}^n x_i^{-2} - 2\beta \sum_{i=1}^n \ln x_i \right\} \prod_{i=1}^n x_i^{-1}. \quad (4)$$

Откуда путем максимизации по  $\alpha$  и  $\beta$  находим систему уравнений максимального правдоподобия:

$$\ln \hat{\beta} - \psi(\hat{\beta}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i + \ln \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{-2} \right], \quad (5)$$

$$\hat{\alpha} = n \hat{\beta} / \sum_{i=1}^n x_i^{-2}, \quad (6)$$

где  $\psi(\cdot)$  — пси-функция [4] (первая логарифмическая производная гамма-функции). Функция правдоподобия при справедливости гипотезы  $H_1$

$$\omega_1(\mathbf{x} | m, \Theta) = (2\pi\Theta)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\Theta} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - m)^2 \right\} \prod_{i=1}^n x_i^{-1} \quad (7)$$

приводит к следующим ОМП параметров  $m$  и  $\Theta$ :

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad (8)$$

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \hat{m})^2. \quad (9)$$

Подставляя (4)—(9) в формулу (3), получим максимально правдоподобное правило различения гипотез, формально выраженное через статистики (5), (6), (8), (9):

$$\Lambda = \hat{\Theta}^{1/2} \hat{\alpha}^{\hat{\beta}} \exp \{ -\hat{\beta}(1 + 2\hat{m}) \} / \Gamma(\hat{\beta}) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \exp(1)} = K. \quad (10)$$

**Анализ.** Для практического использования алгоритма (1) необходимо найти аналитические выражения для вероятностей ошибочного принятия гипотез двух видов: вероятности  $P(H_0 | H_1)$  принятия гипотезы  $H_0$  при условии, что справедлива гипотеза  $H_1$ , и вероятности  $P(H_1 | H_0)$  принятия гипотезы  $H_1$ , когда верна  $H_0$ . Разложим статистику  $\Lambda$  (10) в многомерный ряд Тейлора по степеням  $\hat{\Theta}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{m}$  вблизи их средних значений и ограничимся первыми двумя членами разложения:

$$\Lambda \left[ \hat{\Theta}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{m} \right] = \Lambda \left[ M(\hat{\Theta}), M(\hat{\alpha}), M(\hat{\beta}), M(\hat{m}) \right] + \frac{\partial \Lambda}{\partial \Theta} \left[ \hat{\Theta} - M(\hat{\Theta}) \right] +$$

$$+ \frac{\partial \Lambda}{\partial \hat{\alpha}} [\hat{\alpha} - M(\hat{\alpha})] + \frac{\partial \Lambda}{\partial \hat{\beta}} [\hat{\beta} - M(\hat{\beta})] + \frac{\partial \Lambda}{\partial \hat{m}} [\hat{m} - M(\hat{m})] + R, \quad (11)$$

где все производные берутся в точках средних значений  $\hat{\Theta}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{m}$ ;  $M(\cdot)$  означает операцию усреднения. Как показано в [6], остаточная ошибка  $R$  в (11) имеет более высокий порядок малости по  $n^{-1}$ , чем первые два члена (11), и, следовательно, в силу асимптотической гауссовости ОМП статистика (11) будет распределена при больших  $n$  нормально. Поэтому достаточно найти первые два момента случайной величины  $\Lambda$  при условии справедливости каждой из гипотез. Для больших объемов выборки  $n$  средние значения величины  $\Lambda$  при условии справедливости гипотез  $H_0$  или  $H_1$  соответственно запишутся следующим образом:

$$M(\Lambda | H_0) = \sqrt{\psi'} \exp\{-\beta(1 - \psi)\} \Gamma^{-1}(\beta)/2 + O(n^{-1}), \quad (12)$$

$$M(\Lambda | H_1) = \sqrt{\Theta} \beta_1^{\beta_1} \exp\{-\beta_1(1 + 2\Theta)\} \Gamma^{-1}(\beta_1) + O(n^{-1}), \quad (13)$$

где  $\psi^{(i)} = \psi^{(i)}(\beta)$  — полигаммы-функции [4];  $\beta_1$  — корень уравнения  $\ln \beta_1 - \psi(\beta_1) = 2\Theta$ . Дисперсии статистики  $\Lambda$  при условии справедливости соответствующих гипотез имеют вид:

$$D(\Lambda | H_0) = \frac{\varphi(\beta)}{4n} \left[ \frac{\psi'}{2} + \frac{\psi'''}{4\psi'} + \beta\psi'(\beta\psi' - 1) + \beta\psi'' \right] + O(n^{-2}), \quad (14)$$

$$D(\Lambda | H_1) = \frac{\varphi(\beta_1)}{n} \left[ \frac{1}{2} + \beta_1^2(\exp\{4\Theta\} - 1) - 4\Theta\beta_1(\beta_1 + 1) \right] + O(n^{-2}). \quad (15)$$

Здесь  $\varphi(\beta) = \exp\{2\beta[\psi(\beta) - 1]\} \Gamma^{-2}(\beta)$ .

Таким образом, вероятность принятия гипотезы  $H_0$  при условии, что справедлива гипотеза  $H_1$ , будет определяться как

$$P(H_0 | H_1) = 1 - \Phi \left[ \frac{K - M(\Lambda | H_1)}{\sqrt{D(\Lambda | H_1)}} \right], \quad (16)$$

а вероятность принятия гипотезы  $H_1$  при условии, что справедлива  $H_0$ ,

$$P(H_1 | H_0) = \Phi \left[ \frac{K - M(\Lambda | H_0)}{\sqrt{D(\Lambda | H_0)}} \right], \quad (17)$$

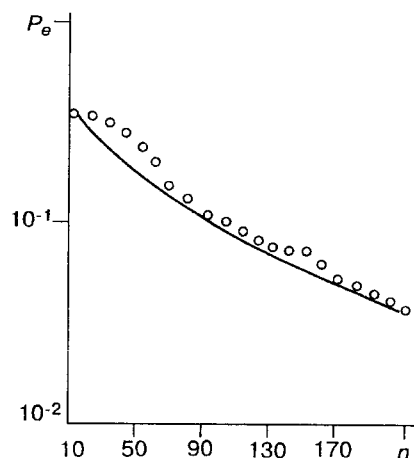
где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$ .

Вместо двух характеристик, определяющих качество работы алгоритма (10), можно ввести одну — среднюю вероятность ошибки при различении гипотез  $H_0$  и  $H_1$ :

$$P_e = \frac{1}{2} [P(H_0 | H_1) + P(H_1 | H_0)]. \quad (18)$$

**Моделирование.** Для определения границ применимости полученных выражений проведено моделирование на ЭВМ алгоритма (10). Число испытаний для каждого  $n$  составило  $10^3$ . В качестве значений параметров  $\Theta$  и  $\beta$  брались характерные для частоты  $f_n$  в фиксированное время суток (00 ч) значения  $\Theta = 0,15$ ;  $\beta = 2,5$ .

Результаты моделирования средней вероятности ошибки обозначены на рисунке кружками, сплошная линия — теоретическая зависимость (18) от объема выборки  $n$ . Видно, что теоретическая зависимость (18) удовлетворительно аппроксимирует среднюю вероятность ошибки (10) при  $n \geq 10$ .



**Практическое использование.** При статистической обработке экспериментальных значений  $f_b$  за 1976—1979 гг. (июнь — июль) было установлено, что в фиксированное время суток  $f_b$  образуют стационарные некоррелированные последовательности. Поэтому проверка экспериментальных данных в виде одномерного закона распределения частоты экранирования проводилась для выборок  $f_b$ , набранных в фиксированное время суток. Отсчеты  $f_b$  на ионосферных станциях регистрировались через 15 мин, следовательно, в сутках можно выделить 96 временных моментов. Объем выборки для каждого момента составлял 244 значения.

Проверка по алгоритму (10) показала, что в 91 случае из 96 принимается гипотеза о  $E$ -распределении (2) и лишь в пяти случаях — о логарифмически нормальном распределении (1)  $f_b$ . Теоретическая оценка средней вероятности ошибочного решения (18) для  $n = 244$  равна 0,05, что близко к значению 5/96. Следовательно, принятие гипотезы о логарифмически нормальном распределении находится в пределах ошибки различения алгоритмом (10).

**Заключение.** Таким образом, проверка гипотезы о виде закона распределения частоты экранирования спорадического слоя  $E$  показала, что  $E$ -распределение лучше приближает одномерную функцию распределения  $f_b$ , чем логарифмически нормальное распределение, и поэтому является более предпочтительным для использования в практических приложениях.

Методы синтеза и анализа, рассмотренные в данной работе, могут быть использованы при различении других типов распределений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукин А. Н., Моисеев С. Н. Статистические модели частотных параметров спорадического слоя  $E$  // Геомагнетизм и аэрономия. 1993. 33. С. 77.
2. Овезгельдыев О. Г., Михайлова Г. В. Эмпирическая модель среднеширотного слоя  $E_s$  // Изв. АН ТССР. 1976. № 6. С. 48.
3. Лукин А. Н., Моисеев С. Н. Функция распределения частоты экранирования спорадического слоя  $E$  // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. 34, № 8. С. 872.
4. Справочник по специальным функциям /Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979.
5. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
6. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

Поступила в редакцию 24 апреля 1996 г.